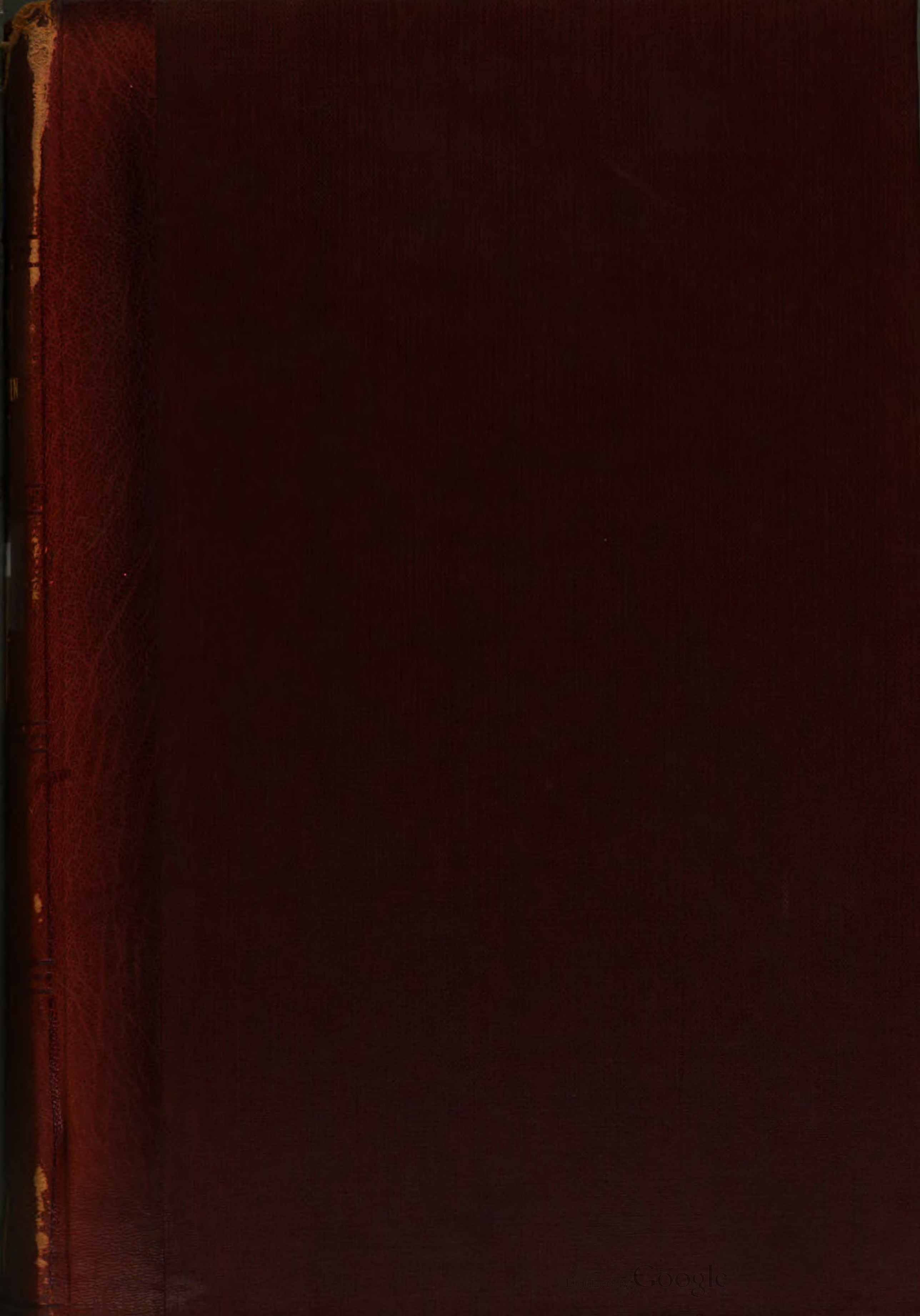
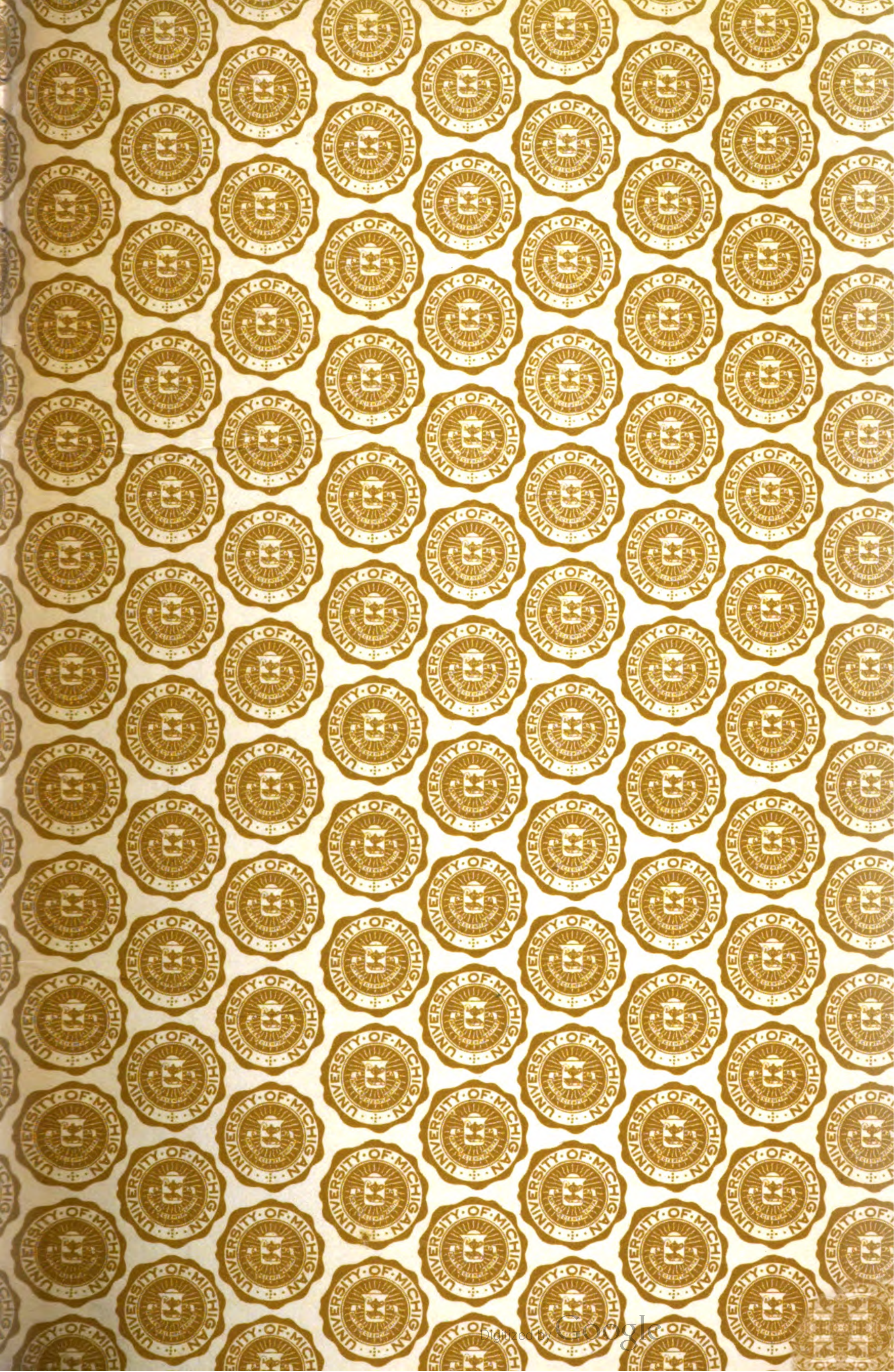




1817
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE


UNIVERSITY·OF·MICHIGAN

ZEITSCHRIFT FÜR MATHEMATISCHEN UND NATURWISSENSCHAFTLICHEN UNTERRICHT ALLER SCHULGATTUNGEN

BEGRÜNDET 1869 VON J. C. V. HOFFMANN

HERAUSGEGEBEN VON

H. SCHOTTEN UND **W. LIETZMANN**
IN HALLE A. S. IN GÖTTINGEN

UNTER MITARBEIT VON

W. HILLERS
IN HAMBURG

58. JAHRGANG

MIT 141 FIGUREN IM TEXT
UND 1 BILDNIS



VERLAG UND DRUCK VON B. G. TEUBNER · LEIPZIG · BERLIN 1927

Inhaltsverzeichnis des 58. Jahrgangs.

Abhandlungen.

Jenerek

Kleine Mitteilungen.

Rechnen, Arithmetik, Algebra und Analysis.

Geometrie.

Physik und Astronomie.

Aufgaben-Repertorium.[1]

Berichte.

Amtliche Verordnungen. — Organisation.

Methodik. — Lehrmittel.

Aus der Forschung.

---

1) Eine ausführliche Zusammenstellung über die einzelnen Aufgaben siehe S. VII des Inhaltsverzeichnisses.

Versammlungen und Kurse.

Persönliches.

Bücherbesprechungen.

Mathematik.

Mechanik, Physik, Chemie.

Philosophie, Pädagogik, Verschiedenes.

Zeitschriftenschau.

Lehrmittel und Kataloge.

Neuerscheinungen.

Lustige Ecke.

Vermischtes. — Sprechsaal.

Genauer Nachweis über das Aufgaben-Repertorium.

Von M. Brettar in Viersen.

Nr. der Aufgabe	Gattung d. Aufg.	Aufgaben-steller	Band und Seite der Aufgabe	Verfasser der Auflösungen	Seite der Auflösgn.
876	Extremwert	Emmerich	LVI, 98	Br., Bg, Cls., Cd., Dz., Em., Gts., Hm., Hff., Hg., Jz, Kp., Kbs., Ld., Ms., Mz, Mt., Mlr., Mst., Schk., Stl., Sll., St.	24
877	Trigonometrie	Hörting	„	Bg., Cd., Dz., Gts., Gz., Hff., Hg., Jz., Kp., Ld., Lns., Mz., Mlr., Mst., Rff., Sch., Schk., Sns., St.	25
878	Kurvenlehre	Gaedecke	„	Br., Bg., Cd., Dz, Gts., Gz., Hff., Jz., Kp., Kbs., Ld., Lns., Mz., Mt., Mlr., Mst., Pr., Sk., Schk., Sns., Stl., St.	25
879	Zahlentheorie	Oppenheimer	„	Cd., Dz., Hlbr., Hff., Kp., Ld., Mz., Mst., Opp., Sk., Schm., Stl., St	25
880	Stereometr.	Hauptmann	LVI, 170	Br., Cls., Cd., Dz., Hm., Hff., Jz., Kp., Kbs., Ld., Mz., Mt., Mst., Nsch., Rhm., Stl., St.	26
881	Extremwert	Michnik	LVI, 171	Br., Cd., Dz., Hff., Jz., Kp., Ld, Lns., Mz., Mt., Mst., Nsch., Sn., St.	73
882	Stereometr.	Fiebig	„	Cd, Dz., Hff., Jz., Kp., Ld., Lns., Ms., Mt., Mst., Nsch., Sn., Stl., St.	73
883	Arithmetik	Lohnes	„	Cd., Dz., Hff., Jz., Kp., Ld., Lns., Mst, Rff., Stl., St.	73
884	Kurvenlehre	Gaedecke	LVI, 232	Bg., Cls., Cd., Dz., Fg., Gz., Hff., Jz., Jns., Kph., Kp., Kbs., Ld., Lns., Mz., Mt., Mst., Nsch, Rll., Schm, Sn., Stl., St., Wtn.	74
885	Trigonometrie	Hörting	„	Bg., Cd., Dz., Gz., Ld., Mz., Mt., Mst., Nsch., Rll., Rff., St.	74
886	Planimetrie	Stengel	„	Cls., Cd., Dz., Hff., Jz., Kph., Kp., Ld., Mz., Mt., Mst., Stg., Stl., St.	120
887	Darst. Geometrie	Kerst	„	Br., Mz., St.	120
888	Extremwert	Emmerich	LVI, 295	Cd., Dz., Em., Hff., Kp., Mz., Mst., Nsch.	121
889	Dreieckslehre	Mahrenholz	LVI, 296	Cd., Mz., Mk., Nsch.	121
890	Kurvenlehre	Hoffmann	„	Br., Bg., Cd., Dz., Hff., Kbs., Mz., Mst., Nsch., Stl.	122
891	Planimetrie	Ruff	„	Br., Bg., Cd., Dz., Gz., Hff., Jz., Kp., Kbs., Lns., Mz., Mt., Mlr., Mst., Rll., Rff.	122
892	Math Geogr.	Michnik	LVI, 350	Bg., Dz., Hff., Kp., Mz., Mk., Mst., Rll.	165
893	Kreislehre	Bücking	„	Bg., Cls., Cd, Dz., Fr., Hff., Kp., Kbs., Mz., Mt., Mst., Rll., Stl., Wlt.	165
894	Geom. d. Lage	Böger	„	Bgr., Cd., Dz., Kp., Mz., Mst.	165
895	Ebene u. sphärische Trigonometrie	Fiebig	„	Cd., Fr., Hff., Kbs., Lns., Mz.	166
896	Planimetrie	Zimmermann	„	Br., Bg., Cls, Cd., Dz., Fr., Gz., Hff., Jz., Kp., Kbs., Lns., Mz., Mt., Mlr., Mst., Rll., Vln., Wls., Zm.	166
897	Reihenlehre	Klobasa	LVII, 28	B., Bn., Br., Cd., Dz., Fr., Ftr., Gb., Gw., Gr., Hff., Jb., Jns, Kp., Kbs, Lns., Mz., Mt., Mk., Mst., Pt., Rll., Rff., Schft., Schsr., Ss., Stl., Wls., Wrl.	236
898	Sphärik	Michnik	LVII, 29	Cd., Dz., Fr., Hff., Mz., Mt., Mk., Mst., Rll., Rlf, Stl.	237
899	Anal. Geometrie	Brettar	„	B., Br., Cd., Fr., Gr., Hff, Jb., Kp., Lns., Mz., Mt., Mst., Pt., Rff., Ss. Stl.	237
900	Logarithm.	Ruff	LVII, 76	Br., Cd., Dz., Hff., Mz., Mst., Rff.	283
901	Dreieckel.	Mahrenholz	LVII, 77	Cd., Mz., Mk., Schft., Ss.	284
902	Mechanik	Hauptmann	„	Gr., Hm., Hff., Kp.	284
903	Kurvenlehre	Lohnes	LVII, 130	Br., Bg., Cd., Dz., Hsl., Hff., Jb., Kp., Kbs, Lns., Mz., Md., Mt., Mst., Pt., Rll., Rff., Schlts., Stl.	285

Abkürzungen der Namen der Mitarbeiter am Aufgaben-Repertorium.

Bauer	= B.	Griebenow	= Gw.	Meyrich	= Mrch.	Schoch	= Sch.
Behner	= Bnr.	Groner	= Gr.	Michnik	= Mk.	Schlosser	= Schsr.
Böger	= Bgr.	Halberstadt	= Hbst.	Müller	= Mlr.	Schmidt	= Schdt.
Bolduan	= Bdn.	Häusler	= Hsl.	Münst	= Mst.	Schreck	= Schk.
Braun	= Bn.	Hauptmann	= Hm.	Neubauer	= Nb.	Schultheiß	= Schts.
Brehm	= Br.	Herbst	= Hb	Neumann	= Nmn.	Schulz	= Schz.
Bücking	= Bg.	Hermann	= Hrm.	Niebel	= Nbl	Schumacher	= Schm.
Busse	= Bss.	Heymann	= Hm.	Niemöller	= Nlr.	Sohn	= Sn.
Chambré	= Ch.	Hillebrecht	= Hlbr.	Nikol	= Nkl.	Sos	= Ss.
Clauß	= Cls.	Hoffmann	= Hff.	Nitsche	= Nsch.	Stengel	= Stg.
Conrad	= Cd.	Höhmann	= Hhm.	Nix	= Nx.	Steckel	= Stk.
Deicke	= Dck.	Hörting	= Hg.	Oppenheim	= Opp.	Stiegler	= Stl.
Diethelm	= Dt.	Jacob	= Jb.	Ostermeyer	= Omr.	Stillger	= Sll.
Dies	= Dz.	Jansen	= Jz.	Preuss	= Pr.	Stucke	= St.
Ehrlich	= Ech.	Jonas	= Jns	Peschke	= Pk.	Tafelmacher	= Tfm.
Emmerich	= Em.	Kapphan	= Kph.	Peters	= Pt.	Tamort	= Tt.
Epstein	= Ep.	Kasper	= Kp.	Piel	= Pl.	Thielmann	= Thn.
Ernst	= Et.	Klobasa	= Kbs.	Rall	= Rll.	Villain	= Vln.
Fiebig	= Fg.	König	= Kg.	Roth	= Rth.	Walter	= Wt.
Fix	= Fx.	Koethke	= Ktk.	Ruff	= Rff.	Wangerin	= Wgn.
Förster	= Ftr.	Lauffer	= Lff.	Ruhm	= Rhm.	Walz	= Wlz.
Fried	= Fr.	Lindemann	= Ld	Rulf	= Rlf.	Wattrien	= Wtn.
Friedrich	= Fdr.	Maaß	= Ms.	Scharff	= Schf.	Weimershaus	= Wms.
Gaedecke	= Gd.	Mahrenholz	= Mz.	Scharffetter	= Schft.	Wieleitner	= Wlt.
Geiger	= Gg.	Marchand	= Md.	Saßmannshausen	= Smh.	Wöhrle	= Wrl.
Goeb	= Gb.	Mertens	= Mt.	Schick	= Sk.	Zimmermann	= Zm.
Gottselig	= Gts.						

ZEITSCHRIFT FÜR MATHEMATISCHEN UND NATURWISSENSCHAFTLICHEN UNTERRICHT ALLER SCHULGATTUNGEN

BEGRÜNDET 1869 VON J. C. V. HOFFMANN



HERAUSGEGEBEN VON

H. SCHOTTEN und W. LIETZMANN
in Halle a. S. in Göttingen
unter Mitarbeit von
W. HILLERS
in Hamburg

58. JAHRGANG. 1927 · 1. HEFT



LEIPZIG · B. G. TEUBNER · BERLIN

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin

ZEITSCHRIFT FÜR MATHEMATISCHEN UND NATURWISSENSCHAFTLICHEN UNTERRICHT ALLER SCHULGATTUNGEN

Der Bezugspreis für diesen, 10 Hefte im Umfang von je 3 Bogen umfassenden Jahrgang (58. Band) beträgt für das halbe Jahr *RM* 10.—. Einzelhefte können in Zukunft nur von älteren Jahrgängen, soweit überzählig, geliefert werden. Bestellungen nehmen alle Buchhandlungen wie auch der Verlag von B. G. Teubner, Leipzig, Poststr. 3, an. Der Postbezug mußte aufgehoben werden, weil er sich als unvorteilhaft erwiesen hat.

Die Zeitschrift hat seit ihrem Bestehen auf dem Gebiete des höheren Schulwesens erfolgreich gewirkt. Sie hat trotz mancher nach ihrem Muster neugegründeter ähnlicher Organe ihre Bedeutung fortdauernd sich erhalten. Der Inhalt gliedert sich in folgende Abteilungen: I. Abhandlungen. Kleine Mitteilungen. Aufgabenrepertorium. II. Berichte aus der Forschung, über Organisation des Unterrichts, Methodik, Lehrmittelwesen, Versammlungen und Verhandlungen über Unterrichtsfragen. III. Literarische Berichte: Besprechungen, Programm-, Zeitschriften- und Bücherschau.

Generalregister zu Bd. 1—32 d. Zeitschrift f. mathemat. u. naturwissenschaftl. Unterricht. Geh. *RM* 6.—

Die Verfasser erhalten von größeren Aufsätzen 20, von Besprechungen, kleinen Mitteilungen usw. 5 Sonderabdrücke unentgeltlich und portofrei geliefert. Beiträge werden nach vorheriger Anfrage an den Herausgeber Oberstudiendirektor Dr. W. Lietzmann, Göttingen, Calsowstraße 18, solche naturwissenschaftlichen Inhalts an Professor Dr. W. Hillers, Hamburg 26, Saling 3, Rezensionsexemplare nur an die Verlagsbuchhandlung B. G. Teubner, Leipzig, Poststraße 3, erbeten. Unverlangt eingeschickte Arbeiten werden nur zurückgesandt, wenn Rückporto beigefügt ist. Eine Verpflichtung zur Besprechung oder Rücksendung unverlangt eingesandter Bücher wird nicht übernommen.

Anzeigenpreise: Die zweigespaltene Millimeterzeile *RM* —.34, 1/1 Seite *RM* 100.—, 1/2 Seite *RM* 55.—, 1/4 Seite *RM* 30.—
Anzeigenannahme durch B. G. Teubner, Leipzig, Poststr. 3

Inhaltsverzeichnis des 1. Heftes.

Für die Schriftleitung verantwortlich: W. Lietzmann in Göttingen.

Die Mathematik des sportlichen Wurfes.

Von E. Lampe in Erfurt.

Mit 3 Figuren im Text.

Methodische Vorbemerkungen. In den physikalischen Aufgabensammlungen wird im Kapital „Wurf" meist nur „geschossen". Wegen der hohen Geschwindigkeiten werden die durch die Vernachlässigung des Luftwiderstandes hier auftretenden Abweichungen vom Tatsächlichen sehr groß. Z. B. sinkt die Anfangsgeschwindigkeit $v = 875$ m/sec des deutschen Infanteriegeschosses M. 98/S schon nach 1 sec auf etwa die Hälfte, auf rund 450 m/sec.

Diese „Schießaufgaben" „führen die Jugend nicht in die wahren Größenordnungen der Umwelt ein", zumal die wirklichen Schußweiten meist nicht angegeben werden.

Wesentlich günstiger liegen die Verhältnisse bei den volkstümlichen Übungen, beim Kugel- und Steinstoßen, beim Schleuderballwurf usw.

Unter Zugrundelegung des quadratischen Luftwiderstandsgesetzes nimmt die Anfangsgeschwindigkeit 20 m/sec einer geworfenen Bleikugel von 2 cm Durchmesser nach 1 sec auf 19,64 m/sec, nach 2 sec auf 19,30 m/sec ab.[1]) Und um 20 m/sec als ungefähren Mittelwert gruppieren sich die Geschwindigkeiten der turnerischen Würfe. Wegen der geringeren Querschnittsbelastung[2]) der Wurfgeräte (besonders der Bälle) ist natürlich bei den volkstümlichen Würfen der Einfluß des Luftwiderstandes größer, am geringsten vielleicht bei der 7,25 kg-Kugel mit Bleifüllung und dem $^1/_3$ Ztr.-Stein. Da bei beiden Übungen die Geschwindigkeit zudem verhältnismäßig gering ist, kann vom Luftwiderstand fast abgesehen werden. Die Übungen stellen mathematisch beinahe ideale Wurfformen dar.

Da diese turnerischen Übungen bei der heutigen Sportfreudigkeit die Schüler stark interessieren, verdienen Aufgaben aus diesem Gebiete auch wegen der größeren „Lebensnähe" eine Vorzugsstellung in der unterrichtlichen Behandlung. (Konzentration!) Hinzu kommt, daß die Schüler die nötigen Festwerte meist leicht durch eigene Versuche bestimmen können (Arbeitsunterricht!)

Dann erhalten die Aufgaben natürlich vom Üblichen abweichende Formulierungen. Es sei als Beispiel eine der wenigen in den jetzigen Aufgabensammlungen enthaltenen und dort wie die „Schießaufgaben" behandelten ($h = 0$, $\alpha = 45^0$ s. u.) Aufgaben aus dem Gebiete der Leibesübungen angeführt.[3])

1) Vgl. Donle, Über den Flug der Geschosse. Monatsschrift f. d. naturw. Unterr. 1914. S. 516.

2) Vgl. Eckhardt, Zur Lehre von der Geschoßbahn. Diese Zeitschrift, Jahrg. 1915. S. 311.

3) Bohn-Matthée, Sammlung physikalischer Aufgaben. Aufgabe Nr. 15. Leipzig, Quelle & Meyer. Diese Sammlung ist übrigens im allgemeinen nicht so theoretisch eingestellt wie die übrigen.

„Ein Ball erhält durch einen Schlag $c = 60$ m/sec Anfangsgeschwindigkeit unter $\alpha = 35^0$ Erhebungswinkel. a) In welcher Zeit erreicht er die Höhe $h = 50$ m? b) . . . f) Welche größte Weite kann er erreichen?“

Ein aufmerksamer Primaner fragt sofort: „Wie ist die Anfangsgeschwindigkeit bestimmt worden?“ Leicht meßbar sind aber Höhe des Balles beim Abschlagen (y), Schlagweite (x) und mittels Stoppuhr Wurfdauer (t). Eine mit selbst ermittelten Festwerten vom Schüler selbst gestellte Aufgabe kommt dann nicht zu unmöglichen Ergebnissen. Die obige Aufgabe führt zu einer Flugweite des Balles von 344,8 m, maximal (Frage f) zu 367 m! Nun sind aber Weitschläge von 120 m äußerst selten!

Die Bevorzugung der „Schießaufgaben“ in der mathematisch-physikalischen Literatur — und daher wohl auch im Unterricht — mit dem bekannten Winkel von 45^0 für die maximale Wurfweite (diese interessiert den Turner naturgemäß nur!) führte dann auch in der sportlichen Literatur für die verschiedenen Wurfarten zur Anpreisung dieses Winkels, der allerdings vom aufmerksamen Turner und Sportler bisweilen mit einem gewissen Mißtrauen betrachtet wurde (s. u.).

Der Nachweis, daß für alle Wurfübungen der Abwurfwinkel zur Erreichung der *maximalen Wurfweite stets kleiner als 45^0* sein muß, wird im 2. Teil dieser Arbeit erbracht, nachdem im 1. Teil die *„Wertungsfunktionen“* für die verschiedenen Wurfarten aufgestellt worden sind.

I. Die Wertungsfunktionen.

1. Nach der Art der Ausführung, Messung und Wertung lassen sich die volkstümlichen oder leichtathletischen Übungen in zwei Gruppen einteilen.

Gruppe I: Schlagballweitwurf, Schleuderballwurf, Speerwurf, Kugelwurf, Steinstoßen.

Gruppe II: Diskuswurf, Kugelstoßen, Hammerwerfen, Gewichtwerfen.

Die „amtlichen Bestimmungen“[1]) setzen fest zu I. „Geworfen wird von einer Abwurflinie (Marklinie). Anlauf ist gestattet. Gemessen wird von dem der Abwurflinie am nächsten liegenden sichtbaren Bodeneindruck in senkrechter Richtung bis zur Abwurflinie oder deren Verlängerung.“

Zu II. „Geworfen wird aus einem Kreis von 2,5 m bzw. 2,135[2]) m Durchmesser. Anlauf ist durch den Kreis begrenzt. Gemessen wird von dem dem Kreisrand zunächst liegenden sichtbaren Bodeneindruck bis zum Kreisrand, und zwar auf der Linie, die vom Aufschlagpunkt nach dem Mittelpunkt des Kreises geht.“[3])

Der Zweck der „amtlichen Bestimmungen“ ist natürlich der, einen Wurf, der möglichst nahe von der Abwurflinie erfolgt und bei einem Maximum an Weite ein Minimum von Abweichung aufweist, möglichst hoch zu bewerten.

---

1) Maßgebend sind die Wettkampfbestimmungen der „Deutschen Turnerschaft“ (D. T.) und der „Deutschen Sportbehörde für Leichtathletik“ (D. S. B.).

2) 1 engl. Fuß = 0,305 m, daher die überflüssig genaue Angabe; Bedeutung der Engländer für den Sport. Vgl. auch 7,25 kg! 1 engl. Pfund = 453,6 g.

3) Außer der Ziellinie sind noch zwei Grenzlinien in das Wurffeld gezogen. Die Untersuchung der Zweckmäßigkeit dieser Grenzlinien gestattet eine hübsche Anwendung der Trigonometrie. Vgl. E. Lampe, Zur Messung und Wertung des Diskuswurfes. Zeitschr. „Die Leibesübungen“ 1926. Nr. 22, S. 535.

2. (Fig. 1; Übungen der Gruppe I.)

Läuft der Turner in Richtung s an, so wird er im allgemeinen nicht den „normalen" Abwurfpunkt N (Gefahr des Übertretens über die Marklinie; Wurf ist ungültig!) sondern etwa die Abwurfstelle S erreichen. Es sei $SN = e$. Weiter wird es ihm selten glücken, genau in die Zielrichtung SZ zu werfen. Der Winkel zwischen Zielrichtung und Wurfrichtung sei die „Abweichung" φ.

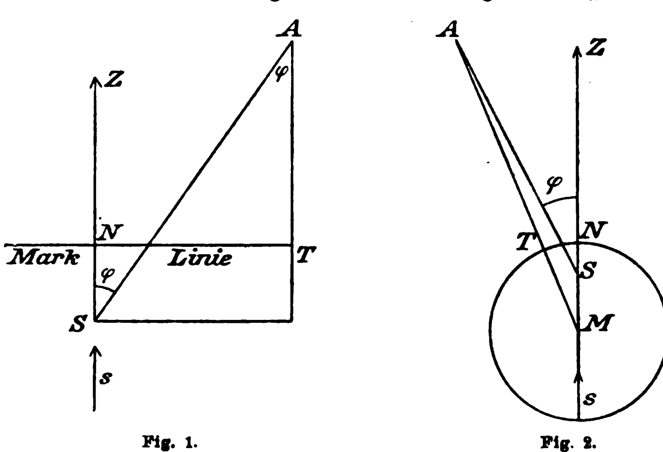


Fig. 1. Fig. 2.

Die Kugel (Ball) falle in A nieder. Es sei $SA = w$ (Wurfweite im „gewöhnlichen" Sinn). Gemessen und gewertet wird der Wurf durch die Strecke $\bar{g} = AT$. Es ist

$$\bar{g} = w \cos \varphi - e. \tag{1}$$

Günstigster Wurf: $e = 0, \quad \varphi = 0, \quad \bar{g} = w.$

3. (Fig. 2; Übungen der Gruppe II.)

Unter Anwendung derselben Bezeichnungen

$$(SN = e, \quad \sphericalangle ZSA = \varphi, \quad SA = w, \quad AT = \bar{g}, \quad MN = r)$$

gilt für das Dreieck ASM nach dem Kosinussatz

$$(\bar{g} + r)^2 = w^2 + (r - e)^2 + 2w(r - e) \cos \varphi,$$

oder

$$\bar{g} = \sqrt{w^2 + (r - e)^2 + 2w(r - e) \cos \varphi} - r. \tag{2}$$

Günstigster Wurf: $e = 0, \quad \varphi = 0$

$$g = \sqrt{w^2 + r^2 + 2wr} - r; \quad \bar{g} = w.$$

4. In beiden Fällen ist $\bar{g} = f(w, \varphi, e)$.

Die Bestimmung, daß $\bar{g}$ („was mein Wurf gilt") von einem willkürlich festgelegten r abhängig ist, (2) hat etwas Unbefriedigendes. Die Formel (1) ist frei von dieser Willkür; sie hat weiter den Vorzug, daß die Strecke e (was ich beim Abwurf durch nicht Herangehen an die Abwurflinie „verschenkt" habe) im vollen Betrag in Abzug kommt. Der wesentliche Unterschied in der Bewertung der beiden Fälle ist die verschiedene „Anrechnung" der Abweichung φ.

Im zweiten Falle wird beispielsweise ein Wurf von 35 m mit der Abweichung $\varphi = 10^0$ mit 34,98 m, ein Wurf mit $\varphi = 40^0$ mit 34,71 m bewertet. Hingegen werden im Fall 1 dieselben Würfe mit 34,47 m bzw. 26,81 m gewertet. [$e = 0$.] Bei jedem Meßverfahren wird eben *nicht nur die Wurfweite sondern stets die Abweichung von der Zielrichtung mit gewertet.*

5. Bei der Besprechung der Wertungsfunktionen wurde gegen (1) von den Schülern vor allem folgender Einwand erhoben. „Ein Wurf von beispielsweise 35 m und $\varphi = 40^0$ wird mit 26,8 m gewertet; ein Wurf von 50 m und $\varphi = 40^0$ mit 38,3 m. „Derselbe Fehler" (die gleiche Abweichung φ) wird in dem einen Fall mit einem Abzug von rund 8 m, im andern Fall mit 12 m „geahndet". Diese Überlegung veranlaßte meine Schüler zur Aufstellung folgender „theoretischen" Wertungsfunktion. (e ist zunächst nicht berücksichtigt.)

Marklinie und Zielrichtung bilden die Achsen eines rechtwinkligen Koordinatensystems. N wird zu O. Der Aufschlagpunkt A hat dann die Koordinaten x und y, die leicht gemessen werden können.[1]) Wir setzen als Wertungsfunktion an

$$\bar{g} = w - f \cdot \varphi,$$

wo f ein willkürlicher Faktor ist.

Nun wird $$w = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{x}{y}.$$

also $$\varphi = \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{y}.$$

Mithin erhalten wir $$\bar{g} = \sqrt{x^2 + y^2} - f \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{y}.\text{[2])} \qquad (3)$$

Diese Wertungsfunktion erfordert allerdings zwei Messungen. Der weitere Nachteil, daß zudem noch Umrechnungen nötig sind, fällt weniger ins Gewicht, da ja bei der D. T. meist auch eine Umrechnung in „Punkte" erfolgt. (Tabellen.) Der Vorteil der Wertungsfunktion ist natürlich der, daß man durch Wahl von f den Einfluß der Abweichung ganz in der Hand hat. Je größer f, um so stärker wird die Abweichung berücksichtigt. Natürlich kann auch f gleich einer Funktion von w gesetzt werden. Der Berücksichtigung von e entspricht eine Parallelverschiebung der x-Achse um e.

II. Bestimmung der maximalen Wurfweite.

1. S Standpunkt des Werfenden; A Aufschlagstelle der Kugel; H Ort, wo die Kugel die Hand des Werfenden verläßt; F Projektion von H auf die Horizontalebene. Es sei $SF = a$, $HF = h$ = Abwurfhöhe.

---

1) Der 3. und 4. Quadrant haben hier keine praktische Bedeutung; für den 2. Quadranten zählt man φ und entsprechend x zweckmäßig positiv.

2) Nebenbemerkung: In der Folgezeit benutzte ich dann diese „Wertungsfunktion" und außerdem die „Fahrradaufgabe" zur Einführung in die arc-Funktionen. Die mathematischen Aufgabensammlungen enthalten wenig „praktische" Aufgaben für die Kreisfunktionen. Vgl. auch die „merkwürdige" Funktion

$$y = \operatorname{arc\,cos} \sqrt{\frac{x+4}{x+8}} \quad \text{(s. u. Nr. 8).}$$

Fahrradaufgabe: Miß die Radien der beiden Kettenräder eines Fahrrades und ihren Zentralabstand und bestimme die Länge der Kette."

Es war $SA = w$ (s. o.). Es wird, wenn wir H zum Koordinatenanfangspunkt machen und die x-Achse parallel zur Horizontalebene legen

$$w = a + x. \tag{4}$$

Nehmen wir der Einfachheit halber zunächst a als konstant an (vgl. u. Nr. 6), so wird mit x auch w wachsen.

Stoßen oder werfen wir unter dem Winkel α mit der Anfangsgeschwindigkeit v, so werden die Koordinaten der Kugel (Schwerpunkt) zur Zeit t

$$x = (v \cdot \cos \alpha)\, t$$
$$y = (v \cdot \sin \alpha)\, t - \tfrac{1}{2} g t^2.$$

Hieraus folgt

$$y = x \cdot \operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{2} \cdot \frac{x^2}{v^2 \cos^2 \alpha}.$$

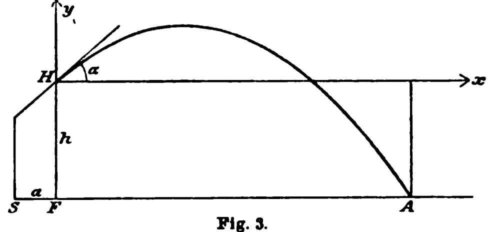


Fig. 3.

Für den Punkt A wird $y = -h$. Zur Bestimmung des x von A erhält man also

$$-h = x \cdot \operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{2} \cdot \frac{x^2}{v^2 \cos^2 \alpha}$$

oder

$$x = \frac{v^2}{2g}\left[\sin 2\alpha + \sqrt{\sin^2 2\alpha + \frac{8hg}{v^2} \cos^2 \alpha}\right], \tag{5a}$$

$$x = F(v, \alpha, h, g). \tag{5b}$$

2. Wann wird x ein Maximum?

Für einen bestimmten Ort, für einen bestimmten Werfer und eine bestimmte Wurfart[1]) können wir g, v und h als konstant voraussetzen. Unsere Frage heißt dann: Für welchen Winkel α wird

$$x = \frac{v^2}{2g}\left[\sin 2\alpha + \sqrt{\sin^2 2\alpha + K \cos^2 \alpha}\right]$$

ein Maximum, wenn $\frac{8hg}{v^2} = K$ gesetzt ist?

(Wir erkennen übrigens, daß für $h = 0$, $K = 0$ und $x = \frac{v^2}{g} \sin 2\alpha$ die übliche Wurfweite ist, die für $\alpha = 45^0$ maximal zu $x = \frac{v^2}{g}$ wird.)

Vom konstanten Faktor $\frac{v^2}{2g}$ abgesehen, wird

$$f(\alpha) = \sin 2\alpha + \sqrt{\sin^2 2\alpha + K \cos^2 \alpha} \tag{6}$$

und

$$f'(\alpha) = 2 \cos 2\alpha + \frac{4 \sin 2\alpha \cdot \cos 2\alpha - K \sin 2\alpha}{2\sqrt{\sin^2 2\alpha + K \cos^2 \alpha}}. \tag{7}$$

$f'(\alpha) = 0$ liefert die Gleichung

$$16 \cos^2 2\alpha \, (\sin^2 2\alpha + K \cos^2 \alpha) = \sin^2 2\alpha \, (K - 4 \cos 2\alpha)^2.$$

1) Zu „Ort“ (vgl. Nr. 8). h und v sind für die einzelnen Wurfarten und die einzelnen Werfer verschieden. Für die Stoßübungen (Kugel, Stein) ist nach Schülerversuchen zu setzen $h = K_e$ bis $^6/_5\, K_e$, wenn K_e die Körpergröße ist.

Dividiert man durch $4\cos^2\alpha$ und setzt man

$$\cos^2\alpha = Z, \quad \text{also} \quad \sin^2\alpha = 1 - Z,$$

so erhält man schließlich

$$K^2Z + 8KZ = K^2 + 4K.$$

oder

$$Z = \frac{K+4}{K+8},$$

d. h.

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{K+4}{K+8}}; \quad \alpha = \operatorname{arc}\cos\sqrt{\frac{K+4}{K+8}}. \tag{8}$$

Natürlich wird wieder bei der üblichen Betrachtungsweise ($h = 0$ oder v sehr groß) auch $K = 0$, $\cos\alpha = \sqrt{\frac{4}{8}}$, $\alpha = 45^0$.

Für unsere Wurfübungen gilt aber nicht $h = 0$. Wir sehen vielmehr *„die maximale Wurfweite wird erreicht für einen Winkel α, der bestimmt wird durch*

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{K+4}{K+8}}, \quad \textit{wobei} \quad K = \frac{8 \cdot hg}{v^2} \quad \textit{ist}. \tag{9}$$

3. Da K stets positiv sein muß, so erhalten wir für $K = 0$ den kleinsten Wert im Radikanden (8) und mithin den größten Wert von α. Der Winkel α muß demnach *stets kleiner als 45⁰* sein.

Aus (7) folgt

$$f''(\alpha) = -4\sin 2\alpha + \frac{4\cos 4\alpha - K\cos 2\alpha}{\sqrt{\sin^2 2\alpha + K\cos^2\alpha}} - \frac{\left(\sin 4\alpha - \frac{K}{2}\sin 2\alpha\right)^2}{\sqrt{(\sin^2 2\alpha + K\cos^2\alpha)^3}}.$$

Man erkennt leicht, daß, da $\alpha < 45^0$, $K > 0$ [$\sin 2\alpha > 0$, $\cos 2\alpha > 0$, $\cos 4\alpha < 0$] sein muß, die drei Summanden (jeder für sich) negativ werden, d. h. wir haben es tatsächlich mit einem Maximum zu tun.

4. Nun wird aber K um so größer, je größer h und je kleiner v wird. $\cos\alpha$ wächst mit wachsendem K, α nimmt mit wachsendem K ab.

Um die *Grenzen von α*, die für die volkstümlichen Übungen in Frage kommen, zu bestimmen, betrachten wir die folgenden Würfe.

a) Einen mäßigen Steinstoß ($^1/_3$ Ztr.) eines großen Menschen mit der linken Hand (h groß[1]), v klein).

$$h = 2{,}20\text{ m}; \quad v = 5\text{ m/sec}; \quad K = 6{,}90224. \quad \alpha = \mathbf{31^0 12'}.$$

b) Einen vorzüglichen Schlagballweitschlag (h klein, v groß)

$$h = 1{,}00\text{ m}; \quad v = 40\text{ m/sec}; \quad K = 0{,}004905. \quad \alpha = \mathbf{44^0 49'}.$$

Als *Grenzen* der Abwurfwinkel für die maximalen Wurfweiten bei den volkstümlichen Würfen dürften etwa die Winkel *30⁰ und 45⁰* in Frage kommen.

5. *Mittleres Beispiel:*

Kugelstoß, der die Bedingung zur Erreichung des Deutschen Sportabzeichens erfüllt (8 m mit der 7,25 kg-Kugel).

$$h = 2{,}0\text{ m}; \quad v = 8\text{ m}; \quad K = 2{,}4525. \quad \alpha = \mathbf{38^0 13'}.$$

---

1) S. Fußnote zu 2. S. 5.

Die Wurfweite beträgt

$$\text{für } \alpha = 38^0 13' : x = 8{,}29 \text{ m}$$

$$\text{„} \quad \alpha = 45^0 \quad : x = 8{,}13 \text{ m.}$$

6. *Einfluß von a.*

a ist nicht konstant (s. o. Nr. 1), ist vielmehr von α abhängig. Sehen wir vom Vorneigen des Körpers ab, so können wir, wenn wir die „Wurfarmlänge" mit l bezeichnen, ansetzen

$$a = l \cdot \cos \alpha.$$

Beispiel: $l = 60$ cm.

$$\text{Für } \alpha = 38^0 13' \quad \text{wird} \quad a = 47 \text{ cm,}$$

$$\text{„} \quad \alpha = 45^0 \quad \text{„} \quad a = 42 \text{ cm.}$$

Der kleinere Abwurfwinkel ist also doppelt günstig.

7. Zur graphischen Behandlung empfiehlt sich die Untersuchung des *Vorteils der Körpergröße* beim Kugel- und Steinstoßen und Werfen. Man vergleiche dazu die Wurfweiten zweier Turner (mit großem Unterschied in h) unter sonst gleichen Umständen.

Beispiel: $v = 2\,\text{g} \sim 20\,\text{m}, \quad \alpha = 45^0.$

Es wird

$$x = 2g\left(1 + \sqrt{1 + \frac{h}{g}}\right).$$

$$h = 1{,}5 \text{ m} \quad \text{ergibt} \quad x = 40{,}69 \text{ m,}$$

$$h = 2{,}0 \text{ m} \quad \text{„} \quad x = 41{,}15 \text{ m.}$$

Man erkennt, daß die „Rekordleute" in den „Stoßübungen" durchweg „große Leute" sein werden.

8. Auch der *Einfluß von g* ist zu berücksichtigen.

Für das Beispiel in Nr. 7 erhält man für ($h = 2$ m)

$$g = 9{,}781 \text{ (Äquator)} \qquad x = 41{,}03 \text{ m}$$

$$g = 9{,}81 \text{ (mittl. Breite)} \qquad x = 41{,}15 \text{ m}$$

$$g = 9{,}832 \text{ (Pol)} \qquad x = 41{,}24 \text{ m.}$$

Es ist also nicht gleichgültig, an welchem Ort ein Rekord in einer Wurfleistung aufgestellt worden ist.

9. Wenn man schließlich noch auf den *Einfluß der Temperatur* (t) („Nur Messungen mit dem Stahlbandmaß sind zur Anerkennung von Höchstleistungen gültig") weiter auf den *des Bodens* (dieselbe Kugel hat in weicherem Boden eine größere Senktiefe (s) und damit eine kürzere gemessene Wurfweite) und endlich auf etwaige *Steigung des Geländes* (β) (Fallendes Gelände verlängert x, ansteigendes wirkt verkürzend), dann wird der Schüler erkennen, daß eine Weltrekordleistung von vielen Dingen abhängig ist, etwa

$$\bar{g} = F(\varphi, e, v, \alpha, a, g, h, t, s, \beta)$$

von vielen Zufälligkeiten, für die „der Rekordmann nichts kann". Dann wird der Schüler einem neuen *Weltrekord kritischer* gegenüberstehen und nicht jede cm-Mehrleistung bejubeln.

Weiter ist darauf hinzuweisen, daß auch unser mathematischer Lösungsversuch des Wurfproblems nur eine Näherungslösung darstellt mit mancherlei mathematischen Abstraktionen (Kugel als Punkt, besser $w=f(\alpha)$ als $x=f(\alpha)$ usw.).

10. Zum Schluß sei noch einiges aus der *Sportliteratur zur Frage Wurf*, insbesondere zur maximalen Wurfweite, angegeben. a) In einem von Turnlehrern häufig benutzten Büchlein[1]) heißt es im Kapitel Kugelstoßen „Der rechte Unterarm bewege sich genau im Winkel von 45° voraufwärts" (entsprechend in allen Sportbüchlein). b) Im „Handbuch" von Gasch[2]) liest man: „Für die turnerischen Wurfarten haben die physikalischen Verhältnisse des Wurfes eine wesentlich geringere Bedeutung als für das Schießen mit Gewehren und Geschützen. Auch der viel empfohlene Winkel von 45°, unter dem ein Stein oder Ball geworfen werden soll, ist nur für den luftleeren Raum berechnet." Man möchte fast sagen, gerade das Gegenteil ist richtig. Übrigens bleibt die Bedingung, daß die größte Schußweite bei einem Elevationswinkel von 45° erreicht wird, selbst bei Artilleriegeschossen nahezu bestehen.[3]) Der Einfluß des Luftwiderstandes äußert sich wesentlich in einer Verkürzung und Versteilung der Geschoßbahn, was graphisch auch leicht zu zeigen ist.[4]) c) In den „Grundlagen der Leibesübungen"[5]) heißt es beim Steinstoß, „Somit würden wir unter einem Abwurfwinkel von 45° die größte Wurfweite erzielen. Nach meinen Erfahrungen können wir aber bei diesem Winkel unsere Kraft nicht vollständig ausnutzen und erhalten vielmehr bei einem Winkel von 30° bis 40° die größte Wurfweite." Für das Stoßen des $^1/_3$ Ztr. Steins stimmen aber diese Winkel nahezu mit den oben gefundenen überein.

Das „Auffinden" physikalischer Gesetze im Unterricht.

Von K. Grünholz in Würzburg a. M.

I.

„Die Physik als Unterrichtsgegenstand ist so zu betreiben, daß sie als Vorbild für die Art, wie überhaupt im Bereiche der Erfahrungswissenschaften Erkenntnis gewonnen wird, dienen kann." Diese Erkenntnisgewinnung besteht bei einer exakten Naturwissenschaft vor allem darin, daß die Fülle der Erscheinungen in Gesetzen zusammengefaßt wird. Die tätige Teilnahme der Schüler an der Aufstellung physikalischer Gesetze setzt aber die Kenntnis der beiden einfachsten Zusammenhänge zweier Größenreihen voraus, die wir als gerades und umgekehrtes Verhältnis bezeichnen. Diese Kenntnis kann die Physik nicht selbst vermitteln, weil ihre einfachen Beispiele nicht reichlich genug sind und zeitlich zu weit auseinander liegen. Die Behandlung im mathematischen Unterricht bietet auch den Vorteil, daß dem Schüler die „glatte" Kurve als Vorbild gegeben wird und sich dann in der Physik das Bedürfnis

1) Loges, Volkstümliche Übungen. S. 89. Leipzig 1926, B. G. Teubner.
2) Prof. Dr. Gasch, Handbuch des gesamten Turnwesens. S. 880. Wien-Leipzig, Pichlers Witwe.
3) Vgl. Eckhardt, a. a. O., S. 312.
4) Vgl. Donle, a. a. O., S. 522/523.
5) Dr. B. Mahler, Grundlagen der Leibesübungen. S. 99. Leipzig 1920, Thomas. Vgl. auch die Besprechung dieses Buches in dieser Zeitschrift Jahrg. 52 (1921), S. 91.

einstellt, Interpolationskurven zu zeichnen. Rudert[1]) verlegt die Übermittelung der Kenntnis der „elementaren Funktionen“ in den elementaren Rechenunterricht. Geschieht dies dort nicht, so kann der algebraische Anfangsunterricht es nachholen. Wir denken an folgende Beispiele:

1. Gruppe: Das gerade Verhältnis.

α) Der tägliche Zinsfuß beträgt $^1/_{25}$ %. Wie berechnet man praktisch den täglichen Zins, wenn mehrere Kapitalien in Betracht kommen?

β) Wie rechnet man praktisch die Gradangaben eines R.-Thermometers in solche eines C.-Thermometers um?

γ) Bei der Bewegung eines Körpers ist der zurückgelegte Wert (s) von der Zeit (t) abhängig. Der einfachste Fall liegt vor, wenn der zurückgelegte Weg mit der dazu nötigen Zeit verhältig ist. Untersuche diese „gleichförmige“ Bewegung an Wertetafel, Schaubild und Formel.

δ) Man nennt das Gewicht der Raumeinheit eines Stoffes seine Dichte (s). Untersuche den Zusammenhang zwischen dem Gewicht (G) und dem Rauminhalt (V) an Wertetafel, Schaubild und Formel.

ε) Ermittle den Zusammenhang zwischen dem Umfang und dem Durchmesser eines Kreises. (Schneide Kreise von 3, 4, 5, ..., 20 cm Durchmesser aus und bestimme den Umfang mit einem Faden oder durch Abrollen auf einer Geraden.)

ζ) (Als Gegenbeispiel zu den bisherigen.) Untersuche den Zusammenhang zwischen dem Halbmesser und der Fläche eines Kreises. (Schneide aus einem Bogen Zeichenpapier einen Kreis vom Halbmesser r cm [Fläche x qcm] und ein Quadrat mit der Seite 10 cm [Fläche 100 qcm] und wäge beide [$m_1 g$ bzw. $m_2 g$]. Dann gilt $\frac{m_1}{x} = \frac{m_2}{100}$ = Gew. eines qcm.)

Das Ziel bei der Bearbeitung dieser Beispiele ist die Erkenntnis: Es sind folgende Aussagen gleichwertig:

1. Eine Größe (y) ist verhältig zu einer andern (x);
2. zwischen zwei Größen y und x besteht die Gleichung $\frac{y}{x} = k$ oder $y = kx$;
3. das Bild des Zusammenhangs zweier Zahlenreihen ist eine Gerade durch den Nullpunkt;
4. nimmt man von einer Größe (x) das 2-, 3-, 4-, ..., n-fache ihres Anfangswertes (a), so ergibt sich für die abhängige Größe (y) das 2-, 3-, 4-, ..., n-fache ihres Anfangswertes (b).

2. Gruppe: Das umgekehrte Verhältnis.

α) Ein Rechteck hat 6 qcm Flächeninhalt. Untersuche den Zusammenhang zwischen den möglichen Seiten.

β) Eine Rennbahn von 5 km Länge wird mit gleichförmiger Bewegung in verschiedenen Zeiten durchlaufen, je nach der eingeschlagenen Geschwindigkeit. Untersuche den Zusammenhang.

γ) Mit derselben Höhe lassen sich unendlich viele rechtwinklige Dreiecke zeichnen. Ermittle durch Zeichnung und Messung zusammengehörige Hypotenusenabschnitte dieser Dreiecke und suche ihren Zusammenhang.

---

1) Rudert, Die Grundlagen des funktionalen Denkens in ihrer Bedeutung für den ersten mathematischen Unterricht. Berlin, O. Salle.

δ) Jemand möchte 300 *RM* jährlichen Zins. Zeige, wie sich das dazu nötige Kapital mit dem Zinsfuß ändert.

ε) (Als Gegenbeispiel zu den bisherigen.) Ein zylindrisches Gefäß soll 1 cdm Rauminhalt bekommen. Untersuche die Beziehung zwischen dem Halbmesser der Grundfläche und der Höhe.

Das Ziel bei der Bearbeitung dieser Beispiele ist die Erkenntnis: Es sind folgende Aussagen gleichwertig:

1. Zwei Größen x und y sind umgekehrt verhältig;
2. zwischen den Größen y und x besteht die Beziehung $x \cdot y = k$;
3. wird eine Größe (x) 2, 3, 4, ..., n mal so groß als ihr Anfangswert (a), so wird die abhängige Größe (y) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}$ mal so groß als ihr Anfangswert (b);
4. das Bild der Beziehung zwischen den Größen x und y ist eine gleichseitige Hyperbel.

II.

Erst nach dieser Vorbereitung ist es dem Schüler möglich, zu den Zahlenreihen seiner Schülerversuche selbst die Formel zu finden, wenigstens in den einfachsten Fällen. Er versteht auch das Bestreben, die Zahlenreihe der unabhängigen Veränderlichen möglichst einfach zu wählen. Hierher gehören folgende Beispiele:

α) Wie hängt die Biegung einer Stahlnadel von der sie bewirkenden Kraft ab?

β) Wie hängt die Reibung bei der Fortbewegung auf wagrechter Bahn vom Druck ab?

γ) Wie hängt der Hangabtrieb bei der schiefen Ebene von der Last ab?

δ) An einem gleicharmigen Hebel hängt links in der Entfernung a cm vom Drehpunkt die Last mg. Der Hebel läßt sich durch verschieden große Kräfte ins Gleichgewicht bringen, je nach dem Hebelarm, den man benützt. Welcher Zusammenhang besteht zwischen Kraft und Hebelarm?

ε) Wie hängen Gasdruck und Gasvolumen bei derselben Temperatur zusammen?

ζ) Man erhitzt 500 (1000, 1500, 2000) g Wasser mit derselben Flamme 2 Minuten lang und bestimmt die Temperaturerhöhung. Welcher Zusammenhang ergibt sich?

η) Bestimme den Zusammenhang zwischen der Länge und der Schwingungsdauer des mathematischen Pendels.

Wie hängt die abstoßende Kraft zweier Magnetpole von deren Entfernung ab?

ι) Welcher Zusammenhang besteht zwischen dem in Ω gemessenen Widerstand und der Stromstärke, die ein (oder mehrere) Bleisammler durch den Widerstand schickt?

III.

Schwieriger sind die Fälle, bei denen die beiden Zahlenreihen erst nach einer Verlegung des Anfangspunkts der Zählung (Vermehrung oder Verminderung der einen Zahlenreihe oder der beiden um dieselbe Konstante) zum geraden oder umgekehrten Verhältnis führt. Hier wird der Schüler der Leitung des Lehrers nicht entbehren können.

α) Läßt man an der Federwage zu den aufgelegten Gewichten den Stand des Zeigers ablesen, so lasse man einmal die Zwischenfrage nach den Verlänge-

rungen, welche zu den einzelnen Gewichten gehören, weg und frage nach dem Zusammenhang der beiden Versuchszahlenreihen. Das Schaubild ist zwar eine Gerade, doch geht sie nicht durch den Anfangspunkt. Nun erst lasse man die Frage folgen, wie die eine Achse verschoben werden muß, damit das Bild des geraden Verhältnisses vorliegt? (Zwei Möglichkeiten!)

β) Beim Studium der Gasausdehnung bei konstantem Druck (Apparat siehe Z ph ch U., 1925, S. 301) verschafft man sich zu verschiedenen Temperaturstufen (t) die entsprechenden Gasvolumen (V). Zeichnet man das Schaubild der Volumenänderung, so erhält man eine Gerade, die nicht durch den Anfangspunkt geht. Man kann nun wieder fragen, wie die eine Achse verschoben werden muß, damit das Bild des geraden Verhältnisses vorliegt und kommt zu den beiden Formen des Gay-Lussacschen Gesetzes: $\frac{V - V_0}{t} = k$ und $\frac{V}{t + t_0} = k$.

γ) Bei der Ermittelung des Mariotteschen Gesetzes wird gern der Luftdruck (b) vom Schüler weggelassen und als Druck nur der Quecksilberdruck q genommen. Man frage in diesem Falle einmal nach dem Zusammenhange zwischen q und V. Man erhält als Bild des Zusammenhangs auch eine gleichseitige Hyperbel, doch hat sie eine andere Lage zur v-Achse. Es entsteht die Frage, wie weit man die v-Achse parallel verschieben muß, damit das Bild des umgekehrten Verhältnisses sich ergibt.

($(q_1 + x) \cdot v_1 = (q_2 + x) \cdot v_2 = (q_3 + x) \cdot v_3 \ldots = y$; graphische Lösung!)

Nun erst folgt die Frage nach der Bedeutung des x.

δ) Beim Studium des Zusammenhangs zwischen Stromstärke und Widerstand benützt man zuerst Bleisammler und erhält das Gesetz: $W \cdot J =$ konst., wobei W der äußere Widerstand ist. (Vom innern Widerstand eines Elements war noch nicht die Rede; er kommt im vorliegenden Falle nicht in Betracht. Daß Flüssigkeiten einen Widerstand haben, ist bekannt.) Nehmen wir nun ein Daniellelement und verschaffen uns zusammengehörige Werte von W und J, so ist das Produkt $J \cdot W$ nicht mehr konstant. Das Bild des Zusammenhangs ist aber wieder eine gleichseitige Hyperbel. Um zum Fall des umgekehrten Verhältnisses zu kommen, muß die J-Achse um x Einheiten parallel verschoben werden, bis:

$$(W_1 + x) J_1 = (W_2 + x) \cdot J_2 = (W_3 + x) \cdot J_3 = \cdots = y$$

(Graphische Lösung!). Die Frage nach der Bedeutung von x führt zum Ohmschen Gesetz für den geschlossenen Stromkreis: $(W_a + W_i) \cdot J = E$.

ε) In diese Reihe gehört auch die experimentelle Aufstellung der Linsengleichung. Der Schüler kennt schon von außerhalb des Unterrichts her die Verwendung der Sammellinse als Lupe und als Brennglas. Wir geben ihm eine Linse und lassen ihn beobachten. Er wird bald festgestellt haben, daß von einer bestimmten Gegenstandsentfernung ab kein Scheinbild mehr entsteht. Diese kritische Entfernung (f) wird gemessen. In der gemeinsamen Beratung steigt die Vermutung auf, daß die Linse reelle Bilder gibt für $a > f$; diese werden nach einigem Suchen auch gefunden. Nun wird nach dem Zusammenhang zwischen Gegenstandsweite (a) und Bildweite (b) ge-

fragt. Man verschafft sich eine Reihe von Wertepaaren a, b und zeichnet das Schaubild. Es ist eine gleichseitige Hyperbel, die zur Halbierungslinie des 1. Quadranten symmetrisch ist. Da aber das Produkt $a \cdot b$ nicht konstant ist, so entsteht die Frage, ob wir die Entfernungen vielleicht von anderen Punkten aus messen, also beide Achsen verlegen müssen. Sicher ist, daß dann beide Achsen um dasselbe Stück (x) verschoben werden müssen. x folgt aus der Bedingung:

$$(a_1 - x)(b_1 - x) = (a_2 - x) \cdot (b_2 - x) = (a_3 - x)(b_3 - x) \cdots = y.$$

Das berechnete x ist jenes $a = f$, welches die Grenze der reellen Bilder angibt; die Konstante $y = x^2$. Bestimmt man in der folgenden Stunde auch noch den Brennpunkt und die Brennweite der Linse, so wird $x = f$ als solche erkannt, und es ist:

$$(a - f)(b - f) = f^2 \quad \text{(Linsengleichung).}$$

(Als flächenhaftes Objekt hat sich bei diesen Messungen ein Schirm aus Zeichenpapier gut bewährt, auf welchen mit roter Tusche ein quadratisches Netz gezeichnet ist. Dieses Netz wird mit einer 2-Voltlampe beleuchtet und läßt auch die Größenmessungen, die zur Formel $\frac{G}{g} = \frac{a}{b}$ führen, leicht und sicher ausführen.)

IV.

Es fehlen noch die Gesetze, in denen mehr als zwei Größen auftreten. Hier hat man schon öfters den Versuch gemacht, die ganze Ableitung in einer Tabelle zusammenzufassen. Wir halten dies nicht für gut. Der Schüler wird nie von selbst eine solche Tabelle aufbauen können; er wird aber auch sehr schwer aus einer fertigen Tabelle den Gedankengang wieder herausfinden. Die folgenden drei Beispiele zeigen einen andern Weg. Die dabei benützten Zahlen sind dem Unterricht entnommen.

α) Wie hängt die bei der Elektrolyse abgeschiedene Stoffmenge (M) von der Stromstärke (J) und der Zeit (t) ab?
Diese Frage untersuchen wir an der Menge des im Wasserzersetzungsapparat abgeschiedenen Wasserstoffs.

a) $J = 0{,}5$ Amp.

t	2	4	6	Min.
M	8,0	16,2	23,0	ccm
$\left(\frac{M}{t}\right)$	4,0	4,1	3,8	$\frac{\text{ccm}}{\text{Min.}}$

b) $J = 1{,}0$ Amp.

t	1,5	3	4,5	Min.
M	11,4	23,4	35,2	ccm
$\left(\frac{M}{t}\right)$	7,6	7,8	7,8	$\frac{\text{ccm}}{\text{Min.}}$



c) $J = 1{,}5$ Amp.

t	1	2	3	Min.
M	11,6	23,4	35,2	ccm
$\left(\frac{M}{t}\right)$	11,6	11,7	11,7	$\frac{\text{ccm}}{\text{Min.}}$

1. **Ergebnis:** Bei derselben Stromstärke ist die abgeschiedene Stoffmenge der Zeit verhältnisgleich.

Die Abhängigkeit der in der Zeiteinheit abgeschiedenen Stoffmenge $\left(\frac{M}{t}\right)$ von der Stromstärke (J) folgt aus der Zusammenstellung obiger Ergebnisse:

J	0,5	1,0	1,5	Amp.
$\left(\frac{M}{t}\right)$	4,0	7,7	11,7	$\frac{\text{ccm}}{\text{Min.}}$
$\left(\frac{M}{t}\right) : J$	8,0	7,7	7,8	$\frac{\text{ccm}}{\text{Min.}\cdot\text{Amp.}}$

2. **Ergebnis:** Die in der Zeiteinheit abgeschiedene Stoffmenge ist der Stromstärke verhältnisgleich.

Es ist also $\frac{M}{t \cdot J} = m$ oder $M = m \cdot J \cdot t$ (1. Faradaysches Gesetz).

β) Es wird die Ansicht vertreten, das Ohmsche Gesetz eigne sich nicht für die Auffindung durch Schülerversuche, weil „die gedankliche Intuition der experimentellen Festlegung vorausging“ (Poske, Didaktik, S. 62). Dies trifft aber gar nicht zu. (Vgl. S. VII der gesammelten Abhandlungen von G. S. Ohm, J. A. Barth, Leipzig, 1892.) Übrigens käme auch noch dazu, daß wir bei der Benützung unserer Meßapparate und Stromquellen nur einen Bruchteil der Schwierigkeiten zu überwinden haben, denen Ohm gegenüberstand. Wir benützen zur experimentellen Herleitung des Ohmschen Gesetzes und der Widerstandsformel das Verfahren des mehrseitigen Angriffs. In einem Vorversuch ist festgestellt worden, daß die Stromstärke sich mit der Länge des Konstantanverbindungsdrahts merklich ändert, daß aber die gewöhnlichen Kupferdrähte und das Amperemeter keine merkliche Änderung ergeben. Gefragt wird, wie die Länge des Konstantandrahts und die sich ergebende Stromstärke voneinander abhängen. Dabei arbeiten die 9 Gruppen mit verschiedenen Drahtquerschnitten und verschiedenen elektromotorischen Kräften:

Gruppe Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
Bleisammler; E. M. K.	2	2	2	4	4	4	6	6	6	Volt
Konstantandraht; Querschnitt	1·0,071	2·0,071	3·0,071	1 0,071	2·0,071	3·0,071	1·0,071	2·0,071	3·0,071	qmm

Die Versuchsanordnung ist zu Beginn der Übung aufgebaut. Die Ausführung nimmt kaum 25 Min. in Anspruch, so daß die einzelnen Gruppen gegenseitig den Platz tauschen und sich kontrollieren können. Jede Gruppe findet als

1. **Ergebnis:** Ändert man Spannung und Querschnitt nicht, so sind die Stromstärke (J) und die Drahtlänge (l) umgekehrt verhältnisgleich ($J \cdot l$ = const.).
Im Unterricht stellen wir die Ergebnisse der 9 Gruppen zusammen.
a) Gruppe 1, 4 und 7 hatten $q = 0{,}071$ qmm Drahtquerschnitt gemeinsam und:

E	2	4	6	Volt
$J \cdot l$	0,30	0,61	0,93	Amp. · m
$E:(J \cdot l)$	6,7	6,6	6,5	Volt: (Amp. · m)

b) Gruppe 2, 5 und 8 hatten $q = 2 \cdot 0{,}071$ qmm Drahtquerschnitt gemeinsam und:

E	2	4	6	Volt
$J \cdot l$	0,62	1,38	1,92	Amp. · m
$E:(J \cdot l)$	3,2	3,0	3,1	Volt: (Amp. · m)

c) Gruppe 3, 6 und 9 hatten $q = 3 \cdot 0{,}071$ qmm Drahtquerschnitt gemeinsam und:

E	2	4	6	Volt
$J \cdot l$	0,94	1,93	2,91	Amp. · m
$E:(J \cdot l)$	2,1	2,1	2,1	Volt: (Amp. · m)

2. **Ergebnis:** Bei demselben Drahtquerschnitt ist das Produkt $J \cdot l$ der angelegten Spannung verhältnisgleich.
Die Abhängigkeit des Quotienten $\frac{E}{J \cdot l}$ vom Drahtquerschnitt ergibt die Zusammenstellung der Ergebnisse a), b), c):

q	0,071	$2 \cdot 0{,}071$	$3 \cdot 0{,}071$	qmm
$\frac{E}{J \cdot l}$	6,6	3,1	2,1	$\frac{\text{Volt}}{\text{Amp.} \cdot \text{m}}$
$\frac{E}{J \cdot l} \cdot q$	0,47	0,44	0,45	$\frac{\text{Volt}}{\text{Amp.} \cdot \text{m}} \cdot \text{qmm}$

3. **Ergebnis:** Der Quotient $\frac{E}{J \cdot l}$ und der Drahtquerschnitt q sind umgekehrt verhältnisgleich. Es gilt also für alle Fälle: $\frac{E}{J \cdot l} \cdot q = k$; $J = \frac{E}{k \cdot \frac{l}{q}}$.

Wir wiederholen den Versuch mit dünnem Eisen- und Messingdraht und finden k abhängig vom Material.
Der Nenner der obigen zweiten Formel enthält nur Größen, die sich auf

den Draht beziehen. Wir bezeichnen ihn als den Drahtwiderstand W und nennen seine Einheit Ohm (Ω). Dann haben wir die beiden Formeln:

I. $W = k \cdot \frac{l}{q}$ (Widerstandsformel); II. $J = \frac{E}{W}$ (Ohmsches Gesetz).

Auf Grund der Formel I. können wir uns aus Konstantandraht Widerstandsspulen von 1, 2, 3 ... Ω herstellen. Dann prüfen wir noch einmal die Formel II. (Vgl. II, ι und III, δ.)

γ) Um die Wärmewirkungen des elektrischen Stromes zu studieren, benützen wir Apparate mit 2 Konstantanspiralen von je 5 Ω. Schalten wir beide parallel, so haben wir 2,5 Ω; schalten wir beide hintereinander, so haben wir 10 Ω Heizwiderstand. Wir benützen wieder das Verfahren des mehrseitigen Angriffs.

a) Die Gruppen 1, 2 und 3 haben 2,5 Ω in 300 g Petroleum;
b) die Gruppen 4, 5 und 6 haben 5 Ω in 300 g Petroleum;
c) die Gruppen 7, 8 und 9 haben 10 Ω in 300 g Petroleum.

Jede Gruppe beobachtet die Abhängigkeit der entwickelten Wärmemenge von der Zeit bei den Stromstärken 1; 1,5 und 2 Amp.

Beispiel: 1. Gruppe.

1. $J = 1$ Amp. $W = 2,5\ \Omega$

Zeit t	0	60	120	180	Sek.
Temperatur θ	19,20	19,47	19,75	20,0	Grad
Temp.-Zunahme $\theta - \theta_0$	—	0,27	0,55	0,8	Grad
Wärmemenge Q $Q = 300 \cdot 0,51 \cdot (\theta - \vartheta_0)$	—	42,0	84,2	122,5	kal.
$\frac{Q}{t}$	—	0,70	0,70	0,68	$\frac{\text{kal.}}{\text{Sek.}}$

2. $J = 1,5$ Amp.; $W = 2,5\ \Omega$. 3. $J = 2,0$ Amp.; $W = 2,5\ \Omega$.

1. Ergebnis: Die von einem Strom bestimmter Stärke in einem bestimmten Widerstand entwickelte Wärmemenge ist der Zeit verhältnisgleich.

Die Abhängigkeit der in der Zeiteinheit entwickelten Wärmemenge von der Stromstärke folgt aus den Ergebnissen der 3 Versuche:

$W = 2,5\ \Omega$

J	1,0	1,5	2,0	Amp.
$\frac{Q}{t}$	0,69	1,43	2,74	$\frac{\text{kal.}}{\text{Sek.}}$
$\left(\frac{Q}{t}\right) : J^2$	0,69	0,64	0,69	$\frac{\text{kal.}}{\text{Sek.}}$: Amp.^{2}

2. Ergebnis: Die sekundlich in einem bestimmten Widerstand entwickelte Wärmemenge $\left(\frac{Q}{t}\right)$ ist dem Quadrat der Stromstärke verhältnisgleich.

Die Abhängigkeit des Quotienten $\frac{Q}{t \cdot J^2}$ vom Widerstand folgt aus der Zusammenstellung der Ergebnisse der verschiedenen Gruppen:

W	2,50	2,55	2,45	5,10	5,00	4,94	10,2	10,1	Ω
$\frac{Q}{t \cdot J^2}$	0,67	0,55	0,55	1,21	1,21	1,21	2,67	2,83	$\frac{\text{kal.}}{\text{Sek.} \cdot \text{Amp.}^2}$
$\frac{Q}{t \cdot J^2} : W$	0,27	0,22	0,22	0,24	0,24	0,25	0,26	0,28	$\frac{\text{kal.}}{\text{Sek.} \cdot \text{Amp.}^2 \cdot \Omega}$

3. Ergebnis: Die von 1 Amp. in 1 Sek. entwickelte Wärmemenge $\left(\frac{Q}{J^2 \cdot t}\right)$ ist dem Heizwiderstand verhältnisgleich. Es ist also:

$$\frac{Q}{t \cdot J^2 \cdot W} = 0{,}24; \qquad Q = 0{,}24 \cdot J^2 \cdot W \cdot t \text{ (kal.)} \qquad \text{(Joulesches Gesetz).}$$

Das Deutsche Museum in München als Ziel von Schülerfahrten.

Von H. Weinreich in Göttingen.

Zwei Sommer sind seit jenem 7. Mai 1925 verflossen, an welchem das 1903 durch Oskar von Miller ins Leben gerufenene „Deutsche Museum von Meisterwerken der Naturwissenschaft und Technik" — zugleich mit dem Bezug seines neuen stattlichen Heimes auf der sog. Kohleninsel (jetzt Museumsinsel) in der Münchener Isar — seine Wiedereröffnung festlich begehen konnte.

Die stattliche Anzahl von nahezu zwei Millionen Besuchern, die in dieser kurzen Spanne von anderthalb Jahren verzeichnet wurde, darf man nur neben die andere Zahl 16 km stellen, welche die Gesamtweglänge durch sämtliche Ausstellungsräume mißt, um innezuwerden, welche gewaltige Schöpfung die zähe Beharrlichkeit und organisatorische Kraft des nunmehr über 70jährigen Begründers mit dem Museum in seiner jetzigen Gestalt dem deutschen Volke übergeben hat.

Die wahre Bedeutung freilich dieses Zeughauses für den Kampf und Sieg des Menschen gegen die rohen Gewalten der Natur kann niemals durch noch so große Zahlen gekennzeichnet werden.

Das Deutsche Museum ist eine Weihestätte menschlicher Arbeit und menschlichen Erfindungssinnes geworden und hat als solche eine hohe Erziehungs- und Bildungsaufgabe am deutschen Volke übernommen. Freilich wird, wie wir wissen, in manchen Kreisen dieser Beruf unverstanden bleiben. Angesichts dieser skeptischen Einstellung gegenüber dem Bildungswert der Naturwissenschaften und der wohl gar ablehnenden Haltung gegenüber der Welt der Technik erwächst gerade uns Vertretern der exakten Fächer die Aufgabe, überall dort eine Verständigung anzustreben, wo uns solche Vorurteile entgegentreten.

Jedes Werk unserer hochentwickelten Technik erregt in jedem Menschen zwar Staunen; wo es aber bei diesem Staunen bleibt, wo es sich nicht in Ehrfurcht wandelt, in Ehrfurcht vor der Arbeit und Tatkraft, vor der Beharrlichkeit und Gewissenhaftigkeit jener großen Männer, die solche Leistungen hervorbrachten, da versperren von vornherein Verständnislosigkeit und Geringschätzung den geistigen Zugang in die Welt technischen und naturwissenschaftlichen Denkens und Schaffens. Zwar sind jene großen Männer, von deren Schaffen und

Wirken das Deutsche Museum so eindrucksvoll redet, von anderer Art wie unsere Denker und Dichter. Aber auch *sie* zählen zu den Großen unseres Volkes, und auch aus *ihren* Reihen sind dauernd Männer hervorgegangen, die zu den Besten der Nation gerechnet werden dürfen.

Das wird auch in Zukunft immer so bleiben, trotz der bekannten Wahrsagung, daß das mathematisch-naturwissenschaftliche Zeitalter erledigt sei und durch das historisch-philosophische abgelöst werden würde.

Diese Ansicht wird nicht selten mit einem frohlockenden Ton geäußert, und es wird dabei hinzugefügt, daß unsere in der Welt der Materie entartete und durch den Lauf der Dinge betrogene Kultur nunmehr Gott sei Dank im Begriff stehe, in ihre eigentliche Urheimat sich zurückzufinden: in das Reich des Geistes. Weite Kreise unseres Volkes, die zu den Gebildeten gerechnet werden, vertreten solchen Standpunkt. Und doch läuft es auf ein ungeheuerliches Vorurteil hinaus, wenn man etwa in dieser Weise den Wissenschaften von der Natur und der Technik die „reinen" Geisteswissenschaften gegenüberstellen will.

Nur gedankenlose Oberflächlichkeit kann darauf verfallen, den Ewigkeitswert der reinen Geisteswissenschaften, insbesondere auch der Philosophie anzuzweifeln. Wogegen man sich aber wenden muß, das ist die vielfach beliebte seichte Art, wie man mit dem bekannten Schlagwort vom „Nützlichkeitsstandpunkt" der Technik und ihren Hilfswissenschaften den Makel des Minderwertigen anzuheften versucht.

Gewiß, die Dinge, mit denen es der Naturwissenschaftler und der Ingenieur zu tun hat, bestehen aus echter, unverfälschter Materie. Zeppelins Luftschiff, mit welchem Eckener den Ozean der Lüfte durchquerte, war ganz gewiß kein reines Gedankending, sondern zum Glück von durchaus handfester stofflicher Zusammensetzung. Haben wir deswegen ein Recht, den Grafen Zeppelin und seine Mitarbeiter des Materialismus zu bezichtigen?

Sind es nicht vielmehr allesamt Helden der Arbeit, die wir als Überwinder der Materie verehren müssen? Ist nicht jedes Werk der Technik und jede naturwissenschaftliche Entdeckung ein Denkmal des Sieges des Menschengeistes über die widerstrebenden Kräfte der rohen Materie? Der Werdegang der Technik und der Naturwissenschaften ist nichts andres wie die Geschichte des Ringens und Kämpfens des Menschen um die Befreiung von den Kräften der Materie und um die Herrschaft über sie. Alles Ringen aber und Kämpfen verlangt mehr als bloßes Denken, es verlangt dazu — und das ist das Entscheidende — den Willen und die Tat.

Wenn wir ganz ehrlich sind, dann müssen wir wohl zugeben, daß in unserer heutigen Kultur in der allgemeinen Wertung das gesprochene, das geschriebene und das gedruckte Wort eine etwas überspannte Alleinherrschaft ausübt. Worte aber sind nichts ohne die Dinge, die mit ihnen bezeichnet werden: die Worte sind — wie sich der bekannte Münchner Pädagoge Georg Kerschensteiner ausdrückt — erst die *Schatten* der Dinge. Unsere bastelnden, für Technik und Naturwissenschaften begeisterten Jungen zeigen uns, daß jedenfalls *ihnen* die Schatten der Dinge nicht genügen, sondern daß sie zu den Dingen selbst kommen möchten.

Das Deutsche Museum ist ein Tempel, wo sie in Ehrfurcht zu den Dingen selbst Zutritt finden können! In immer steigender Zahl werden daher in Zukunft Schülerfahrten nach München führen, zumal ein Ministerialerlaß (UII,



Nr. 834 vom 8. Juli 1926) ausdrücklich für solche Studienreisen zur Besichtigung des Deutschen Museums Stimmung gemacht hat.

Wenn bei einem solchen Besuch in Bayerns Hauptstadt ein wahrer Erziehungs- und Bildungszweck erreicht werden soll, so ist dafür zunächst ausschlaggebend, daß diese Reise von den Schülern als wirkliche Wallfahrt zu einem Heiligtum der schaffenden Arbeit und des schöpferischen, die Materie überwindenden Denkens empfunden wird.

Dieses Ziel ist aber von vornherein stark gefährdet, wenn der Führer der Exkursion es an ihrer gründlichen Vorbereitung hat fehlen lassen. Ein Dreifaches kommt m. E. dabei in Frage:

Erstens muß der Lehrer einen festen Plan haben, der ihm gestattet, aus der Überfülle der im Deutschen Museum angehäuften Schätze eine Auswahl zu treffen, die zu wirklich eindrucksvoller Belehrung führt.

Zweitens muß er sich vorher über alle praktisch wichtigen Fragen der ganzen Reise zuverlässige Auskunft verschafft haben (Reisekosten, Unterbringung, Verpflegung, Zeiteinteilung usw.).

Drittens wird man den Münchner Aufenthalt nicht einseitig auf den Besuch des Museums einstellen, sondern von vornherein mit in das Programm aufnehmen, daß über München der Weg in eine hochentwickelte Kunst und in eine große Natur führt.

In all diesen Rücksichten können solche Kollegen, die zum erstenmal Schülerfahrten nach München vorzubereiten haben, vielleicht aus den Erfahrungen Nutzen ziehen, die der Verfasser im Verein mit einigen andern Göttinger Kollegen bei zwei je zehntägigen Reisen (Juli 1925 mit 12 Schülern, Juli 1926 mit 40 Schülern) sammeln durfte.

Zunächst ist für den Lehrer ein Überblick über den überwältigenden Reichtum des Deutschen Museums unerläßlich. Schon die Aufzählung aller vertretenen Gebiete ergibt eine stattliche Liste: Mathematik, Mechanik, Wärmelehre, Meteorologie, Elektrizität, Telegraphie und Telephonie, Optik und Akustik mit einer glänzenden Sammlung von Musikinstrumenten, Geologie, Berg- und Hüttenwesen, Metallbearbeitung, Maschinen- und Verkehrswesen, Schiffbau und Luftfahrt, Textilindustrie, Papierfabrikation, Druckerei, Landwirtschaft, Brauerei und Brennerei, Straßen-, Brücken-, Tunnel-, Wohnhaus- und Städtebau, Gas-, Wasser- und Elektrizitätsversorgung und endlich besonders zugkräftig ausgestaltet die Astronomie mit ihrem ptolemäischen und ihrem kopernikanischen Planetarium. Selbstverständlich muß die Vorbereitung des Lehrers, der seinen Schülern ein zuverlässiger Führer durch die endlose Folge der Ausstellungssäle sein will, auf die Einzelheiten der von seinem Besichtigungsplan bevorzugten Gebiete gehen. Was er hier benötigt, findet er recht zweckmäßig in einigen Büchern zusammengetragen, auf die hier die Aufmerksamkeit gelenkt werden mag. Es kommen besonders folgende in Betracht:

1. Die von Conrad Matschoß im Auftrage des Vereins deutscher Ingenieure bearbeitete Festschrift zur Einweihung des Museums: Das Deutsche Museum. Geschichte, Aufgaben, Ziele. VDI-Verlag, Berlin 1925. Großformat, 364 Seiten. Preis 18 *RM*.

2. Der von Dr.-Ing. Hans Goetz bearbeitete Führer: Rundgang durch das Deutsche Museum. Münchener Druck- und Verlagshaus 1925. 80 S. Preis 1.20 *RM*.

3. Der bei Knorr & Hirth in München herausgekommene sehr brauchbare amtliche Führer durch die Sammlungen des Deutschen Museums. 361 S. Preis 3 *RM*.

Das Studium dieser Bücher wird den Lehrer instandsetzen, beim Gang durch die einzelnen Abteilungen seinen Schülern eine eindringliche Belehrung über die Zusammenhänge des technischen und naturwissenschaftlichen Fortschritts mit der kulturgeschichtlichen Gesamtentwicklung zu vermitteln.

Ganz besonderes Interesse wird der Lehrer der exakten Fächer den pädagogischen Gesichtspunkten und didaktischen Wegen entgegenbringen, die im Museum befolgt werden, um *einmal* den Laien in die Welt technischen und naturwissenschaftlichen Denkens und Schaffens in überaus eindrucksvoller Weise einzuführen und darüber hinaus auch zum Fachmann zu reden und ihm die große Kulturaufgabe der Technik lebendig vor Augen zu führen.

Die Museumsdidaktik zeigt hier einige Besonderheiten, die z. T. vorbildlich für die Unterrichtskunst unserer Fächer wirken können. So ist z. B. der Darstellung des Entwicklungsgedankens überall bei der Aufstellung der Sammlungen besondere Sorgfalt gewidmet worden. Da findet man z. B. die vollständige, bis auf 1817 zurückreichende Reihe der Ahnen ausgestellt, als deren Abkömmling unser heutiges Fahrrad zu betrachten ist. Der geschichtliche Werdegang ist besonders dadurch sehr anziehend zur Geltung gebracht, daß eine stattliche Anzahl von Originalmaschinen und -apparaten in den Besitz des Museums gelangte. Da finden wir z. B. die berühmten Magdeburger Halbkugeln, ferner die Apparate, mit deren Hilfe ein Fraunhofer seine grundlegenden optischen Entdeckungen machte, und daneben aus neuester Zeit den Originalaufbau jener Versuchsanordnung, mit welcher einem Max v. Laue 1912 der Nachweis der Interferenz der Röntgenstrahlen gelang. Der erste Dieselmotor steht im Original da, und von der berühmten Lokomotive „Puffing Billy" ist eine getreue Nachbildung vorhanden, die jeder Besucher in Tätigkeit vorgeführt bewundern kann.

Wir finden, um noch einige besonders häufig angewandte didaktische Grundsätze zu nennen, die ausgiebige Verwendung wirklichkeitsgetreuer und vielfach betriebsfähiger Modelle, wir begegnen Schnittmodellen für Maschinen und andere Werke der Technik, mit wirklich vorbildlichen Erläuterungen über Einrichtung und Wirkungsweise. Vielfach können vom Besucher die Teile auch auseinandergenommen und so das Innere freigelegt werden.

Wo schematische Darstellungen zur Verwendung gelangen, da werden sie dem Lehrer ein bisher unerreichtes Vorbild sein.

Großer Wert ist auch auf die künstlerische Umrahmung bei der Veranschaulichung technischer Dinge verwandt. So wird ein Gang durch die vollkommen naturwahre Nachbildung des Steinsalzbergwerks von *Wieliczka* sowie einer Kohlenzeche immer ein großes Erlebnis sein. Mit rührender Pietät ist der mehr handwerksmäßig betriebene Gewerbefleiß früherer Zeiten zur Darstellung gebracht: die alte Sensenschmiede und eine vollständig eingerichtete Uhrmacherwerkstätte aus dem Schwarzwald legen davon Zeugnis ab. Und die Kulturentwicklung wird von uns miterlebt, wenn wir aus der alten Alchimistenbude in Liebigs Laboratorium eintreten. Künstlerisch vollendete Bilder aus den verschiedensten Gebieten der Technik begegnen uns vielfach an den Wänden der Ausstellungssäle.

An uns Lehrer wendet sich natürlich mit ganz besonderer Eindringlichkeit

der unendliche Reichtum, den die Abteilungen für Physik und Chemie in einer langen Flucht von Sälen beherbergen, sowie die Abteilungen für Mathematik, Geodäsie, Meteorologie und Astronomie. Hier wird der Führer mit seiner Schülerschar während des zehntägigen Aufenthalts vorwiegend zu finden sein. Auf jede Schülerfrage wird er hier die nötige Auskunft geben. Die große Zahl von Versuchen, die in der physikalischen Abteilung vom Besucher selbst anzustellen sind, müssen natürlich von jedem einzelnen Schüler einmal eigenhändig in Gang gesetzt werden; und wo für kompliziertere Versuche die Hilfe eines der zahlreichen Museumswärter erforderlich ist, da muß mit ihm natürlich eine entsprechende Verabredung schon tags zuvor getroffen werden.

Mit reichem Gewinn für sich selbst und seine Schüler wird auch der Chemiker die vielen glänzend ausgeführten Tafeln und Modelle, z. B. zum Aufbau der Materie, zu den Rohstoffen, zu den verschiedensten Prozessen der chemischen Technik usw., betrachten und für den Unterricht nutzbar machen.

Unter keinen Umständen wird man endlich auf den Besuch der beiden Planetarien verzichten dürfen.

Einer außerordentlich fruchtbaren Anregung für die Ausschmückung der eigenen Schulräume wird jeder Lehrer im Ehrensaal des Museums begegnen, wo das Andenken der um die Technik und ihre Hilfswissenschaften besonders verdienten großen Männer unseres Volkes in sinniger Weise durch Standbilder, Porträts, Plaketten festgehalten wird. Da ist z. B. das Bildnis eines Carl Friedrich Gauß, des „Princeps mathematicorum“, mit der Inschrift: „Sein Geist drang in die tiefsten Geheimnisse der Zahl, des Raumes und der Natur; er maß den Lauf der Gestirne, die Gestalt und die Kräfte der Erde; die Entwicklung der mathematischen Wissenschaften des kommenden Jahrhunderts trug er in sich.“ Wenn man in dem herrlichen, von R. Courant und O. Neugebauer gerade jetzt herausgegebenen geschichtlichen Werk von F. Klein (Springer 1926) „Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert“ das Kapitel über Gauß nachgelesen hat, dann weiß man, daß man das Wirken und Schaffen des „Fürsten der Mathematiker“ nicht kürzer und treffender kennzeichnen kann, als es durch die eben mitgeteilte Inschrift geschieht. Ähnliches gilt von allen anderen Inschriften des Ehrensaales: sie sind wuchtig und gehaltvoll! Hier dürfen alle in die Schule gehen, welche die Notwendigkeit erkannt haben, den Gedanken vom besonderen Beruf der exakten Wissenschaften im Rahmen der Gesamtkultur in weitere Kreise zu tragen.

Nun noch einige praktische Winke für den Besuch des Museums! Nach unseren Erfahrungen sollte die Dauer des Aufenthalts in München etwa zehn Tage betragen. Ein kürzerer Besuch birgt die Gefahr der Überstürzung, der Hetzerei und der Oberflächlichkeit in sich und macht andere Ziele, von denen nachher noch die Rede sein soll und die man vernünftigerweise mit der Münchner Reise verbinden wird, völlig unmöglich. Die Schülergruppe wird man geschlossen frühmorgens ins Museum führen, um den verbilligten Eintritt (10 Pf) zu genießen, und vor allen Dingen, um die Besichtigung selbst durch fortgesetzte Aussprache mit den Schülern fruchtbar zu gestalten. Diesen für alle „verbindlichen“ Teil des Besuchs wird man auf keinen Fall über zwei bis allerhöchstens drei Stunden täglich ausdehnen. Eine Überschreitung wird nur Übermüdung und Abstumpfung im Gefolge haben. Darüber hinaus muß natürlich dem einzelnen Gelegenheit gelassen werden, auf eigene Faust Gebiete aufzu-

suchen, die ihn besonders interessieren. Sehr ratsam ist es auch, etwa zweimal einen „museumsfreien“ Tag einzuschalten mit einem Programm, über dessen Zweckmäßigkeit wir uns gleich noch verständigen wollen.

Ich wende mich nun zur Beantwortung einiger anderer, durchaus praktischer Fragen. Da ist zunächst die Kostenfrage! Unsere Schüler haben für den zehntägigen Aufenthalt einschließlich der ermäßigten Bahnfahrt IV. Klasse von Göttingen nach München und zurück und einschließlich aller weiteren Veranstaltungen (Besuch des Walchenseekraftwerks, Besteigung des Herzogsstandes sowie des Wendelsteins bei Bayrisch-Zell bzw. Reise nach Mittenwald und Garmisch-Partenkirchen, Ausflüge ins Isartal) *durchschnittlich* 70 *RM* gebraucht. Darin enthalten sind auch die Ausgaben für gelegentliche Besuche etwa im Hofbräuhaus, aber nicht diejenigen für den Besuch der Münchner Cafés! Ein Schälchen Mokka mit einem Stück Torte oder eine Portion Eis kosten mehr als ein kräftiges Mittagessen, das man für 0.80 bis 1 *RM* überall haben kann! Das Abendessen werden sich die Schüler selbst besorgen: Wurst, Brot, Butter, gekochte Eier sind in vielen Geschäften preiswert zu kaufen.

Nun zur wichtigen Frage der Unterbringung! Schüler, die durch vielfache Wanderfahrten an allereinfachstes Unterkommen gewöhnt sind, werden gern des billigen Preises wegen (0.30 *RM* für die Nacht) die Jugendherberge in der Entenbachstraße aufsuchen. Sie ist nicht allzuweit vom Museum entfernt und verfügt auch über Kochgelegenheiten. Dort werden aber Schülergruppen nur aufgenommen, wenn ein verantwortlicher Lehrer den Aufenthalt der Schüler vollständig überwacht. Zudem ist die Hausordnung insofern für geplante abendliche Veranstaltungen unbequem, als das Schlafengehen im Sommer bereits auf 10 Uhr angesetzt ist. Die mehr als spartanisch einfache Gesamteinrichtung der Jugendherberge, die namentlich an heißen Tagen qualvolle Enge des Strohsacklagers, der Mangel an Sauberkeit, dem bei dem dauernden Massenbetrieb schwer beizukommen ist, und die erhebliche Unruhe im Heim mögen in Kauf genommen werden, wenn man Schüler nur ganz vorübergehend unterzubringen hat. Bei einem zehntägigen anstrengenden Studienaufenthalt in München muß nach unseren Erfahrungen auf wirklich erquickende Nachtruhe gesehen werden. Wir haben uns daher im letzten Sommer für die allerdings etwas kostspieligere Unterbringung im Wartburghospiz (Landwehrstraße) entschieden, wo 30 bis 40 Betten in einem geräumigen Saal Aufstellung finden können. (Preis 1.60 *RM* für die Nacht einschließlich Morgenkaffee mit zwei Brötchen, Milch und Zucker.) Auch unser gemeinschaftliches Mittagessen im Hospiz war preiswert und gut (je nach Verabredung 0.70 bis 1.20 *RM*). Kleinere Schülergruppen vermag auch das benachbarte Mathildenhospiz (Mathildenstraße) zu ermäßigten Preisen aufzunehmen. Es ist kein Zweifel, daß in Zukunft bei steigendem Bedarf auch andere Gaststätten Entgegenkommen zeigen werden. Die Auskunftsstelle im Südbau des Hauptbahnhofes (Vorsitzender Professor Enzensperger) wird gegebenenfalls diesbezügliche Anfragen beantworten.

Als Norm für die Kopfstärke der Gruppe mag etwa gelten: 20 Schüler in Begleitung von zwei Lehrern! Paß oder Postausweis sollten nicht vergessen werden!

Im übrigen begegnen sich meine praktischen Vorschläge für München vielfach mit Leitsätzen, die der Lübecker Kollege Georg Rosenthal in einem Aufsatz über neuzeitliche Schülerreisen niedergelegt hat. (Monatsschrift für höhere Schulen XXV, S. 293, 1926.) Ich meine, daß die Münchener Reise nicht

einseitig und engherzig auf den Museumsbesuch ausschließlich eingestellt werden darf, sondern daß sie dem ganzen Reichtum des Münchner Lebens, der Bedeutung der bayrischen Hauptstadt für die Entwicklung der Kunst und als Eingangstor in die Welt der Berge gerecht werden muß. Erst die Lösung dieser Nebenaufgaben stiftet jenen harmonischen Zusammenklang der Münchner Reise, der sie als eindrucksvolles Gesamterlebnis in der Erinnerung des Schülers weiterleben läßt. Das hier mitgeteilte Programm aus den Jahren 1925 bzw. 1926 hat natürlich nur den Sinn eines unverbindlichen Beispiels für die Ausgestaltung des Münchner Aufenthalts. Es genügen daher wohl einige wenige Stichworte: Besichtigung der baulichen Sehenswürdigkeiten der Stadt, Münchner Leben im Hofbräuhaus, Sonntagvormittag vor dem Rathaus, Besuch der vielen Münchner Kunststätten (alte und neue Pinakothek, Schackgalerie, Kunstpalast usw.), Nachmittagsausflug nach Nymphenburg (Botanischer Garten), an den Starnberger See, ins Isartal (etwa Besuch im stimmungsvollen Kloster *Schäfflarn*), Tagesausflug zum Bayernkraftwerk am Walchensee mit Bootsfahrt über den Kochelsee, Besichtigung des gewaltigen Werks (dazu Ausweis und Erlaubnisschein von der Verwaltung in München mitnehmen!) und anschließende Besteigung des Herzogsstandes (1800 m); Tagesausflug zum Wendelstein (1800 m, Aufstieg von Fischbachau, Abstieg nach Bayrisch-Zell) oder aber Reise nach Mittenwald bzw. Garmisch-Partenkirchen mit Wanderung durch eine Klamm oder Ausflug nach dem Eibsee verbunden.

Vielen Schülern wird so zum erstenmal Gelegenheit gegeben, einen Blick in die Wunderwelt der ewigen Alpenberge zu tun, und um diese Möglichkeit darf man sie auf keinen Fall bringen, zumal man durch reichliche Ausrüstung mit Antragsformularen für Fahrpreisermäßigung die Gesamtkosten in bescheidenen Grenzen halten kann.

Diese Ausflüge werden sich besonders dann auch für die erdkundliche Unterweisung als äußerst fruchtbar erweisen, wenn sie durch Besuche in dem noch viel zu wenig beachteteten Alpinen Museum auf der Praterinsel in München vorbereitet wurden. Hier findet man alles eindrucksvoll ausgestellt, was sich auf Volkskunde, Volkswirtschaft, Tier- und Pflanzenleben, die Geologie sowie den Bergsport in den Alpenländern bezieht.

Diese Möglichkeiten scheinen mir so wertvoll, daß ich immer als Reisezeit den Sommer empfehlen möchte. Bei zeitiger Vorausbestellung der Unterkunft braucht man auch das Anschwellen des Verkehrs im Juli und August nicht zu fürchten.

Endlich noch ein paar Mitteilungen aus der Organisation des Deutschen Museums, die dem einen oder anderen Kollegen nützlich sein mögen. Aus dem Verwaltungsbericht des Deutschen Museums für das 22. Geschäftsjahr (Mai 1925 bis Mai 1926) entnehme ich, daß die inzwischen erfolgte Aufwertung der Vorkriegsstipendien zum Besuch des Museums (für Schüler und junge Arbeiter) im Jahre 1925/26 die Bewilligung von je 100 *RM* Reisezuschuß an 41 Stipendiaten ermöglichte. Ein von der Geschäftsstelle des Museums beziehbares Merkblatt enthält die Stiftungssatzungen für diese Reisestiftung. Außerdem besteht die unabhängig vom Deutschen Museum durch die Reichsleitung gegründete „Oskar-von-Miller-Stiftung". Sie verfügt über 100000 *RM*; der diesjährige Zinsertrag (8000 *RM*) wird zur Hälfte für die Entsendung von 40 Stipendiaten verwandt, während die anderen 4000 *RM* zur Ausführung von größeren

Reisen bewilligt werden. Zum Ruhm unserer Stadt Göttingen sei hier zur Nachahmung mitgeteilt, daß sie dieses Jahr sieben unserer Schüler je 50 *RM* Beihilfe für die Reise nach München bewilligte!

Ich verweise zum Schluß noch auf ein paar andere Aufsätze über das Deutsche Museum, wo der Leser vielleicht noch diese oder jene Ergänzung zu meinen Ausführungen finden mag:

1. C. Reindl, Das Deutsche Museum und seine Lehraufgabe. Unterrichtsblätter f. Math. u. Naturw. XXXII (1926), S. 228 ff.

2. Franz Fuchs, Das Deutsche Museum und seine naturwissenschaftlichen Sammlungen. Die Umschau XXIX (1925), S. 347 ff.

3. W. Lorey, Das Deutsche Museum von Meisterwerken der Naturwissenschaft und Technik. Unterrichtsblätter f. Math. u. Naturw. XXXI (1925), S. 215. (Kurzer Bericht über die Einweihung.)

4. Max Liefeld, Studienfahrt Berliner Naturwissenschaftler nach München. Deutsches Philologenblatt **34** (1926), S. 155.

Endlich erwähne ich noch, daß das Deutsche Museum eine Sammlung von über 80 Diapositiven für Vortragszwecke auszuleihen hat, die einen ersten Eindruck von dem Reichtum seiner Schätze geben können.

Zu weiteren Auskünften bin ich gern bereit, ebenso meine Göttinger Kollegen: Prof. Dr. Trommsdorff, Dr. Seyfarth und Dr. Siebert von der Oberrealschule und Studienrat Schütte vom Oberlyzeum.

Kleine Mitteilungen.

Der Satz vom Zentri- und Peripheriewinkel. (Mit 5 Figuren im Text.) Vorausgesetzt sei, daß Bogen zwischen parallelen Sehnen gleich sind.

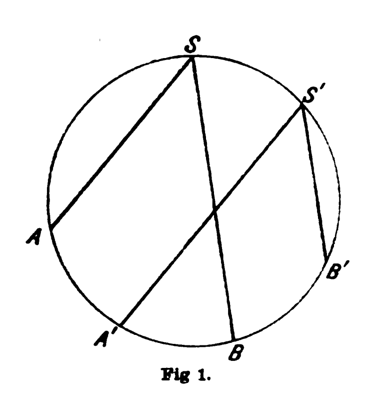


Fig 1.

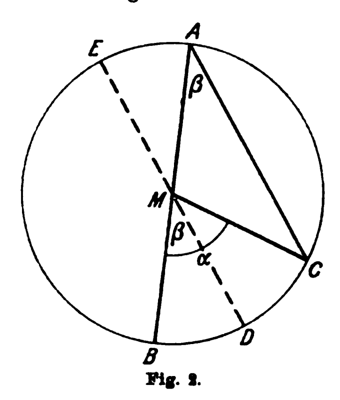


Fig. 2.

Der Beweis ergibt sich durch eine einfache Symmetriebetrachtung, indem man die Mittelsenkrechte zieht.

Satz vom Peripheriewinkelbogen. Peripheriewinkel, deren Schenkel parallel sind, haben gleiche Bogen.

Beweis. Fig. 1. $AA' = SS'$, $BB' = SS'$. Dann ist auch $AA' = BB'$ und $AB = A'B'$.

Ebenso verfährt man, wenn sich die Schenkel nicht schneiden.

Satz vom Zentriwinkel und Peripheriewinkel. Fall I. (Fig. 2.) Man zieht zu AC die Parallele DE. Dann ist

$$BD = AE, \quad CD = AE,$$

also
$$BD = CD,$$

d. h.
$$\alpha = 2\beta.$$

Fall II und III (Fig. 3 u. 4) wird auf I zurückgeführt, indem man den Peripheriewinkel so verschiebt, daß ein Schenkel Durchmesser wird. —

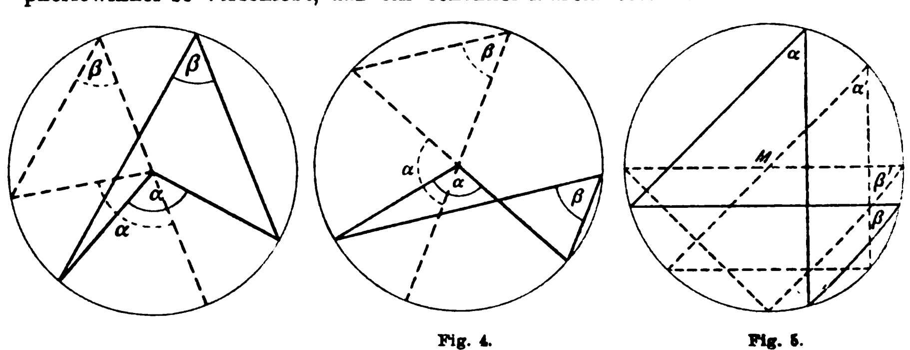


Fig. 4. Fig. 5.

Will man den Satz vom Peripheriewinkel direkt beweisen, so verschiebt man die beiden Peripheriewinkel so (Fig. 5), daß ein Schenkel Durchmesser wird, und zieht die Sehnen zu den gleichen Bogen. Dann ergibt sich aus der Kongruenz der beiden rechtwinkligen Dreiecke, daß $\alpha' = \beta'$, also $\alpha = \beta$ ist.

Wiesbaden. O. Eckhardt.

Aufgaben-Repertorium.

Redigiert von Studienrat M. Brettar in Viersen (Burgstr. 2c).

Alle das Aufgaben-Repertorium betreffenden Zusendungen und Anfragen sind an die Adresse dieses Herrn zu richten.)

A. Auflösungen.

876. Im Netz einer regelmäßigen n-seitigen Pyramide bilden die Spitzen der Seitendreiecke die Ecken eines regelmäßigen n-Ecks. Man soll aus diesem n-Eck, dessen Umkreisradius r gegeben sei, das Netz einer regelmäßigen Pyramide von möglichst großem Inhalt ausschneiden. (1925, Heft 2, Emmerich-Mühlheim (Ruhr).)

Lösung. Ist y der Inkreisradius der Grundfläche, z die Höhe der Pyramide, x deren Grundkante und $v = \frac{180^0}{n}$, so ergibt sich nach Fortlassung der Konstanten für den Inhalt die Funktion: $f = y^4(r - 2y)$; $f' = 2y^3(2r - 5y)$; $f'' = 4y^2(3r - 10y)$; also $y = \frac{2}{5}r$, $f'' < 0$. Aus $y = \frac{2}{5}r$ folgt, daß die Seitenmitten des einzuzeichnenden n-Ecks die Umkreisradien des gegebenen im Verhältnis $2:3$ teilen. Soll aber jenes in dem gegebenen vollständig Platz finden, so muß sein Umkreisradius $\frac{2}{5}r : \cos v$ kleiner sein als der Inkreisradius $r \cdot \cos v$ des gegebenen: $\cos^2 v > \frac{2}{5}$, $v < 50^0\,46'$, $n > 3$. Beim Dreieck versagt also die

Lösung; bei ihm wächst f stetig, wenn y von 0 bis zu seinem zulässigen Höchstwert $\frac{r}{4}$ fortschreitet. Das gegebene Vieleck bildet hier also das Netz der gesuchten Pyramide (Tetraeder).

Bücking. Clauss. Conrad. Diez. Emmerich. Gottselig. Heymann. Hoffmann. Hörting. Janzen. Kasper. Klobasa. Lindemann. Mahrenholz. Mertens. Müller. Schrek. Stiegler. Stucke.

877. In jedem Dreieck ist: $\sin 2\alpha(\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\gamma) + \sin 2\beta(\operatorname{tg}\gamma - \operatorname{tg}\alpha) + \sin 2\gamma(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta) = 0$. (1925, Heft 2, Hörting-Zeitz.)

Lösung. Durch Multiplikation mit $\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma$ erhält man: $\sin 2\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\sin(\beta-\gamma) + \sin 2\beta\cdot\cos\beta\cdot\sin(\gamma-\alpha) + \sin 2\gamma\cdot\cos\gamma\sin(\alpha-\beta) = 0$; $\sin 2\alpha[\sin(\alpha+\beta-\gamma) - \sin(\alpha-\beta+\gamma)] + \sin 2\beta[\sin(\beta+\gamma-\alpha) - \sin(\beta-\gamma+\alpha)] + \sin 2\gamma[\sin(\gamma+\alpha-\beta) - \sin(\gamma-\alpha+\beta)] = 0$. Hieraus ergibt sich die Identität: $\sin 2\alpha(\sin 2\gamma - \sin 2\beta) + \sin 2\beta(\sin 2\alpha - \sin 2\gamma) + \sin 2\gamma(\sin 2\beta - \sin 2\alpha) = 0$.

Bücking. Conrad. Diez. Gottselig. Götze. Hoffmann. Hörting. Janzen. Kasper. Lindemann. Lohnes. Mahrenholz. Müller. Ruff. Schoch. Schrek. Sohnius. Stucke.

878. Gegeben eine Parabel mit dem Scheitel A. Durch einen veränderlichen Punkt M derselben ziehe man die Parallele zur Achse, welche die Scheiteltangente in P schneidet. Das von P auf die Parabeltangente des Punktes M gefällte Lot schneide AM in Q. Der Ort des Punktes Q ist eine Ellipse. Ihr Mittelpunkt liegt im Brennpunkt der Parabel und ihre Achsen verhalten sich wie $1:\sqrt{2}$. (1925, Heft 2, Gaedecke-Wilmersdorf.)

Lösung. Die Gleichung der Geraden AM ist $y = \frac{y_1}{x_1}x$, die des auf die Tangente gefällten Lotes $y = -\frac{y_1}{p}x + y_1$. Die Koordinaten von M ergeben sich zu: $x_1 = \frac{px}{p-x}$, $y_1 = \frac{py}{p-x}$. Mit Hilfe von $y_1^2 = 2px_1$ erhält man

$$\left(x-\frac{p}{2}\right)^2 + \frac{y^2}{2} = \left(\frac{p}{2}\right)^2 \text{ oder } \frac{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2}{\left(\frac{p}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{p}{2}\sqrt{2}\right)^2} = 1.$$

Bücking. Clauss, Conrad. Diez. Gottselig. Götze. Hoffmann. Janzen. Kasper. Klobasa. Lindemann. Lohnes. Mahrenholz. Mertens. Müller. Schick. Schrek. Sohnius. Stiegler. Stucke.

Anmerkung. Man vgl. Ch. Schmehl, Aufgaben aus der analytischen Geometrie der Ebene (Gießen, Roth). Aufg. 846. Preuss.

879. Teilbarkeit durch 19 (7, 13, 23, 29, 59, 79, 89, 109 usw.): Man trennt die Einer ab, multipliziert sie mit 2 (5, 4, 7, 3, 6, 8, 9, 11 usw.) und addiert dieses Produkt zu der Zahl, die nach Abtrennung der Einer übrigblieb. Mit der erhaltenen Summe verfährt man ebenso und setzt dieses Verfahren so weit fort wie möglich (oder nötig). Erhält man schließlich eine durch 19 (7, 13 ...) teilbare Zahl, so ist auch die gegebene Zahl durch 19 (7, 13 ...) teilbar. (1925, Heft 2, Oppenheimer-Schwedt.)

Lösung. Aus $10a + b \equiv 0 \bmod n$ und $10x - 1 \equiv 0 \bmod n$ folgt $10ax + bx \equiv 0 \bmod n$ und $10ax - a \equiv 0 \bmod n$ und daraus $a + bx \equiv 0 \bmod n$. —

Für 13, 17, 19, 23, 29 vergleiche man Schubert, Mathematische Mußestunden I, 3. Aufl., S. 160, für 13 und 19 diese Zeitschr. Bd. 47, S. 480.

CONRAD. DIEZ. HILLEBRECHT. HOFFMANN. KASPER. LINDEMANN. MAHRENHOLZ. OPPENHEIMER. SCHICK. SCHUMACHER. STIEGLER. STUCKE.

Anmerkung. Über das umgekehrte Verfahren (Subtraktion) vgl. Züge Die Lehre v. d. Teilbarkeit dek. Zahlen, Archiv f. Math. u. Physik 3. Reihe, Bd. 4, 1903, S. 73; ferner Kosack, Bem. über die Herleitung von Teilbarkeitsregeln, Zeitschr. f. d. math. u. nat. Unt. Bd. 47, S. 481. MAHRENHOLZ.

880. An einen geraden wagerechten Damm von der Höhe h und dem Böschungswinkel φ $\left(\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{m}\right)$ der Seitenflächen soll eine gerade Wegerampe von der Wegbreite b und dem Steigungswinkel α $\left(\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{n}\right)$ rechtwinklig herangeführt werden. Die Seitenflächen der Rampen sollen die gleiche Böschung erhalten wie die Seitenflächen des Dammes. Wie groß ist der Rauminhalt der anzuschüttenden Rampe? [Die häufig zu findende Formel:

$$V = \frac{h^2}{6}(n-m)\left[3b + 2\frac{m}{n}(n-m)h\right],$$

z. B. „Hütte", Taschenbuch, 24. Aufl. 1923, I. S. 140 ist ungenau. Wird V hierdurch über- oder unterschätzt?]. (1925, Heft 3, Hauptmann-Leipzig.)

Lösung. Die genaue Formel lautet:

$$V = \frac{h^2}{6}(n-m)\left[3b + 2\frac{m}{\sqrt{n^2-m^2}}(n-m)h\right].$$

Der Näherungswert ist zu klein.

Die Näherungs*formel* entspricht einer bekannten Näherungs*konstruktion* und bedingt auch, bei nicht allzu großer Höhe, einen relativ geringen Fehler. Dieser bleibt unter $\frac{h^3 m^3}{6n^2}(n-m)$. Setzt man die gebräuchlichen Zahlenwerte $m = 1{,}5$, $n = 10$, so erhält man als obere Grenze des Fehlers rund $5\,\%$ von h^3.

CLAUSS. CONRAD. DIEZ. HAUPTMANN. HOFFMANN. JANZEN. KASPER. KLOBASA. LINDEMANN. MAHRENHOLZ. MERTENS. MÜNST. NITSCHE. RUHM. STIEGLER. STUCKE.

881. In welchem Punkte seiner parabolischen Bahn besitzt ein Geschoß, von der Mündung des Geschützes aus gesehen, bei gegebenem Steigungswinkel α und gegebener Anfangsgeschwindigkeit c die größte Winkelgeschwindigkeit? (1925, Heft 3, Michnick-Beuthen.)

Lösung. Im Punkte $P(x; y; \psi)$ der Bahn ist die Winkelgeschwindigkeit $w = -\frac{d\psi}{dt}$. Aus $\operatorname{tg}\psi = \frac{y}{x} = \operatorname{tg}\alpha - \frac{gt}{2c\cdot\cos\alpha}$ folgt $\frac{d\psi}{\cos^2\psi} = -\frac{g\cdot dt}{2c\cdot\cos\alpha}$. Demnach ist $w = \frac{g\cdot\cos^2\psi}{2c\cdot\cos\alpha}$.

Für $\psi = 0^0$ wird dieser Wert ein Maximum. Es ist $w_{\max} = \frac{g}{2c\cdot\cos\alpha}$.

CONRAD. DIEZ. HOFFMANN. JANZEN. KASPER. LINDEMANN. MAHRENHOLZ. MERTENS. MICHNIK. MÜNST. NITSCHE. SOHN. STUCKE.

B. Neue Aufgaben.

935. Die Enveloppe aller Planetenbahnen von gegebener Umlaufszeit zu bestimmen, wenn alle Bahnen in einer gegebenen Ebene liegen und der Ort des Brennpunkts, in dem die Sonne nicht steht, eine gegebene Gerade g ist.

MICHNIK-Beuthen.

936. Aus $(-2)^3 = -8$ folgt $\log(-8) : \log(-2) = 3$ für jede Basis. Unter welchen Bedingungen ist der Quotient der beiden links stehenden komplexen Zahlen reell?

BÜCKING-Darmstadt.

937. Gleichweit voneinander stehende Glieder einer arithmetisch-geometrischen Reihe bilden in gerader wie in umgekehrter Reihenfolge sowohl eine arithmetisch-geometrische als auch eine geometrisch-arithmetische Reihe. (Vgl. Ruff, Zwei Zahlenreihen und deren Interpolation. Archiv der Math. u. Physik. 2. Reihe XVII.)

RUFF-Wien.

938. Unter Bezugnahme auf Aufgabe 864 und 923 seien die über den Seiten des Dreiecks ABC gezeichneten Dreiecke gleichseitig. Es sind dann die Strecken AA_1', BB_1', CC_1' und ebenso AA_1, BB_1, CC_1 gleich lang. Sie schneiden sich in O und O_1 unter Winkeln von 60^0. Dabei ist $AA_1 = BB_1 = CC_1 = AO + BO + CO$.

DIEZ-Heilbronn.

939. Welche Beziehung besteht zwischen der Flächengröße des Rotationskörpers der Exponentialkurve $y = e^x$ für $x = -\infty$ bis $x = 0$ und der des Rotationskörpers der Sinuslinie $y = \sin x$ für $x = 0$ bis $x = \pi$?

WEIKERSHEIMER-Ludwigshafen.

940. Fällt man von einem Punkte P auf die Seiten des Dreiecks ABC die Lote PA_1, PB_1, PC_1, so ist $\overline{AC_1}\cdot\overline{BA_1}\cdot\overline{CB_1} + \overline{BC_1}\cdot\overline{CA_1}\cdot\overline{AB_1} = 4r\cdot A_1B_1C_1$.

MAHRENHOLZ-Kottbus.

Briefkasten zum Aufgaben-Repertorium.

Bis zum 25. Dezember 1926 gingen an Auflösungen ein: Jacob-Elsterwerda 904. 905. 907. Sós-Budapest 921. 928.

Berichte.

Organisation, Verfügungen.

Zur Maturitätsreform in der Schweiz. Dem Ausländer, der die Mittelschulen der Schweiz zum ersten Male besucht, wird gleich die Mannigfaltigkeit der Lehrpläne auffallen. Nicht nur die verschiedene Sprache und Religion, sondern auch die Eigenart der einzelnen Landesteile spiegelt sich in den Schuleinrichtungen wider. Jeder der 24 Kantone und Halbkantone ist im Erziehungswesen in hohem Maße selbständig. In der Schweiz verfügt kein dem ganzen Lande vorgesetztes Unterrichtsministerium, sondern es sind 24 kantonale Erziehungsdirektionen maßgebend.

Auf das Gebiet des Bundes übergreifende Befugnisse standen bis vor kurzem nur dem *Schweizerischen Schulrat,* soweit es sich um die Aufnahme an die *Eid-*

genössische Technische Hochschule handelte, und der *Eidgenössischen Maturitätskommission* zu, welche über die Bestimmungen betreffend Zulassung zu den *medizinischen Prüfungen*, die eidgenössisch geregelt sind, zu wachen hat. Eine schweizerische Maturitätsreform konnte daher nur innerhalb des Bereiches dieser beiden Amtsstellen vor sich gehen.

Stark im Vordergrund stand eine Zeitlang der Gedanke einer Gleichberechtigung verschiedener Maturitätsvorbereitungen. Während jedoch von der einen Seite eine Entlastung und die Schaffung eines der Schulgattung entsprechenden zentralen Arbeitsgebietes gewünscht wurde, erstrebten andere eine Verschärfung und Verschiebung des Schwergewichts der Ausbildung nach der sprachlich historischen Seite hin. Die Basis der Erörterungen bildeten die drei von Rektor Barth, Basel, aufgestellten Maturitätstypen A, B, und C. Alle drei Typen verlangen eine tüchtige Ausbildung in der Muttersprache und in einer zweiten Landessprache. Sodann soll der Typus A charakterisiert sein durch die Pflege der alten Sprachen und der Mathematik, der Typus B durch das Lateinische, die neuen Sprachen und die Mathematik, ferner der Typus C durch neue Sprachen, Mathematik und Naturwissenschaften.

Der schweizerische Schulrat war mit der bedingungslosen Aufnahme der Abiturienten aller drei Typen an die technische Hochschule einverstanden, und seine Kompetenzen bezüglich der Aufnahme an die technische Hochschule gingen zum Teil an die Maturitätskommission über. Hingegen zeigte sich sofort von seiten der Ärzteschaft und der katholischen Landesteile ein erbitterter Widerstand gegen die Zulassung des lateinlosen Typus C zu den medizinischen Examina. Dadurch verzögerte sich die Durchführung der Maturitätsreform, und als endlich im Januar 1925 die Entscheidung fiel, brachte sie wohl die freie Aufnahme aller drei Typen an die Technische Hochschule; der Inhaber eines Maturitätsausweises nach Typus C jedoch hat für die Zulassung zu den medizinischen Examen darüber hinaus eine rigorose Ergänzungsprüfung in Latein zu bestehen.

Scheinbar gelten diese Bestimmungen nur für die Technische Hochschule und die Medizinalprüfungen, bilden aber indirekt die Richtlinien für alle schweizerischen Maturitätsschulen, die ihren Schülern ein auch für diese beiden Ziele geltendes Reifezeugnis erteilen wollen. So war es möglich, eine größere Vereinheitlichung im Maturitätswesen der Schweiz, als bisher bestanden hat, zu erreichen. Sie ist auf Kosten des Typus C (Realschulen) und damit der mathematisch-naturwissenschaftlichen Ausbildung geschehen und hat zu einer stärkeren Betonung der sprachlich-historischen Fächer geführt.

Dem Reglement für die eidgenössischen Maturitätsprüfungen wurden als Wegleitung kurze *Stoffprogramme* beigegeben. Diese sind als Minimalforderungen aufzufassen und wurden aufgestellt, als die Gleichberechtigung der drei Typen gesichert schien. Sie verlangen in

Mathematik.

Arithmetik, Algebra und Anaylsis. Begriff der rationalen und der irrationalen Zahl. Algebraische Operationen. Logarithmen. Lineare Gleichungen mit einer und mehreren Unbekannten. Quadratische Gleichungen mit einer Unbekannten; rechnerische und graphische Auflösung. Arithmetische und geo-

metrische Reihen. Zinseszins- und Rentenrechnung. Funktionale Abhängigkeit und graphische Darstellung von Funktionen.

Geometrie: Elementare geometrische Formen. Lagebeziehungen und Konstruktionen in der Ebene und im Raum. Kongruenz, Ähnlichkeit und Symmetrien. Übung in einer einfachen Darstellungsmethode. Flächen- und Volumenberechnung.

Trigonometrie: Das rechtwinklige Dreieck. Sinus- und Kosinussatz beim schiefwinkligen Dreieck; zugehörige Bestimmungsaufgaben. Die trigonometrischen Funktionen beliebiger Winkel und ihre Additionstheoreme.

Analytische Geometrie: Punkt, Gerade und Kreis im rechtwinkligen Koordinatensystem. Die Kegelschnitte in ihren einfachsten Gleichungsformen und ihre Haupteigenschaften.

Außerdem für Typus C:

Komplexe Zahlen und deren Rechnungsoperationen. Gleichungen zweiten Grades mit zwei Unbekannten. Angenäherte Auflösung von Gleichungen. Grundbegriffe der Kombinationslehre. Einfache Wahrscheinlichkeits- und Lebensversicherungsaufgaben. Die Ableitungen der rationalen und der einfachsten transzendenten Funktionen. Bogen-, Flächen- und Volumenberechnung durch Annäherung.

Goniometrie. Das schiefwinklige ebene Dreieck. Das rechtwinklige sphärische Dreieck. Sinus- und Kosinussatz beim schiefwinkligen sphärischen Dreieck. Anwendungen aus der mathematischen Geographie und der Astronomie.

Pol und Polare bei den Kegelschnitten.

Darstellende Geometrie

nur für Typus C.

Darstellung von Punkten, Geraden und Ebenen in Grund- und Aufriß und die zugehörigen fundamentalen Konstruktionsaufgaben. Projektion und wahre Größe ebener Figuren.

Darstellung von Vielfachen; ebene Schnitte, Durchdringungen und Netze.

Darstellung von Zylinder, Kegel und Kugel; konstruktive Behandlung ihrer Punkte, Mantellinien, Tangentialebenen und ebenen Schnitte.

Geometrisches Zeichnen: Handhabung von Lineal und Zirkel für geometrische Konstruktionen und Darstellungen in Blei und Tusche.

Der *Verein schweizerischer Mathematiklehrer* hat sich immer für die Vereinheitlichung der Lehrpläne eingesetzt und u. a. seinen Mitgliedern jedes Jahr als Richtlinien die Aufgaben zugesandt, die bei der Aufnahme von Studierenden ohne genügenden Maturitätsausweis an die Technische Hochschule und bei den eidgenössischen Maturitätsprüfungen gestellt worden sind. Seite an Seite mit dem gesamten Gymnasiallehrerverein suchte er leider umsonst die Gleichberechtigung der drei Maturitätstypen durchzusetzen.

Gleich nach dem Erscheinen der oben abgedruckten kurzen Stoffprogramme hat der Verein ausführliche Darstellungen unter dem Namen *„Lehrstoffpläne“* herausgegeben. Sie enthalten eine nähere Umschreibung der einzelnen Stoffgebiete mit methodischen Bemerkungen nebst einer Verteilung des Lehrstoffes auf die Klassen. Für die beiden Typen A und B ist wie oben der Lehrstoff wörtlich gleich umschrieben, doch verlangt der Typus B eine umfassendere

Behandlung und größere Vertiefung und damit auch eine höhere Stundenzahl. Bei allen drei Typen soll wenigstens in einfachster Form auf die Grundbegriffe der Infinitesimalrechnung eingetreten werden.

Mit der Einstellung der Realschulen auf den Typus C macht sich nun da und dort die Absicht bemerkbar, die Zeit zu kürzen, die bisher dem Mathematikunterricht zugebilligt worden war. Dem steht das Bestreben der Technischen Hochschule gegenüber, ihre Anfangsvorlesungen auf dem bisherigen Niveau zu erhalten. Sie behält ihre besonderen Aufnahmeprüfungen für Bewerber, die nicht im Besitze eines Maturitätsausweises sind, bei; wohl werden grundsätzlich die drei Maturitätstypen für die bedingungslose Aufnahme anerkannt, doch ist der Typus C als die normale Vorbereitung erklärt worden.

Basel. H. Stohler.

Aus der Forschung.

Die Bestimmung des absoluten Alters der geologischen Formationen nach den Gesetzen der Radioaktivität. Vielleicht das älteste Problem menschlicher Nachdenklichkeit ist die Frage nach dem *Alter der Welt,* nach der Dauer jenes Zustandes auf der Erde — wie wir ihn heute kennen —, der die Bedingungen des Lebens gewährleistet. *Geologen* und *Geophysiker* haben sich um die Beantwortung der Frage gemüht, sobald die betreffenden Wissenschaftszweige eigenes Leben entfalteten. Doch erst heute zeigt sich ein Weg, der wissenschaftlichen Ansprüchen genügt; überraschenderweise hat man in den Gesetzen der *Radioaktivität* ein Mittel gefunden, in methodisch einwandfreier Weise die Frage anzufassen und bestimmte Antwort zu geben. Das muß auch allgemein um so mehr die Aufmerksamkeit in Anspruch nehmen, als sich ein so hohes Alter für unsere Erde, für die Dauer ihrer den heutigen wesentlich gleichen klimatischen und meteorologischen Verhältnisse und für das Leben auf ihr ergibt, an das früher auch die kühnste Einbildungskraft nicht glauben mochte.

Aus geologischen Gründen steht das *relative* Alter der in der Geologie charakterisierten Erdepochen bis zu einem gewissen Grade der Sicherheit fest. Eine je größere Verschiedenheit die zu zwei Zeitaltern gehörenden Formen der Lebewesen aufweisen und je mächtiger die zwischen ihren Formationen abgelagerten Sedimente sind, ein desto größerer Zeitraum wird zwischen der Bildung der einen und der anderen verstrichen sein. Nach W. v. Seidlitz verhalten sich die Zeitspannen, welche das Eozoikum, Paläozoikum, Mesozoikum, Känozoikum umfassen, etwa wie 50 : 12 : 3 : 1.[1]) Die naheliegenden Versuche, aus der Mächtigkeit der abgelagerten Sedimente dadurch ein bestimmtes Zeitmaß für ihre Bildung in Jahren zu gewinnen, daß man sie mit den historisch bekannten (am Nil) oder jährlich beobachtbaren (am Mississippi) Absätzen heutiger Ströme und Meere vergleicht, müssen als gescheitert gelten. Sie führten je nach den meßbaren Grundlagen zu Zahlenwerten, welche untereinander recht wenig übereinstimmen. Auch ergaben sie fast immer augenscheinlich viel zu kleine Zahlenwerte für das Alter der ältesten Sedimente. Es scheint, als wenn die Abtragung der Festländer und die Bildung neuer Sedimente im Meere heute mit

1) L. Kober, Gestaltungsgeschichte der Erde. Berlin 1926, Gebr. Borntraeger, S. 32. Siehe auch P. Wagner, Lehrbuch der Geologie und Mineralogie. Leipzig 1926, B. G. Teubner, S. 139.



größerer Geschwindigkeit vor sich geht als im Mittel während des Laufes der geologischen Erdgeschichte. Gründe dafür lassen sich aufzeigen: Die Gegenwart als Ausgang des Tertiärs mit seinen mächtigen Gebirgsneubildungen weist noch auf den Festländern viel größere Höhenunterschiede auf, als wir sie im Mittel für die Erdgeschichte annehmen dürfen, und dadurch ist auch die Abtragung größer als im Mittel; die Abwässer der Kulturlandschaften führen ferner eine sehr viel größere Flußtrübe zu Tal als diejenigen jungfräulichen Bodens. — Als Beispiel einer Berechnung führt P. Wagner[1]) folgendes an: Innerhalb der gesamten bekannten Sedimente findet man ausgedehnte Kalksteinlager, die eine Schicht von über 160 m Dicke ergeben würden, wenn man sie sich über die ganze Erde ausgebreitet denkt. Aus der beobachteten Menge des im Meere absinkenden Globigerinenschlammes, der sich aus den mikroskopischen Kalkschalen der abgestorbenen Tiere des Planktons zusammensetzt[2]), kann man nun berechnen, welche Zeit es dauern würde, bis sich eine meterdicke Kalksteinschicht abgesetzt hat. Man kommt dafür zu mehr als 3 Millionen Jahren. Die gesamte Kalkmasse der Sedimente müßte danach $600 \cdot 10^6$ Jahre zu ihrem Absatze notwendig gehabt haben; die ältesten Sedimente und damit das Weltmeer müßten also weit älter als diese Zeit sein. — Eine Schätzung auf zuverlässigerer Grundlage glaubte man auf den Kochsalzgehalt des Meeres gründen zu können. Man kennt etwa die Salzmenge, welche die Flüsse der Erde jährlich dem Meere zuführen. Nimmt man nun an, daß der gesamte Kochsalzgehalt des Meeres auf diese Weise aus den Festländern ausgelaugt worden ist, so schätzen J. Joly, Sollas, Becker und Clarke (1899—1916) die Zeit, die dazu notwendig gewesen wäre, dem Meere seinen heutigen Kochsalzgehalt einzuverleiben, mit großer Sorgfalt zwischen $80 \cdot 10^6$ bis $100 \cdot 10^6$ Jahren.[3]) Das ist ein überraschendes Ergebnis, wenn man es mit dem vorigen vergleicht. Schon bei der ersten Verdichtung des Wasserdampfes zu dem heutigen Weltmeere werden diesem gewaltige Salzmengen als ursprüngliches Auslaugungsprodukt der am leichtesten lösbaren Stoffe angehört haben müssen; die Zeit würde sich mit Berücksichtigung dessen noch viel kleiner ergeben. Aber es gilt weiter der Einwand, daß wahrscheinlich die Verwitterung und Auslaugung des Festlandes gegenwärtig keineswegs mit der *mittleren* Geschwindigkeit — bezogen auf die ganze Erdgeschichte — vor sich geht. Auch ist das Mengenverhältnis der im Meereswasser befindlichen chemischen Elemente seiner Salze ein ganz anderes wie in den verwitterten Gesteinen, aus denen die Salze ausgelaugt sein sollen. So herrscht in den Mineralien Kalium gegenüber dem Natrium vor, während im Meereswasser das Natrium bei weitem überwiegt; in den Mineralien ist fünfmal mehr Natrium enthalten wie Chlor, im Meereswasser herrscht Chlor gegenüber dem Natrium wesentlich vor. Es ist also nicht nur der Salzgehalt des Meeres bezüglich seiner Entstehung, sondern auch der Verbleib des aus den Gesteinen gelaugten Natriums noch mit einem großen Geheimnis umgeben. Beinahe will es scheinen, als ob das dem Meere zugeführte Natrium seinen Weg in die Festländer zurückfände. Jedenfalls muß die Abschätzung des Meeresalters aus dem Kochsalzgehalte als recht schlecht begründet angesehen werden.

---

1) Siehe Fußnote 1 auf S. 30.
2) G. Schott, Physik. Meereskunde. Sammlung Göschen 112. Berlin 1924, S. 24.
3) Siehe L. Kober a. a. O., S. 32.

Methodisch einen großen Fortschritt in der Förderung des Problems bedeutete es daher, als es von Lord Kelvin (W. Thomson) rein physikalisch angegriffen wurde. Er stellt die Frage so: *Welche Zeit ist seit Erstarrung der Erde aus dem feuerflüssigen Zustande verstrichen, bis sich durch Ausstrahlung der Wärme in den Weltenraum die heute beobachtbare Verteilung der Temperatur im Erdinnern ergeben hat?* Kennt man die Schmelztemperatur des Gesteinsmantels an der Erdoberfläche, seine Schmelzwärme, seine Leitfähigkeit für Wärme, die Strahlungsgesetze und deren Konstanten sowie die geothermische Tiefenstufe, so muß die theoretische Physik die gestellte Frage bestimmt beantworten können. Da zu seiner Zeit (1869) die verlangten empirischen Daten nicht genau genug bekannt waren, konnte Thomson nur die ungefähre Antwort geben: *„Ich glaube aber, daß wir mit vieler Wahrscheinlichkeit sagen können, daß die Erstarrung der Erde vor nicht weniger als $20 \cdot 10^6$ Jahren und vor nicht mehr als $400 \cdot 10^6$ Jahren stattgefunden haben kann“.*[1]) Die Rechnungen Thomsons sind in neuerer Zeit nachgeprüft worden. L. R. Ingersoll und O. J. Zobel[2]) finden mit genauerer Kenntnis der empirischen Daten $22 \cdot 10^6$ Jahre für die Zeit, seit die Erde sich von der Oberflächentemperatur von 1000^0 C auf den heutigen Zustand abgekühlt hat. — Doch haben auch diese rein physikalischen Schätzungen heute nur noch einen sehr bedingten Wert. Denn W. Thomson wußte noch nichts davon, daß in der Erdrinde dauernd radioaktive Stoffe in Umwandlung begriffen sind[3]) und daß dabei große Wärmemengen frei werden; die beiden letztgenannten Forscher stellen rein theoretisch ihre Betrachtungen unter der ausdrücklichen Voraussetzung an, daß diese radioaktive Wärme außer Ansatz bleiben soll. Tatsächlich ist sie aber vorhanden, wahrscheinlich sogar in einem solchen Ausmaße, daß dadurch heute der jährliche Wärmeverlust der Erde durch ihre Ausstrahlung in den Weltenraum vollauf gedeckt wird, d. h. gegenwärtig sich die Erde überhaupt nicht mehr abkühlt.[3]) *Daher ist die nach der Thomsonschen Rechnung erhaltene Zahl von $22 \cdot 10^6$ Jahren für das Alter der Erde viel zu klein; sie stellt einen alleräußersten Grenzwert nach der Seite der kleinen Zahlen hin dar.*

Immerhin haben diese früheren Versuche einer Altersbestimmung den Geologen daran gewöhnt, daß mit unerwartet großen Zahlen gerechnet werden muß. In Hinsicht auf die demgegenüber verschwindend geringe Dauer der uns bekannten menschlichen Geschichte „scheute man sich, die enormen Zahlen“ anzuerkennen.[4]) Ergaben sich doch schon für die Dauer der Jetztzeit, d. h. der Zeit, in welcher sich die Formen der organischen Natur nicht erkennbar geändert haben und seit der diluvialen Vergletscherung so große Zahlen, daß man daran nicht recht glauben mochte. Das klassische Beispiel ist die Schätzung aus dem jährlichen Zurückweichen des Niagara-Falles. Dieses beträgt rund $^1/_3$ m; da der Fall heute 12 km von seiner ursprünglichen Einsturzstelle in den Ontario-See entfernt ist, berechnet sich daraus ein Zeitraum von 36000 Jahren seit der Ausbildung der heutigen Verhältnisse, d. h. seit dem Diluvium.[4]) Die Unsicherheit aber auch dieser Schätzung zeigt sich darin, daß sie von Lyell auf

---

1) Thomson u. Tait, Mechanik. Braunschweig 1871, Friedr. Vieweg & Sohn, S. 440.

2) Journ. Geology. 1911. S. 686.

3) Siehe z. B. Grimsehl, Lehrbuch der Physik. II. Band. Leipzig 1923, B. G. Teubner, S. 575.

4) H. Credner, Lehrbuch der Geologie. Leipzig 1891, Engelmann, S. 279.

70000 Jahre, von neueren Forschern auf nur 7000 Jahre veranschlagt wurde.[1]) Auf sehr viel sicherer — und, wie es scheint, sogar völlig einwandfreier — Grundlage ruht eine neueste Berechnung des schwedischen Geologen Gerard de Geer über die Zeit, welche in Schweden seit dem Abschmelzen des diluvialen Gletschers verflossen ist; er findet für das Ende des Diluviums 8800 Jahre,[2]) während vor 14500 Jahren der Eisrand des Gletschers noch in Schonen lag.

Großes Aufsehen mußte es deshalb in der wissenschaftlichen Welt machen, als 1907 der amerikanische Physiker B. B. Boltwood einen neuen, rein physikalischen Weg zu einer Altersbestimmung von Gesteinen aufzeigte.[3]) Er wies nämlich darauf hin, daß wahrscheinlich *Blei* das letzte Produkt der radioaktiven Umwandlung von Uran sei und daß deshalb in einem uranhaltigen Mineral das Verhältnis von dem in ihm enthaltenen Blei zum Uran desto größer sein müßte, je älter das Mineral wäre. Er stellte die ersten derartigen Altersberechnungen an. Gegenüber dieser *„Bleimethode“* verfolgte von 1910 ab zunächst R. J. Strutt (seit dem Tode seines Vaters 1919: Lord Rayleigh) grundsätzlich denselben Gedanken auf einem etwas anderen Wege, indem er das Verhältnis des in radioaktiven Mineralien aufgespeicherten, radioaktiven Prozessen entspringenden *Heliums* zu den radioaktiven Ausgangselementen Uran und Thor bestimmte und daraus auf das Alter der Mineralien schloß. Er zeigte durch diese *„Heliummethode“* zuerst mit einiger Zuverlässigkeit, daß ein nachtertiärer Sanidinit vom Vesuv etwa 100000 Jahre, ein Roteisenstein aus dem englischen Karbon mindestens $150 \cdot 10^6$ Jahre alt sein mußte.[4]) Besonders in England und den Vereinigten Staaten von Nordamerika hat man in der Folge den radioaktiven Altersbestimmungen zahlreiche Untersuchungen gewidmet und sie mehr und mehr verfeinert. Eine ausführliche Zusammenstellung von R. W. Lawson im Jahre 1917 in den „Naturwissenschaften“ (Heft 26/27), eine andere Darstellung von Gerh. Kirsch im Jahre 1923 in der gleichen Zeitschrift (Heft 20)[5]) haben die deutsche Öffentlichkeit darüber unterrichtet. Kein Geringerer als Prof. Dr. O. Hahn, zweiter Direktor des Kaiser-Wilhelm-Instituts für Chemie in Berlin-Dahlem, der in Deutschland führende Forscher über Radioaktivität, hat in diesem Jahre in einer kleinen Schrift[6]) die bisher gesicherten Ergebnisse der Forschung noch einmal zusammengestellt und auf ihre Bedeutung hingewiesen. Wir folgen wesentlich seinen Mitteilungen:

Die Heliummethode. Die radioaktiven Elemente *Uran* und *Thor* sind in sehr geringen Mengen weit verbreitet; Lord Rayleigh zeigte 1906, daß sie fast in allen Mineralien vorkommen. Besonders reich sind häufig die kleinen *Zirkonkristalle*, die als akzessorischer Bestandteil oder als mikroskopisch kleine Einsprengungen in anderen Mineralien nicht selten angetroffen werden. Die Atome von Uran und Thor senden nun dauernd α-Strahlungen aus; in Luft besitzen

1) E. Kayser, Abriß der allgemeinen und stratigraphischen Geologie. Stuttgart 1920, Ferd. Enke, S. 27.

2) Siehe Karl Troll, Methoden, Ergebnisse und Ausblicke der geochronologischen Eiszeitforschungen. Naturwissenschaften 13. 1925. S. 918.

3) Phys. Zeitschr. 8. 1907. S. 102. 4) Proc. Roy. Soc. 84. 1910. S. 379.

5) G. Kirsch, Was vermögen die radioaktiven Methoden der Altersbestimmung von Mineralien heute zu leisten? Naturwissenschaften 11. 1923. S. 372

6) O. Hahn, Was lehrt uns die Radioaktivität über die Geschichte der Erde? Berlin 1926, Julius Springer.

die α-Teilchen verschiedene Reichweiten von 2,5 bis 8,6 cm,[1]) innerhalb der festen Mineralien werden die Teilchen schon nach einem Wege von wenigen hundertstel Millimetern zur Ruhe abgebremst. Da die α-Teilchen nach Neutralisation ihrer positiven Ladung zu Heliumatomen werden, so muß sich das radioaktiv entwickelte Helium im Laufe der Zeit in den Mineralien aufspeichern. Es wird von ihnen ziemlich festgehalten; erst durch Pulverisieren der Mineralien und Glühen oder Schmelzen in Ätzalkalien wird das Helium von ihnen befreit und kann seiner Menge nach bestimmt werden. Nun weiß man, daß 1 g Uran im Jahre 10^{-7} ccm Helium bei Atmosphärendruck entwickelt und daß diese Entwicklung durch künstliche Eingriffe von außen, etwa durch Temperatursteigerungen oder große Drucke, ganz und gar nicht beeinflußt werden kann. Findet man daher in einem Mineral 1 ccm Helium für jedes Gramm Uran, so muß das Mineral 10000000 Jahre alt sein. Erst bei sehr alten Mineralien, wenn man etwa 50 ccm Helium auf das Gramm Uran findet, kann man diesen einfachen Proportialansatz nicht mehr machen, da durch den Zerfall die Uranmenge selbst vermindert worden ist. Das wird aber leicht nach den rechnerischen Ansätzen berücksichtigt, die unter der „Bleimethode" besprochen werden sollen. Im vorliegenden Falle würde aus diesem Grunde die Uranmenge um 7 % zu vergrößern sein.

Nun ist im allgemeinen neben dem Uran in jedem Minerale Thor anzutreffen. Da aber die radioaktive Umwandlung von Thor etwa nur ein Drittel mal so schnell geht wie die von Uran, genügt es, wenn man das 0,3 fache der im Minerale enthaltenen Thormenge als äquivalente Uranmenge zur analytisch gefundenen Uranmenge hinzuzählt und nun mit der Summe: Ur + 0,3 Th rechnet, als ob man nur Uran vor sich hätte. Damit ist die Berechnung der Zeit nach der einfachen Gleichung

$$t = \frac{\text{He (cm}^3)}{\text{U} + 0{,}3\ \text{Th}} \cdot 10^7 \text{ Jahre} \quad \text{gegeben.}$$

Doch besitzt die Methode noch Fehlerquellen. Vorausgesetzt wird zunächst, daß seit seiner Auskristallisation der Kristall des Minerals keinen chemischen Umsatz außer dem radioaktiven der radioaktiven Bestandteile erfahren hat. Irgendwie verwitterte oder sonstwie chemisch veränderte Kristalle müssen also ausscheiden. Es trifft sich gut, daß besonders die *Zirkone* äußerst harte und auch chemisch fast unangreifbare Körper sind, die selten verwittert angetroffen werden. Aber eine andere Frage ist noch die, ob nicht doch im Laufe der Jahrmillionen das entwickelte Helium durch das Gitter des Kristalls hindurchdiffundiert und aus den Kristallen entweicht. Und ganz gewiß tut das Helium das auch. Schon beim Pulverisieren der Kristalle wird bis ein Drittel seines Heliumgehaltes in Freiheit gesetzt. Wir dürfen weiter annehmen, daß überhaupt alles Helium der Gasquellen radioaktiven Prozessen in den Gesteinen entspringt, daß also allmählich das Helium aus diesen den Weg in die Freiheit findet. Daher ist der ursprüngliche Heliumgehalt der Mineralien stets größer anzusetzen, als er bei der Analyse gefunden wird; die Alterszahlen, welche die Heliummethode liefert, sind also alle zu klein. Sie sind nur untere Grenzen. Wir haben Grund anzunehmen, daß der Fehler sich besonders bei sehr alten Mineralien geltend macht und hier das Alter etwa auf die Hälfte herabdrückt, während

1) Grimsehl a. a. O.

die jüngsten Mineralien von einem so großen Fehler frei sein werden. Nur unter Berücksichtigung dieser Verhältnisse ist die folgende von **Hahn** angeführte Tabelle von Meßergebnissen zu betrachten.

Tabelle I.

Geologischer Zeitabschnitt	Mineral	Heliumverhältnis $\frac{He\,(cm^3)}{U\,(g)}$	Alter in Mill. Jahren
Pliozän	Zirkon	0,146	1,5
Miozän	"	0,57	5,7
Oligozän	Siderit	0,70	7
Perm	Zirkon	3,80	38
Oberkarbon	Limonit	12,8	128
Devon	Hämatit	11,2	112
Silur	Thorianit	22,6	226
"	"	21,2	212
Ober-Präkambrium	Zirkon	25,0	250
Mittel-Präkambrium	Sphen	32,9	330
"	"	38,2	385
Unter-Präkambrium	Zirkon	54,3	550
"	Sphen	56,1	570

Die Bleimethode. Nach den Lehren der Radioaktivität[1]) sendet nacheinander ein Ur-Atom mit dem Atomgewicht 238 8 α-Teilchen aus und verwandelt sich dadurch in das Bleiisotop RaG mit dem Atomgewicht 206; ein Th-Atom vom Atomgewicht 232 sendet entsprechend 6 α-Teilchen aus und verwandelt sich in das Bleiisotop ThD mit dem Atomgewicht 208. Während die beiden Isotope chemisch alle Reaktionen des Bleis zeigen, ist das „gewöhnliche" Blei von ihnen durch sein Atomgewicht 207, 18 unterschieden. Bezeichnet im folgenden U_0 die Ausgangsmenge Uran, U die nach der Zeit t noch von ihr vorhandene und Pb die in dieser Zeit gebildete Menge des Isotops RaG, so ist $Pb : (U_0 - U) = 206 : 238$ oder $U_0 = U + \frac{238}{206}\,Pb$. Nun ist nach dem Grundgesetz der Radioaktivität die jeweils vorhandene Zerfallsgeschwindigkeit der gerade vorhandenen U-Menge proportional; es gilt also

$$\frac{dU}{dt} = -\lambda U.$$

Erfahrungsmäßig ist hierin die Zerfallskonstante $\lambda = 1{,}4 \cdot 10^{\;10}$ Jahre^{-1}, d. h. in einem Jahre zerfällt etwas mehr als ein Zehntausendmillionstel der gerade vorhandenen Menge; 1 g Uran bildet also in einem Jahre $1{,}4 \cdot 10^{-10} \cdot \frac{206}{238} = 1{,}21 \cdot 10^{-10}$ g Uranblei. Die Integration der obigen Differentialgleichung ergibt

$$U = U_0 \cdot e^{-\lambda t}, \quad \text{oder} \quad U_0 = U \cdot e^{\lambda t}$$

und

$$U_0 - U = \frac{238}{206}\,Pb = U\,(e^{\lambda t} - 1).$$

Daraus bestimmt sich das Verhältnis

$$\frac{Pb}{U} = \frac{\text{Uranblei}}{\text{Uran}} = \frac{206}{238}\,(e^{\lambda t} - 1) = 0{,}87\,(e^{\lambda t} - 1),$$

1) Siehe Grimsehl a. a. O.

und wir berechnen
$$t = \frac{\operatorname{lognat}\left(\frac{1}{0{,}87}\,\frac{Pb}{U} + 1\right)}{\lambda} \text{ Jahre.}$$

Ist die Bleimenge Pb klein gegen die Uranmenge U, so kann man dafür schreiben
$$t = \frac{Pb}{U} \cdot \frac{1}{0{,}87 \cdot 1{,}4 \cdot 10^{-10}} \text{ Jahre} = \frac{Pb}{U} \cdot 8200 \cdot 10^6 \text{ Jahre.}$$

Bei größeren Werten des Verhältnisses Uranblei: Uran ist mit der strengeren logarithmischen Formel zu rechnen.

Für die Altersbestimmung in einem neben dem *Uran* noch *Thor* enthaltenden Mineral ergibt sich entsprechend (s. o.) (nach Lawson) die Nährungsformel
$$t = \frac{Pb}{U + 0{,}384\,Th}\, 8200 \cdot 10^6 \text{ Jahre.}$$ [1])

Von der entsprechenden die Heliummethode störenden Fehlerquelle, daß nämlich im Laufe der Zeit sich aus dem unzersetzten Kristalle sollte Blei entfernt haben, scheint die Methode im allgemeinen frei zu sein. Dafür könnte sie daran leiden, daß schon bei der Bildung des Kristalles dieser „gewöhnliches“ Blei aufgenommen hat, so daß die Bestimmung des Verhältnisses Blei : Uran für die Altersberechnung zu groß ausfällt. In gewissen Fällen gibt es für diese Fehlerquelle eine Aufklärung. Diese kann nämlich in einer sorgfältigen Bestimmung des Atomgewichtes des aufgefundenen Bleis gefunden werden. Liegt dieses in großer Nähe von 206, so darf man annehmen, nur Uran-Blei vor sich zu haben; werden Werte zwischen 206 und 207,2 gefunden, so kann man — bei Abwesenheit von Thor wenigstens — den Anteil des störenden, gewöhnlichen Bleis berechnen und ausschalten. — Von der Genauigkeit, mit der auf chemisch-analytischem Wege das Verhältnis Pb : U bestimmt worden ist, zeugt folgende Tabelle der Analyse einer größeren Anzahl kristallisierter norwegischer Uranmineralien, sog. *Bröggerite.* Sie stammen aus gleicher geologischer Fundstätte und haben daher vermutlich dasselbe Alter. Die Analysen wurden teils in Norwegen, teils in Amerika ausgeführt (1922).

Tabelle II.

Lauf. Nr.	Uran	Blei	Pb : U	Alter im Durchschnitt
1	69,30	8,77	0,118	
2	66,14	9,38	0,132	
3	66,48	9,39	0,131	
4	66,34	8,92	0,125	
5	68,10	8,80	0,120	
6	63,36	8,88	0,130	
7	64,39	8,93	0,129	$950 \cdot 10^6$ Jahre.
8	66,14	9,25	0,130	Eine Durchschnittsprobe zeigte durch die Atomgewichtsbestimmung des Bleis 90 % Uranblei und 10 % gewöhnliches Blei.
9	66,13	9,27	0,130	
10	66,58	9,23	0,129	
11	66,34	9,25	0,130	
12	61,67	8,64	0,130	

1) Siehe dazu auch W. Eitel, Über die absolute Altersmessung radioaktiver Mineralien. Naturwissenschaften 13. 1925. S. 362.



Die nächste Tabelle gibt eine Anzahl von Altersbestimmungen nach der *Bleimethode* für verschiedene geologische Zeitalter.

Tabelle III.

Serie	Mineral	Fundort	Pb : Ur		Mittleres Alter in Millionen Jahren
I	Uraninit	Glastonbury Conn. U.S.	0,041	Mittel 0,041	**Karbon:** 335 Millionen Jahre
	"	"	0,042		
	"	"	0,039		
	"	"	0,041		
	"	"	0,040		
II	Uraninit	Morogoro, Ost-Afrika	0,094	Mittel 0,093	Geol Alter unbestimmt. Jedenf. jüng. a. IV u. VIII. 730 Millionen Jahre. Atomgew. d. Bleis 206,05 (Hönigschm. u. Horovitz)
	"	"	0,092		
III	Uraninit	Anneröd, Norwegen	0,13	Mittel 0,13	**Mittel-Präkambrium:** 1050 Millionen Jahre Atomgewicht des Bleis 206,06 (Hönigschmid u. Horovitz)
	"	"	0,12		
	Anneröдit	"	0,15		
	Uraninit	Elvestad, Norwegen	0,14		
	"	"	0,14		
	"	Skaartorp, Norwegen	0,135		
	"	Huggenäskilen, Norw.	0,13		
	"	"	0,12		
	Bröggerit	Moos, Norwegen	0,13		
	"	"	0,13		
IV	Zirkon	Nrassi-Bassin, Mozambique	0,17	Mittel 0,15	Geol. Alter unbekannt. Jedenfalls jüng. als VIII. 1150 Millionen Jahre
	"	Monapo-Fluß, Mozambique	0,15		
	Biotit	Ligonia, Zambesia	0,14		
V	Fergusonit	Ytterby, Schweden	0,17	Mittel 0,16	**Mittel-Präkambrium:** 1150 Millionen Jahre
	Gadolinit	"	0,15		
VI	Uraninit	Villeneuve, Quebec Ontario	0,17		**Mittel-Präkambrium:** 1250 Millionen Jahre
VII	Cleveit	Arendal, Norwegen	0,19	Mittel 0,18	**Mittel-Präkambrium:** 1350 Millionen Jahre. Atomgewicht des Bleis 206,08 (Richards und Wadsworth)
	Uraninit	"	0,18		
	"	"	0,17		
	"	"	0,17		
	Xenotim	Naresto, Norwegen	0,21		
VIII	Zirkon	Mozambique	0,21		**Unter-Präkambrium:** 1600 Millionen Jahre

Gegenüber der Heliummethode ergeben sich für die ältesten Formationen etwa dreimal so große Alterszahlen.

Da die präkambrischen Sedimente Meeresablagerungen sind, so wird durch diese Bestimmungen das Alter des Meeres auf über 1600 Millionen Jahre hinaus-

gerückt; das ist eine mindestens zehnmal so lange Zeit, als sie aus dem Kochsalzgehalte berechnet wurde.

Eine *dritte radioaktive Methode* der Altersschätzung beruht auf der Erklärung der sog. „pleochroitischen Höfe“ in durchsichtigen Mineralien. Es sind das äußerst kleine konzentrische Farbkreise, die man an Dünnschliffen von Glimmer, Turmalinen, auch Flußspaten u. a. häufig bemerkt. Fast gleichzeitig erklärten (1907) B. Mügge und J. Joly sie als Verfärbungen durch radioaktive Strahlungen, ähnlich wie Glas durch Radiumstrahlung — auch Röntgenstrahlung — violett gefärbt wird. In der Mitte jener Kreise — genauer Kugelschalen — sitzt eine mikroskopisch kleine Einsprengung eines radioaktiven Minerals; die einzelnen Farbzonen entsprechen α-Teilchen verschiedener Reichweiten. Mißt man nun die Größe der Einsprengung mikroskopisch aus und schätzt ihren Gehalt an radioaktivem Material aus bekannten makroskopischen Vorkommnissen — etwa 10% z. B. für Zirkone —, so kann man auf die Dauer der Strahlung aus der durch Kontrollversuche mit bekannten Mengen radioaktiver Stoffe ausmeßbaren Stärke der Verfärbung schließen. Die Ergebnisse stehen mit den beiden anderen Methoden in gutem Einklang. So ergab sich für das Alter des Unterdevon als höchster Wert 470 Millionen Jahre. An Genauigkeit kann diese Methode aber mit den beiden anderen nicht in Wettbewerb treten, denn die Schätzung der kleinen Einsprenglinge auf ihren radioaktiven Gehalt ist ziemlich unsicher. Aber etwas anderes beweisen diese mikroskopisch kleinen Höfe. Ein auch nur kurzes Erhitzen auf ein paar hundert Grad bleicht die Ringe sofort aus. Während der mehreren hundert Millionen Jahre, die diese Mineralien sicher in der festen Erdkruste geruht haben, hat also niemals eine wesentlich höhere Temperatur an der Erdoberfläche geherrscht, wie wir sie heute beobachten.

In dem weit verbreiteten Lehrbuche der Geologie von P. Wagner[1]) heißt es über die Bildung geologischer Formationen: „Es wird nie gelingen, diese Ereignisse und ihre Dauer *zeitlich* festzulegen. Alle Bemühungen, geologische Bildungen nach Jahren oder auch nur nach Jahrmillionen zu berechnen, sind fruchtlos . . .“ Das kann sich in dieser bestimmten Ausdrucksweise nur auf die ursprünglichen, rein geologischen Methoden beziehen; „es kann kaum einem Zweifel unterliegen, daß die Altersbestimmungen nach der Bleimethode, wenn das Material gut ausgesucht und geologisch eindeutig definiert ist, wenn außerdem wirklich gute Analysen des Urans, des Bleis und gegebenenfalls des Thors vorliegen, an Zuverlässigkeit von keiner anderen Methode geologischer Altersbestimmung erreicht wird.“[2]) Wir werden also wohl die Scheu ablegen müssen und uns in der Geologie an unverstellbar große, aber bestimmt angebbare Zeiträume gewöhnen wie früher in der Astronomie an die unfaßbaren Dimensionen der Sternenräume, in der Atomwelt im entgegengesetzten Sinne an die unfaßbar kleinen Abmessungen und Massen dieser Körperchen sowie der kleinen Zeiten von Elektronenschwingungen. — Erst durch die neuzeitlichen Altersbestimmungen auf radioaktiver Grundlage erfährt nun auch der geologische Vorstellungskreis jene Bestimmtheit im Sinne Einsteins, der als Merkmal der physikalischen *Realität* eines Begriffes seine eindeutige Meßbarkeit verlangte. Die geschilderten radioaktiven Methoden der Altersbestimmung geologischer

1) S. o. a. a. O. S. 139. 2) O. Hahn, a. a. O. S. 20.

Zeitalter müssen heute durchaus die grundsätzliche Zuständigkeit sonstiger physikalischer Meßmethoden für andere Zwecke für sich in Anspruch nehmen; für alle geologischen Lehren, aber auch alle kosmologischen Spekulationen, soweit sie die Erde und die Sonnenstrahlung betreffen, werden ihre Ergebnisse in Zukunft den unantastbaren Rahmen zeitlicher Fixpunkte bestimmen.

Hamburg. W. Hillers.

Versammlungen und Kurse.

Die 89. Naturforscherversammlung in Düsseldorf, 19. bis 26. September 1926. Eine noch auf keiner Versammlung erreichte Zahl von Naturforschern und Ärzten — man spricht von angenähert 10000 — hatte sich zu der Tagung in Düsseldorf eingefunden. Lockten doch diesmal nicht nur die Vorträge und sonstigen Veranstaltungen, sondern auch die unvergleichlich reichhaltige, in jeder Hinsicht gediegene und obendrein geschmackvolle Ausstellung für Gesundheitspflege, Leibesübungen und soziale Fürsorge, die „Gesolei". So war denn auch wohl von der Mehrzahl der Teilnehmer der überwiegende Teil der Versammlungs-„Arbeit" der Besichtigung der Gesolei gewidmet. Das Versammlungs-Handbuch hatte für jede der 34 Abteilungen die besonders wichtigen Ausstellungsgebiete zusammengestellt. Für die Angehörigen der Unterrichtsabteilung fand sich freilich nur die lakonische Bemerkung: „Mathematischer und naturwissenschaftlicher Unterricht ist nicht besonders vertreten." Die Düsseldorfer Geschäftsführung schien nicht zu ahnen, welche Fülle von Anregungen die Ausstellung gerade den Lehrern der Mathematik und der Naturwissenschaften gab. Ich nenne nur, ohne den Versuch der Vollständigkeit, die Ausstellungen Naturschutz, vorgeschichtlicher Mensch, durchsichtiger Mensch, die Leihausstellung aus dem Dresdener Hygienemuseum; der Mathematiker fand eine Fülle von Beispielen und Methoden graphischer Darstellungen jeglicher Art, der Physiker z. B. für Akustik, Optik, Wärmelehre, Elektrizität (Röntgentechnik!) eine unabsehbare Menge von methodischen und stofflichen Anregungen, reich bedacht war der Biologe, ich nenne etwa die Darstellung des Mendelismus, die Bakterienkunde usf. Auch rein organisatorische Fragen kamen zur Darstellung; so fand sich im Österreichhaus gutes Material über das österreichische Schulwesen. Hätte es nicht übrigens nahe gelegen, auch für Deutschland das allgemeine Schulwesen (das Fachschulwesen war vertreten!) in ausgiebigerer Weise heranzuziehen?

Von den allgemeinen Veranstaltungen sei nur die Eröffnungssitzung mit einigen Worten berührt; wegen aller Einzelheiten verweise ich auf den in den „Naturwissenschaften" erscheinenden Gesamtbericht. In der Eröffnungsrede des Vorsitzenden des Düsseldorfer Ortsausschusses, des Mediziners Schloßmann, fiel allgemein die heftige Attacke auf, die er gegen das Unterrichtswesen von heute ritt: „Wir sind[1]) leider dahin gekommen, daß entgegen dem so oft erwähnten und so selten beachteten Grundsatz: „Bahn frei dem Tüchtigen" gerade umgekehrt dem Untüchtigen die Pforten der höheren Bildung, die Gymnasien und die Hochschulen weit geöffnet worden sind. Wir haben die Anforderungen immer mehr und mehr herabgesetzt und heute kann jeder, so dumm wie er ist, schließlich alle Prüfungen ablegen. Man sollte die Anfor-

1) Ich entnehme die wörtlichen Zitate in diesem Bericht den vom Presseamt den Schriftleitern zur Verfügung gestellten Verhandlungsauszügen.



derungen an den Kreis derer, die zum Studium kommen, und den Kreis derer, die das Studium erfolgreich beenden, wesentlich erhöhen und nicht uns Ärzte als Kronzeugen mißbrauchen, wenn man dauernd die Anforderungen mindert und auch heute noch von Überbürdung redet, denn gerade wir wissen, daß nicht die Schonung, sondern die Übung zu Höchstleistungen auch auf geistigem Gebiet führt. Aber Menschen, die solche Höchstleistungen aufweisen, tun uns bitter not. Es will mir scheinen, als ob sie zu dünn hineingesät werden in den großen Garten der Mittelmäßigkeit. Aber Mittelmäßigkeit der Begabungen, des Fleißes und der Leistungen genügt nicht, um den deutschen Menschen geeignet zu machen, auf daß er den Anforderungen genüge, die die nächsten Jahre und Jahrzehnte an uns stellen werden. Der Wiederaufbau Deutschlands erfordert ein Geschlecht von Riesen in bezug auf guten Willen, Anstrengung und Leistung. Nur, wenn jeder das Letzte hergibt an Kraft und zu jedem Opfer bereit ist, können wir unser Vaterland wieder in die Höhe bringen."

Der preußische Unterrichtsminister, der als zweiter namens der Reichs- und preußischen Staatsregierung sprach, parierte sehr geschickt. Er stimmte seinem Vorredner bei: „Strenge vom Abitur bis zum Staatsexamen muß die Losung dieser harten Zeit sein ... Wir dürfen die Jugend nicht abschrecken, aber sie auch nicht verweichlichen." Er wies aber mit guter Ironie darauf hin, daß gerade das medizinische Staatsexamen dasjenige sei, durch das durchzufallen am schwersten sei. Nach weiteren Ansprachen der Vertreter der verschiedenen Behörden und Hochschulen ergriff dann der erste Vorsitzende, v. Dyck-München, das Wort zu einer groß angelegten Einführungsrede. Er kennzeichnete, nachdem er den an den Vorbereitungen beteiligten Persönlichkeiten den Dank der Gesellschaft abgestattet hatte, die Aufgaben der Naturforschergesellschaft und gab einen Rückblick auf die letzten Jahre. Dabei erinnerte er mit Wärme an die Beteiligung der Gesellschaft an den Unterrichtsfragen. Dann gedachte er in ausführlicher Darlegung des Physikers Frauenhofer, der vor hundert Jahren gestorben, des Mathematikers Riemann, der vor hundert Jahren geboren wurde, um schließlich ein Lebensbild von Felix Klein zu entwerfen, dessen Vaterstadt Düsseldorf übrigens, wie der Oberbürgermeister mitteilte, einer Straße den Namen des großen Mathematikers geben will.

Die Mathematiker (Abteilung 1) hatten, wie immer, trotzdem sie alljährlich tagen, ein reiches Vortragsprogramm. Freilich waren es zum Teil recht spezielle, nur dem Eingeweihten verständliche Fragen, die da behandelt wurden. Selbst die größeren „Berichte" gehörten zum Teil zur gleichen Kategorie. Die Abteilung gibt seit den letzten Jahren den Jahresversammlungen des Reichsverbandes mathematischer Gesellschaften eine Heimstätte. Diese, mit der Unterrichtsabteilung gemeinsame Sitzung brachte diesmal einen groß angelegten, außerordentlich anregenden Vortrag von Toeplitz-Kiel, den Frau Steiger-Essen lebendig vorlas (der Verfasser war stimmlich behindert, beteiligte sich aber an der Diskussion): Das Problem der Universitätsvorlesungen über Infinitesimalrechnung und ihre Abgrenzung gegenüber der Infinitesimalrechnung der höheren Schulen. An den Vortrag, der, wie ich wünschen möchte, bald im Druck erscheinen wird, schloß sich eine lebhafte Erörterung. An zweiter Stelle trug dann Ebner-Berlin die vom Reichsverband ausgearbeiteten Richtlinien für den Unterricht im geometrischen Zeichnen vor, die eine Ergänzung zu dem seinerzeit ausgearbeiteten mathematischen Minimalplan (vgl. diese

Zeitschrift 57 [1926] S. 1 ff.) bilden (wir kommen darauf zurück). Schließlich erstattete Hamel-Berlin den Arbeitsbericht über das letzte Jahr.

Eine schier unübersehbare Reihe von Vorträgen brachten die Abteilungen zwei und drei über Physik und technische Physik, die zum Teil gemeinsam, zum Teil auch gemeinsam mit der ersten Abteilung tagten. Den Höhepunkt bildete wohl eine unter dem Vorsitz von Einstein stehende Sitzung der Abteilungen 1 bis 3 mit dem Thema Quantenmechanik, in der unter anderem Heisenberg-Kopenhagen referierte.

Im Rahmen der Unterrichtsabteilung hatte der DAMNU die sämtlichen Abteilungen der naturwissenschaftlichen Sparte zu einer größeren Veranstaltung eingeladen. Konen-Bonn legte in kurzen Worten eine Entschließung vor, die einstimmig angenommen wurde und die sich dann die Naturforschergesellschaft als solche in ihrer Geschäftssitzung zu eigen machte. Sie lautet:

Die Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte hat mit Sorge bemerkt, daß bei der Neuordnung des Unterrichtswesens in verschiedenen Staaten des Deutschen Reiches eine Zurückdrängung der Naturwissenschaften und der Mathematik stattgefunden hat, durch die wesentliche Teile der Stellung verlorengegangen sind, die sich diese Wissenschaften im Bildungswesen des deutschen Volkes mit Recht erworben hatten.

Mit Nachdruck weist die Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte darauf hin, daß die Ausbildung der Mediziner, Naturwissenschaftler, Techniker und Wirtschaftsführer ohne einen gegenüber dem jetzigen Zustand vermehrten Anteil der Mathematik und der Naturwissenschaft an der Unterrichtszeit aller Schulgattungen gefährdet wird, daß aber auch in der Bildung des gesamten Volkes die Naturwissenschaften und die Mathematik als *Kultur*fächer ersten Ranges ihren gebührenden Platz beanspruchen.

Die Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte richtet daher an die Regierungen und die Volksvertretungen der Länder in vollem Bewußtsein der ihr als Vertreterin der Gesamtheit der deutschen Naturforscher und Ärzte zustehenden Verantwortung die Aufforderung, nicht weiter zu gehen auf einer Bahn, die wesentliche Teile deutscher Kultur, Bildung und Leistung bedroht, vielmehr die bisher bereits eingetretene Schädigung baldigst zu beheben.

Die Gesellschaft erinnert daran, daß sie im Verein mit den Vertretungen fast aller wissenschaftlichen und technischen Vereine ihres Gebietes den Deutschen Ausschuß für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht (DAMNU) geschaffen hat, dessen Aufgabe es ist, die Bildungs- und Unterrichtsfragen aus dem Gesamtgebiet der Mathematik und der Naturwissenschaften sachkundig zu bearbeiten und dafür Sorge zu tragen, daß im Wettstreit der verschiedenen Bildungsstoffe die Mathematik und die Naturwissenschaften nicht benachteiligt werden. Sie erwartet mit Zuversicht, daß die Unterrichtsverwaltungen bei künftigen Entscheidungen aller organisatorischen und methodischen Fragen des naturwissenschaftlichen und mathematischen Unterrichtes, wie auch bei Ausbildung der Lehrer aller Gattungen rechtzeitig die Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte zu Rate ziehen und ihr Gelegenheit geben werden, ihre maßvollen und wohlerwogenen Vorschläge geltend zu machen.

Es folgten dann Ausführungen von v. Dyck-München über Bayerns Stellung zum Gedanken der Schulreform. Der historische Rückblick zeigte die Entstehung des bayerisch-humanistischen Gymnasiums, der bayerischen Oberrealschule aus der Real- oder Industrieschule sowie des bayerischen Realgymnasiums. Das bayerische Ministerium hat Aufbauschule und deutsche Oberschule abgelehnt. Das Ideal sieht der Redner darin, daß nur zwei Schularten bestehen und betrachtet dieses als das Ende der Entwicklung in Bayern. Der Vortragende warnte sodann vor jeder Verzettelung durch allzu viele Fächer; er will Chemie und Biologie auf der Oberstufe aller höheren Schulen aufs

alleräußerste beschränken. Die Schülerübungen dagegen sollen möglichst zeitig pflichtmäßig einsetzen. So fordert er solche für Physik schon frühzeitig als vorbereitenden Kursus in Untertertia.

Leider ging der Redner nicht näher auf die neuen bayerischen Lehrpläne ein, die in ihren Stundentafeln eine starke Zurückdrängung der mathematisch-naturwissenschaftlichen Fächer bringen, in der Mathematik weit über das in Preußen gesetzte, an sich schon reichlich bedenkliche Ausmaß hinaus. Wagner-Dresden gab ein Bild von der Lage in Sachsen, wo die Veröffentlichung der neuen Stundentafeln in Kürze bevorsteht. Reisinger-Benzheim schließlich referierte über die neuen Stundenverhältnisse in Hessen. Die Redner konnten feststellen, daß unsere Fächergruppe in ihren Ländern besser abschneidet als in Preußen. Es muß aber immer wieder hervorgehoben werden, daß die gewährte Wochenstundenzahl trotzdem durchaus noch nicht den berechtigten Ansprüchen genügt.

In der Unterrichtsabteilung fand außerdem nur noch eine einzige Sitzung statt. Der mathematische Unterricht fiel dabei ganz aus. Der Physiker hörte u. a. kurze, eine lebhafte Erörterung auslösende Anregungen zur Gestaltung der Elektrizitätslehre im Unterricht von R. Mayer-Berlin und A. v. Engel-Berlin, die energisch begründete Forderung von Prodinger-Mödling, Österreich, physikalische Übungen und physikalischen Unterricht in eine Hand zu legen[1]), und er sah sehr schöne, elegante optische Versuche von Liesegang-Düsseldorf mit einer kleinen Metallfadenlampe als Leuchtquelle. Den Auftakt zu der Sitzung hatte Winderlich-Oldenburg mit einem formvollendeten, allgemeinen Vortrag gegeben: „Technik oder Theorie? Ein Beitrag zu den Fragen nach Ziel und Methode in den naturwissenschaftlichen Unterrichtsfächern."

Zieht man das Fazit aus dieser Versammlung, nicht für die Sache der Forschung, sondern für die Sache der Schule und insbesondere für die Sache des mathematischen und physikalischen Unterrichts, so muß man wohl doch einem gewissen Gefühl der Enttäuschung Ausdruck geben. Es ist vielleicht ein nicht mißzuverstehendes Zeichen der Zeit, wenn in einem der großen, allgemeinen Vorträge mit dem eigentümlichen Titel „Das morphologische Bedürfnis" dauernd gepredigt — das ist das rechte Wort — wurde: Weg von Newton, hin zu Goethe! daß mit allen Mitteln rednerischer Begeisterung vor der Überspannung der mathematisch-mechanischen Naturerklärung gewarnt wurde, „die beginnt mit Lionardo da Vincis Ausspruch, daß keine menschliche Forschung wahre Wissenschaft heißen könne, wenn sie nicht durch mathematische Beweisführung hindurchgehe, die dann übergeht auf Galilei, der sagt, das Buch der Natur sei in mathematischer Sprache geschrieben, deren Buchstaben Dreiecke, Kreise und andere geometrische Figuren seien, weiter auf Kant, der Wissenschaft nur anerkennt, soweit Mathematik darin anzutreffen sei, und gipfelt in der Laplaceschen Weltformel und in Helmholtz' Ausspruch, die Naturwissenschaft habe sich in Mechanik aufzulösen". Mir will es auch bedenklich erscheinen, daß die Unterrichtsabteilung gar zu sehr mit eigenen Vorträgen zurückhielt, um ihren Mitgliedern die Möglichkeit zum Besuch der mathematischen, physikalischen, chemischen und biologischen Ab-

1) Die Ausführungen sind in dieser Zeitschrift erschienen, vgl. 57 (1926), S. 457 ff.

teilungen zu geben. Ich habe manchmal an die reiche Innsbrucker Speisekarte zurückgedacht, manchmal auch ein wenig neidvoll bei unserer Nachbarsektion 16 für Geschichte der Medizin und der Naturwissenschaften, der „Familie Sudhoff", in ihrem gemütlichen Stammlokal hospitiert.

Doch das nebenbei. Niemand wird von Düsseldorf geschieden sein, ohne dankbar der geistigen Bereicherung zu gedenken, die sich mit künstlerischen (ich denke nur an das Konzert im Planetarium) und gesellschaftlichen Genüssen (Rheinfahrt und Feuerwerk — oder soll ich auch das zu den künstlerischen Darbietungen rechnen?) einten.

Um die nächste Tagung stritten sich 14 Städte; es war ein heißer Kampf. Schließlich siegte die Elbe (der Vertreter von Magdeburg hatte so schön von ihr gesagt: „Auch die Elbe ist ein majestätischer Strom; wie eine Königin wälzt sie sich in ihrem Bette") und die Stadt Hamburg. Auf Wiedersehen also in Hamburg!

Göttingen. W. Lietzmann.

Bücherbesprechungen.

Die Preise der besprochenen Bücher sind nach den Mitteilungen der Verlagsanstalten im Erscheinungsmonat angegeben. Da die Buchhandlungen sich Änderungen vorbehalten, kann keine Sicherheit dafür geboten werden, daß die angegebenen Preise auch heute noch gelten.

O. Neugebauer, Die Grundlagen der ägyptischen Bruchrechnung. VI u. 45 S. gr. 4°. Mit 5 Tafeln. Berlin 1926, Julius Springer. Geh. RM 7.50.

Diese Schrift hat zwei Kapitel: 1. die begrifflichen Grundlagen der ägyptischen Mathematik, 2. die ägyptische Bruchrechnung, von denen das zweite dem Umfang und Inhalt nach das wichtigste ist. In der Tat dürfte bis jetzt niemand von denen, die sich um die Stammbruchzerlegung der Brüche und das Rechnen mit ihnen bei den Ägyptern bemüht haben, so systematisch vorgegangen sein wie der Verfasser. Soweit nicht (von ihm selbst zugestandene) Willkür herrscht, hat er infolgedessen auch die ägyptischen Verfahrungsweisen ganz aufzudecken vermocht. In sachlicher Hinsicht wird er daher wenig Widerspruch erfahren, und man darf seine Arbeit zu den besten auf diesem Gebiet zählen. In der Beurteilung der ägyptischen Leistungen freilich kann ich nicht ganz mit ihm übereinstimmen, obwohl wir auch hier in der Grundauffassung einig sind (§ 5, Abs. 2). Da eine Erwiderung aber einen ganzen Aufsatz nötig machen würde, kann ich hier nur einige allgemeine Bemerkungen machen. Niemand wird mehr als ich die großen Leistungen der Philologen auf diesem Gebiet schätzen. Wenn ich trotzdem den Standpunkt K. Sethes, wie aus meinen früheren Arbeiten hervorgeht[1]), nicht teilen kann, und auch durch Neugebauers Arbeit nicht in allen Punkten umgestimmt wurde, so möchte ich dazu sagen, daß mir wohl bewußt ist, wie leicht man zu viel in alte Verfahren hineinlesen kann. Ich glaube das sogar durch meine früheren Arbeiten (z. B. über Oresme) hinreichend bewiesen zu haben. Es besteht aber auch die Gefahr, in einem alten Verfahren nur einen Schematismus zu sehen, hinter dem gar keine Gedanken stehen. Dieser Gefahr scheint mir Sethe verfallen zu sein, und mit ihm der Verfasser, der diesmal ganz in den allerdings starken Setheschen Bannkreis geriet, so daß er seine eigenen früheren Äußerungen widerrief. Auch ist mir der Begriff der „Wissenschaft", der hierbei angewendet wird, zu eng gefaßt, und ich glaube, daß in diesem Punkte der Verfasser ein bißchen gegen seine eigenen (oben zitierten) Grundsätze handelt.

München. H. Wieleitner.

1) Diese Z. LVI (1925) S. 129—137, Arch. Storia d. Scienza VI (1925) S. 46—48, Mitt. Gesch. Med. u. Naturw. XXV (1926) S. 1—4. Eine größere Arbeit, die schon seit Sept. 1925 bei der Zeitschrift „Isis" (Brüssel) eingereicht ist und demnächst erscheint, enthält unbeabsichtigt eine Reihe von Einwendungen auch gegen den Verfasser.



Crantz-Kundt-Heinemann, Mathematisches Unterrichtswerk für höhere Mädchenbildungsanstalten. Leipzig und Berlin. B. G. Teubner.

Teil II: P. Crantz-K. Heinemann, Leitfaden der Geometrie für die Klassen IV bis UII. 11. Aufl. 1926. — Teil III: P. Crantz-K. Heinemann, Geometrische Aufgaben für die Klassen IV bis UII. 10. Aufl. 1926. — Teil IV: P. Crantz-F. Kundt, Leitfaden der Arithmetik für die Klassen UIII bis UII. 10. Auflage. 1925. — Teil V: F. Kundt, Arithmetische Aufgaben für die Klassen UIII bis UII. 10. Aufl. 1925. — Teil VI: K. Heinemann, Leitfaden der Mathematik (Geometrie und Arithmetik) für die Klassen OII bis OI. 1926. — Teil VII: K. Heinemann, Geometrische und arithmetische Aufgaben für die Klassen OII bis OI. 1926. — Ergänzungsheft I: Ch. Hurwitz, Abgekürztes Rechnen. Leitfaden und Aufgabensammlung. 1926.

Das Lehrbuch der Mathematik von Paul Crantz liegt, nachdem noch 1924 ein wenig glückliches Ergänzungsheft von L. Wichmann (Anhang D) dazu erschienen war, jetzt in neuer Bearbeitung auf Grund der Richtlinien vom 6. April 1925 vor. Es umfaßt einschließlich des noch nicht erschienenen Rechenbuches (Teil I) unter Einbeziehung des Buches von F. Kundt, Arithmetische Aufgaben für höhere Mädchenschulen, zu einem einheitlichen Unterrichtswerk den gesamten Rechen- und Mathematikunterricht an den höheren Mädchenanstalten.

Zwei Grundrichtungen beherrschen zum größten Teil die mathematische Lehrbuchliteratur: das Arbeitsprinzip und Auswahl des Stoffes mit lebenswahren Anwendungsmöglichkeiten. In der Auswahl des Stoffes darf sich ein Lehrbuch keine großen Beschränkungen auferlegen, diese muß dem Lehrenden nach seinen bestimmten Plänen überlassen bleiben. Die Stoffsammlung ist in den vorliegenden Lehrbüchern auch reichhaltig genug, im Gegenteil, im Teil VI ist sie zu reichhaltig und geht über den Rahmen der Schule hinaus. So gehören Zahlkörper (S. 104) — im Buche übrigens falsch definiert —, selbst wenn sie auch nur bei einem zusammenfassenden Abschluß des Kapitels „Aufbau des Zahlenbereichs" erwähnt werden, nicht auf die Schule, ebenso nicht die Andeutung des Beweises für den Fundamentalsatz der Algebra, wo immerhin recht weit in die komplexe Funktionentheorie eingedrungen wird (Pole), die Dedekindsche Definition von unendlichen Zahlenfolgen, der Dedekindsche Schnitt usw. Die Anwendungsgebiete der Aufgabensammlungen sind erfreulich mannigfaltig von der Küche bis zur Technik, von der Hauswirtschaft bis zur Staatsbürgerkunde. Durch zahlreiche Aufgaben wird eine eingehende Übersicht über das deutsche wie allgemeine Wirtschaftsleben vermittelt unter Benutzung der neuesten statistischen Literatur.

Der Arbeitsbegriff ist seit dem bahnbrechenden Unterrichtswerke von Lietzmann weiter entwickelt. Gegenüber dem alten Werke von Crantz ist daher auch eine straffe Scheidung zwischen Leitfaden und Aufgabensammlung erfolgt, indem, wie bei Lietzmann, die Erarbeitung des Stoffes besonders auch der Geometrie in der Aufgabensammlung erfolgt. Hier sind die Aufgabensammlungen besser als die Leitfäden. Die einzelnen Begriffe und Definitionen, Beweise der Sätze usw. müssen sich dem Arbeitsbegriff entsprechend ganz naturgemäß aus dem vorangehenden Stoff entwickeln. Das muß auch im Leitfaden erkenntlich sein. So erscheint die Stellung des goldenen Schnittes, um nur ein Beispiel zu geben, recht unmotiviert bei der Ähnlichkeit der Dreiecke (Teil II, § 31), während sie sich aus den Proportionen am Kreise ganz unmittelbar ergibt. Recht begrüßenswert sind dann wieder die vielen Aufgaben über die Eigentätigkeit der Schülerinnen in manueller Beziehung, besonders die Vermessungsaufgaben mit den genauen Angaben über Vermessungsaufzeichnungen (vor allem Teil VII).

Die Beweisführung und die Fassung der Definitionen sind nicht immer einwandfrei. Bei der Parallelendefinition der Geraden fehlt die Angabe z. B., daß die Geraden in einer Ebene liegen müssen. Die Angabe, daß bei Gleichungen ein Glied von der einen auf die andere Seite „geschafft" wird (Teil IV), muß vermieden werden. Ernste Fehler, Unklarheiten im Sinn, Ungenauigkeiten bei historischen

Angaben und Anwendung der Apparate wie Zeichnung der Figuren (teilweise wohl entstanden durch die Hast der Drucklegung) finden sich in Teil VI. Hierauf einzugehen ist überflüssig, da das Buch in Kürze in Neubearbeitung erscheint.

Stark umstritten ist das Gebiet der Differentialrechnung. Ob man überhaupt mit Differentialen (dy, dx) rechnen soll, mag jeder selbst entscheiden. In der Natur der Sache, im Grenzübergang, finden sie jedenfalls keine Berechtigung. Ich lehne daher auch Auffassungen wie $\int f(x) \cdot dx$ ab.

Frau Studienrätin Dr. Heinemann führt in Teil VI ein Wort von F. Klein an, nach dem das Werk richtunggebend beeinflußt ist: „*Der Lehrer sollte, an die natürliche Veranlagung der Jugend anknüpfend, sie langsam auf demselben Wege zu höheren Dingen und schließlich auch zu abstrakten Formulierungen führen, auf dem sich die ganze Menschheit aus ihrem naiven Urzustande zu höherer Erkenntnis emporgerungen hat.*“ Aus dem Vorwort sei ferner noch angeführt: „*In der Darstellung galt es den Anforderungen wissenschaftlicher Strenge gerecht zu werden, ohne den Bereich des in der Schule Möglichen zu überschreiten.*“

Jeder Schulmathematiker wird diesen Ausführungen sicherlich voll zustimmen. Aber es ist sehr schwer, die Grenze zu bestimmen. Auch hier scheint mir an manchen Stellen zu weit gegangen zu sein. Die Behandlung der komplexen Zahlen als Zahlenpaare auf der Schule ist gewagt, um so mehr, da der tiefere Kern der formalen Rechnungsweise doch nicht herauskommen kann. Das Verständnis der Regeln, z. B. der Addition, wird dadurch nur unnötig erschwert. Der wissenschaftlichen Strenge entsprechend macht Verfasserin ausgedehnte Anwendung der ε-Mathematik. Wo diese auf der Schule irgend zu vermeiden ist, sollte man sie umgehen. Studenten in den Anfangssemestern fällt sie noch schwer genug.

Das Ergänzungsheft 1 enthält eine Fülle schöner Übungsaufgaben über das abgekürzte Rechnen. Hier tritt klar hervor, wie sinnlos und geradezu falsch oft „genaues“ Rechnen ist.

Göttingen. H. Willers.

Zeitschriftenschau.

Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik. — 6. Bd., 5. Heft. — W. Prager, Beitrag zur Kinematik des Raumfachwerkes. — E. Müller, Über rechtwinklige Platten, die längs zweier gegenüberliegender Seiten auf biegsamen Trägern ruhen. — G. Haberland, Theorie der Leitung von Wechselstrom durch die Erde. — F. Rehbock, Die linearen Punkt-, Ebenen- und Strahlenabbildungen der darstellenden Geometrie. — E. J. Gumbel, Über scheinbare Korrelationen und ihr Auftreten in der physiologischen Statistik. — M. Fekete, Über Interpolation.

Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft. — 25. Jahrg., 3. Stück. — W. Lorey, Felix Kleins Persönlichkeit und seine Bedeutung für den mathematischen Unterricht. — G. Hamel, Felix Klein als Mathematiker. — L. Prandtl, Klein und die angewandten Wissenschaften.

The American Mathematical Monthly. — Vol. 33, Nr. 7. — J. A. Shohat, On the asymptotic expressions for Jacobi and Legendre polynomials derived from finite-difference equations. — E. C. Philips, Some applications of mathematics to architecture: gothic tracery curves. — N. Altshiller-Court, On the Longchamps circle of the triangle.

Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde. — Bijvoegsel, 3. Jahrg., Nr. 2. — D. H. Prins, Hervorming van het wiskunde-onderwijs of de H. B.-scholen met vijf-jarigen cursus. — E. J. Dijksterhuis, Ontwerp voor een eindexamenprogramma voor de H. B. S. met vijfjarigen cursus. — P. de Vaere, Naar aanleiding van de verdeeling in de uiterste en middelste reden.

Physikalische Zeitschrift. — 27. Jahrg., 21. Heft. — M. A. Schirmann, Neue Kunstgriffe in der Vakuumtechnik. — S. Ray, Über Umkehrpunkte in der Photophorese. — H. Benndorf, Über den durch die Heßsche Höhenstrahlung bedingten Ionisations- und Leitfähigkeitszustand der höheren Luftschichten. — R. Fürth, Adsorption und Diffusion im elektrischen Feld. — E. Marx, Flammenleitung. — W. Schottky, Atomare Schwankungsvorgänge an Glühkathodenoberflächen.

27. Jahrg., 22. Heft. — A. Rubinowicz, Über die Eindeutigkeit der Lösung der Maxwellschen Gleichungen. — J. J. Bikerman, Zur elektrostatischen Theorie anomaler Flüssigkeiten. — H. Schulz, Optische Bestimmung der Dicke einer Oberflächenschicht. — F. Bernhardt, Umwandlungsversuche von Quecksilber in Gold bei hohen Stromstärken mit Hilfe einer Hochdruckquecksilberbogenlampe. — C. Schmidt, Eine einfache Bestimmung des Verhältnisses $\mathfrak{H}/\mathfrak{M}$, Horizontalintensität des Erdmagnetismus zum magnetischen Moment eines Stabmagneten. — H. Jung, Die neueren Vokaltheorien. — J. Kudar, Schrödingersche Wellengleichung und vierdimensionale Relativitätsmechanik. — O. v. Auwers, Bemerkung zu der Arbeit von W. Vogel: „Magnetische Anfangspermeabilität.“ — W. Meißner, Der Widerstand von Metallen und Metallkristallen bei der Temperatur des flüssigen Heliums. — R. Seeliger, Die Entwicklung des Lichtbogens. — R. Seeliger, Über die Temperatur des Gases in Entladungsröhren. — L. Flamm, Beiträge zur Wellenmechanik in nichtstationären Feldern. — G. Stetter, Massenbestimmung von Atomtrümmern. — W. Busse, Über die Ionisation bei der langsamen Oxydation von Phosphor. — E. Reichenbächer, Der Elektromagnetismus in der Weltgeometrie. — A. Becker, Durchgang korpuskularer Strahlen durch Materie. — M. A. Schirmann, Die Erzeugung extremster Vakua durch erhaltende hocherhitzbare Metalle als Sorbentien (speziell Wolfram). — H. Opitz, Über eine optische Täuschung in ihrer Abhängigkeit vom monokularen und binokularen Sehen.

Zeitschrift für Physik. — 39. Bd., 7./8. Heft. — A. Güntherschulze, Über den Einfluß geringer Zusätze von Alkali oder Erdalkali zu Quecksilber auf den normalen Kathodenfall. — P. Ehrenfest und G. E. Uhlenbeck, Graphische Veranschaulichung der De Broglieschen Phasenwellen in der fünfdimensionalen Welt von O. Klein. — W. Heisenberg, Über die Spektra von Atomsystemen mit zwei Elektronen. — H. Ludloff, Zur Termdarstellung der AlH-Banden. — H. Ludloff, Molekülbindung und Bandenspektren. — J. Chariton und Z. Walta, Oxydation von Phosphordämpfen bei niedrigen Drucken. — J. Böhm, Das Weissenbergsche Röntgengoniometer. — Kanakendu Majumdar, Über das Absorptionsspektrum des Nickels. — Pratap Kischen Kichlu, Über das Bogenspektrum des Kupfers. — K. Rolan, Die Eigenschwingungen tetraederförmiger Molekeln (SO_4^{--}). — R. Seeliger, Bemerkung zur Theorie des Kathodendunkelraumes.

39. Bd, 9. Heft. — F. Ehrenhaft, Das Ergebnis der Untersuchungen über die Beweglichkeit kleiner Kugeln im Gase und deren elektrische Ladungen. — H. Trebitsch, Die Beweglichkeit von festen Kugeln der Radiengrößen bis $1 \cdot 10^{-5}$ cm und deren elektrische Ladungen. — M. Reiss, Die Beweglichkeit von Tröpfchen hoher Dichte der Radiengrößen bis $1 \cdot 10^{-5}$ cm und deren elektrische Ladungen. — Z. Gyulai, Über den Vorgang der Erregung bei der Lichtabsorption in Kristallen. — R. Hilsch und R. Ottmer, Zur lichtelektrischen Wirkung in natürlichem blauen Steinsalz. — C. Schaefer, C. Bormuth und F. Matossi, Das ultrarote Absorptionsspektrum der Carbonate. — F. Jan. G. Rawlins, A. M. Taylor u. K. Rideal, Das Absorptionsspektrum des Strontianits im kurzwelligen Ultrarot. — W. Pfleiderer, Beitrag zur Kenntnis der anomalen optischen Rotationsdispersion und der magnetischen Rotationsdispersion solcher Körper, deren optische Dispersion der Drehung anomal ist. — A. Leide, Messungen in der K-Serie der Röntgenspektra.

39. Bd., 10./11. Heft. — L. A. Sommer, Über den Zeemaneffekt und die Struktur des Bogenspektrums von Kupfer — O. Stern, Zur Methode der Molekularstrahlen. I. — F. Knauer und O. Stern, Zur Methode der Molekularstrahlen. II. — F. Knauer und O. Stern, Der Nachweis kleiner magnetischer Momente von Molekülen. — F. Ribbeck, Über die Abhängigkeit des elektrischen Widerstandes der Nickelstähle von Zusammensetzung, Temperatur und Wärmebehandlung. — E. Friman, Präzisionsmessungen in der L-Serie der Elemente Wolfram bis Uran. — H. A. Kramers, Wellenmechanik und halbzahlige Quantisierung. — H. Israël, Magnetospektroskopische Untersuchungen an Nickeldrähten mit kurzen Hertzschen Wellen. — K. Schaposchnikow, Die dynamischen Gleichungen von Mezscherski und die Bewegung eines Lichtquants. — K. Schaposchnikow, Die Ableitung der Formel $n - 1/d =$ const für schwach brechende Medien aus der Lichtquantentheorie. — G. Gamow und D. Iwanenko, Zur Wellentheorie der Materie. — T. L. de Bruin, Bemerkungen über einige Gesetzmäßigkeiten in den Bogenspektren von Fluor und Chlor. — W. C. van Geel, Intensitäten der Zeemankomponenten im partiellen

Paschen-Back-Effekt. — V. Fischer, Über die Dampfspannungsgleichung bei tiefen Temperaturen.

39. Bd., 12. Heft. — K. L. Wolf, Über einen Niedervoltvakuumbogen und über die Kohlelinie 4267. — W. Kartschagin und E. Tschetwerikowa, Zur Frage nach der magnetischen Drehung der Polarisationsebene primärer Röntgenstrahlen. — M. Bronstein, Über die Bewegung eines Elektrons im Felde eines festen Zentrums mit Berücksichtigung der Massenveränderung bei der Ausstrahlung. II. — H. Walter, Über die Berechnung elektrostatischer Potentiale von Kreis- und Kugelkonduktoren, insbesondere von unendlichen Kreis- und Kugelgittern. — A. Hnatek, Über die Meßbarkeit sehr großer Helligkeitsunterschiede mit dem Röhrenphotometer. — J. Picht, Spiegelung und Brechung eines beliebigen optischen Strahlenbündels endlicher Öffnung an der ebenen Trennungsfläche zweier Medien, behandelt vom Standpunkt der elektromagnetischen Lichttheorie.

Die Naturwissenschaften. — 14. Jahrg., 45. Heft. — W. Heisenberg, Quantenmechanik. — G. Hoffmann, Intensität und Durchdringungsvermögen der Höhenstrahlung im Meeresniveau. — E. Madelung, Eine anschauliche Deutung der Gleichung von Schrödinger.

14. Jahrg., 46. Heft. — O. Baudisch u. Lars A. Welo, Hysteresis-Messungen als Werkzeug zur Ermittelung der Feinstruktur ferromagnetischer Verbindungen. — W. Grotrian, Über das Leuchten von festem Stickstoff.

13. Jahrg., 47. Heft. — Th. Pöschl, Zweiter internationaler Kongreß für technische Mechanik in Zürich, 12. bis 17. September 1926. — R. Ritschel, Die Bandenspektren der Kupferhalogenide in Absorption. — K. Becker, Röntgenographische Bestimmung des linearen Wärmeausdehnungskoeffizienten.

Neuerscheinungen.[1]

Mathematische Wissenschaft.

F. Klein, Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert. Teil I, bearb. von R. Courant und O. Neugebauer. (Grundlagen der Mathematischen Wissenschaften, Bd. 24.) 385 S. Berlin 1926, Springer. Geh. RM 21.—.

Mathematischer Unterricht.

P. Crantz, Analytische Geometrie der Ebene zum Selbstunterricht. 4. Aufl. von M. Hauptmann. (Aus Natur und Geisteswelt, 504.) 97 S. Leipzig 1926, B. G. Teubner. Geb. RM 2.—.

Bardeys Arithmetische Aufgabensammlung. Neue Einheitsausgabe von W. Zabel und K. Thierig. I. Teil: Unterstufe. 289 S. Geb. RM 5.20. II. Teil: Oberstufe. 205 S. Geb. RM 4.—. Leipzig 1926, B. G. Teubner.

H. Fenkner und H. Wagner, Lehr- und Übungsbuch der Mathematik für Oberlyzeen und Studienanstalten. Sonderdruck. Differential- und Integralrechnung. 148 S. Berlin 1926, Salle. Geb. RM 3.60.

W. Lietzmann, Mathematisches Unterrichtswerk für höhere Knabenschulen. Leipzig, B. G. Teubner:

W. Lietzmann, Aufgabensammlung und Leitfaden der Geometrie. Ausg. B für Realanstalten. Unterstufe. 7. Aufl. 270 + 72 S. 1927. Geb. RM 5.80.

—— und P. Zühlke, Dass. Ausg. A für Gymnasien. Oberstufe. 4. Aufl. 126 + 66 S. 1927. Geb. RM 3.60.

—— ——, Geometrische Aufgabensammlung. Ausg. A für Gymnasien. Oberstufe. 3. Aufl. 126 S. 1927. Geb. RM 2.60.

Močnik, Hočevar, Dintzl, Mathematisches Unterrichtswerk für Mittelschulen. Arithmetik für die I.—III. Klasse. 244 S. Geometrie für die I.—III. Klasse. 201 S. Wien 1926, Hölder-Pichler-Tempsky A. G.

1) An dieser Stelle werden alle bei der Schriftleitung einlaufenden Bücher, soweit sie überhaupt den Stoffkreis der Zeitschrift berühren, angezeigt. Eine ausführliche Besprechung der unverlangt einlaufenden Bücher behält sich die Schriftleitung vor. Eine Rücksendung kann in keinem Falle erfolgen.

Die Schriftleitung.

Müller-Bieler, Mathematisches Unterrichtswerk für Mittelschulen. Neubearbeitung. Leipzig, B. G. Teubner:
O. Bewersdorff und H. Sturhann, Lehr- und Übungsbuch der Geometrie für Knaben-Mittelschulen. 6. Aufl. 241 S. 1926. Geb. *RM* 4.60.
——, Dass. für Mädchen-Mittelschulen. 116 S. 1926. Kart. *RM* 2.—.
——, Lehr- und Übungsbuch der Arithmetik und Algebra für Mädchen-Mittelschulen. 120 S. 1926. Kart. *RM* 2.—.
A. Schülke und W. Dreetz, Leitfaden der Mathematik. Teil I: Unterstufe B. 101 S. Kart. *RM* 2.20. Teil II: Oberstufe B. 187 S. Geb. *RM* 3.80. Leipzig 1927, B. G. Teubner.

Naturwissenschaftlicher Unterricht.

E. Fock, Physik und Chemie für Lyzeen, Realschulen und die Mittelstufe der Vollanstalten. 1. Heft: Lehrstoff der Untertertia. 93 S. Berlin 1927, Salle. Geb. *RM* 1.80.
H. Otto und W. Stachowitz, Biologie. Teil I: Die Natur als Lebensgemeinschaft. 1. Bd.: Die Pflanzenwelt. 425 S. 2. Bd.: Die Tierwelt. 407 S. Frankfurt a. M. 1926, Diesterweg.

Lustige Ecke.

45. Eine Anekdote. Der bekannte Mathematiker Kummer stößt während der Vorlesung auf die schwierige Aufgabe 7 · 9. Er stockt. Ein Zuhörer ruft ihm aus Scherz zu: 61; ein anderer ruft 65. Da sagt Kummer: „Aber meine Herren, das ist doch unmöglich. 7 · 9 kann doch nur entweder 61 oder 65 sein“. — Die Anekdote ist, so sagt Alexander Mozskowski in einer Plauderei über erfundene Anekdoten in der Berliner Illustrierten Zeitung, natürlich nicht wahr. Wirklich kam einmal irgendeine leichte Rechnung dieser Art bei Kummer vor. Der große Mathematiker stockte: „Ach, meine Herren, so helfen Sie mir doch“, bat er schließlich seine Zuhörer. L.

46. Eine alte Labyrinthaufgabe[1]) zeigt die F. Wolff, G. Michaelis und R. Vogt, Vita Romana (Leipzig 1927, B. G. Teubner) entnommene Figur:



1) Vgl. hierzu z. B. W. Lietzmann, Lustiges und Merkwürdiges von Zahlen und Formen. 2. Aufl. Breslau 1923, Hirt.

ZEITSCHRIFT FÜR MATHEMATISCHEN UND NATURWISSENSCHAFTLICHEN UNTERRICHT ALLER SCHULGATTUNGEN

BEGRÜNDET 1869 VON J. C. V. HOFFMANN



HERAUSGEGEBEN VON

H. SCHOTTEN und W. LIETZMANN
in Halle a. S. in Göttingen
unter Mitarbeit von
W. HILLERS
in Hamburg

58. JAHRGANG. 1927 · 2. HEFT



LEIPZIG · B. G. TEUBNER · BERLIN

Inhaltsverzeichnis des 2. Heftes.

Fortsetzung auf der dritten Umschlagseite.

Mehr Nautik!

Von A. HARNACK in Zwickau i. Sa.

Mit 6 Figuren im Text.

„Navigare necesse est."

Die in den letzten Jahrzehnten erwachsene Reform des mathematischen Unterrichts enthält neben mancherlei anderen Forderungen an erster Stelle auch die nach einer möglichst weitgreifenden Berücksichtigung der Anwendungen. In dem Bestreben, den mathematischen Unterricht wirklichkeitsnah zu gestalten, hat man in steigendem Maße Anwendungsgebiete einbezogen, die geeignet sind, dem Schüler Verständnis für die kulturelle Bedeutung der Mathematik zu vermitteln. Es sei nur an Astronomie, Volkswirtschaft, Versicherungswesen, Feldmessung usw. erinnert. Seltsamerweise hat die höhere Schule einem weiten und wichtigen Anwendungsgebiet bisher nur wenig Beachtung geschenkt, der *Nautik*. Und doch ist die Navigation, dieses mathematische Teilgebiet der Schiffahrtskunde, ein kaum zu übertreffendes Beispiel für die weltumspannende und wirklichkeitsgestaltende Macht des mathematischen Gedankens. Es kommt hinzu, daß alles, was mit der Seefahrt zusammenhängt, seit jeher von der Jugend mit Eifer und Anteilnahme aufgenommen wird, so daß dieses Gebiet mehr als viele andere zu einer Belebung und Bereicherung des mathematischen Unterrichts wie geschaffen ist. Vielleicht werden Fanatiker des Arbeitsunterrichts der Beschäftigung mit nautischen Aufgaben wenig Wert beimessen wollen, da die praktische Ausführung der zugrunde liegenden Beobachtungen kaum jemals wirklich in Frage komme. Demgegenüber muß einerseits gesagt werden, daß viele nautische Methoden auch in einer „trockenen" Landschaft cum grano salis sehr wohl ausgeführt werden können und überdies, soweit sie graphische sind, früher als die rein rechnerischen Methoden der Feldmessung im Unterricht verwendbar werden. Andererseits verdient es bei der Bewertung der Nautik als gelegentlichen Unterrichtsgegenstandes berücksichtigt zu werden, daß ein mathematischer Unterricht, der geschichtliche und sachliche Belehrung über die Schiffahrtskunde vermittelt, nicht nur die heute so hoch im Kurse stehende Kulturkunde im besten Sinne des Wortes treibt, sondern auch eine wichtige vaterländische Pflicht erfüllt durch Verknüpfung des Sinnens und Denkens der kommenden Generation mit der freien See, auf der trotz allem und allem auch heute noch ein gut Teil unserer Zukunft liegt. Gewiß — das braucht wohl nicht erst besonders betont zu werden — einer systematischen Behandlung der Navigation auf der höheren Schule soll hier nicht das Wort geredet werden, da sie weder möglich noch auch wünschenswert ist. Aber eine Einführung in das Verständnis der Schiffsführung auf der Grundlage der Mathematik sollte die höhere Schule im Rahmen der allgemeinen Bildung allerdings vermitteln. Ist es nicht beschämend, wenn gebildete Leute zugeben müssen, sie könnten sich keine klare Vorstellung davon machen, wie der Seemann sicher seinen Weg über die Meere findet! Diese bedenkliche Lücke im Verständnis der Umwelt zu

beseitigen, ist eine Pflicht des mathematischen Unterrichts, der er sich ohne Schwierigkeiten entledigen kann, wenn er bei der häufig sich zwanglos darbietenden Gelegenheit die einfachsten Probleme der Navigation heranzieht. Wie und in welchem Umfang das etwa geschehen kann, sollen die folgenden Ausführungen zeigen, die wegen Raummangels systematisch, nicht methodisch gehalten sein können und im wesentlichen nur andeuten und anregen wollen.

I. Terrestrische Navigation.

In der terrestrischen Navigation werden Teile der Erdoberfläche näherungsweise durch Ebenen ersetzt. Es liegt auf der Hand, daß ein solches Verfahren nur für wenig ausgedehnte Flächenteile noch brauchbare Ergebnisse liefert. Insbesondere in der *Küstenschiffahrt*, wo die in Frage kommenden Abstände innerhalb der Sichtweite liegen, braucht die Krümmung der Erdoberfläche nicht berücksichtigt zu werden.

1. Windrose und Kompaß.

Schon in den Anfangsgründen der Geometrie bei der Einführung des Winkels als Maß des Richtungsunterschiedes bietet die Windrose einen sehr geeigneten Gegenstand für Zeichnung und Berechnung. Durch fortgesetzte Halbierung der Winkel ergibt sich die nach Strichen geteilte Windrose (1 Strich = $11^1/_4{}^0$), deren saubere Herstellung und Beschriftung dem Quartaner viel Freude macht. Als weitere Aufgaben seien genannt: das Einzeichnen gegebener Richtungen nach Strichmaß oder Gradmaß auf der Karte, die Ablesung von Kursrichtungen zwischen zwei gegebenen Punkten, die Umrechnung von Strichmaß in Gradmaß und umgekehrt (z. B. SSWzS = S $11^1/_4$ W = $191^1/_4{}^0$). Nicht unbedingt erforderlich, aber durchaus möglich ist es, schon in Quarta oder Untertertia auf die Ungenauigkeiten des magnetischen Kompaß hinzuweisen. Nachdem die Einrichtung des Schiffskompaß im Gegensatz zur Bussole erklärt worden ist, liegt es nahe auf die Mißweisung (Deklination) und die Ablenkung (Deviation) hinzuweisen und die Begriffe des rechtweisenden Kurses, des mißweisenden Kurses und des Kompaßkurses einzuführen. Deklination und Deviation sind mit Vorzeichen behaftete Größen (östlich mit plus, westlich mit minus), die man bei der Berechnung des rechtweisenden Kurses zu addieren, im entgegengesetzten Fall dagegen zu subtrahieren hat. Es ergeben sich daraus für die Addition und Subtraktion relativer Zahlen Übungsaufgaben folgender Art:

Beispiel 1.

Kompaßkurs	$+66^0$	+	
Mißweisg.	-18^0		
mißw. Kurs	$+48^0$	+	
Ablenkung	$+10^0$		
rechtw. Kurs	$+58^0$		= N 58^0O

Beispiel 2.

rechtw. Kurs	$+230^0$	−	
Mißweisg.	$+5^0$		
mißw. Kurs	$+225^0$	−	
Ablenkung	-12^0		
Kompaßkurs	$+237^0$		= S 57^0 W

2. Peilungen.

Die Festlegung der Blickrichtung nach einem Gegenstand bezeichnet der Seemann als *Peilen*. Er benutzt dazu eine Dioptervorrichtung, die auf den Rand des Kompaßkessels drehbar aufgesetzt wird. Die beobachteten Peilungen sind

stets Kompaßkurse, die erst durch Anbringen der Korrektionen in rechtweisende Kurse zu verwandeln sind. Die auf der Karte vom Küstenpunkt in Richtung des Gegenkurses eingetragene Peilgerade gibt eine *Standlinie*, auf der sich das Schiff befinden muß. Erst eine zweite Standlinie liefert den Schiffsort als Schnittpunkt beider Peilgeraden. Der Begriff des *geometrischen Ortes* findet in der Navigation eine wichtige und für den Schüler sehr anschauliche Anwendung. Für den geometrischen Anfangsunterricht kann es durchaus genügen, die Seekarte durch ein rechteckiges Stück Netzpapier zu ersetzen und von den Besonderheiten der Merkatorprojektion abzusehen. Die gepeilten Landmarken werden durch eingezeichnete Punkte dargestellt, deren Abstände von zwei Kartenrändern gegeben werden. Man gewinnt so eine erwünschte Gelegenheit, den Schüler rechtzeitig mit dem Begriff der rechtwinkligen Koordinaten völlig vertraut zu machen. Das Abgreifen der Entfernung des gefundenen Schiffsortes von den gegebenen Küstenpunkten und ihre Auswertung bei vorgeschriebenem Kartenmaßstab gibt beim Vergleich mehrerer Schülerzeichnungen eine wertvolle Kontrolle für die Genauigkeit.

Die wichtigsten Verfahren zur Gewinnung einer Standlinie durch Peilen sind die folgenden:

a) *Deckpeilung.* Wenn zwei deutlich erkennbare Küstenpunkte, die auf der Karte auffindbar sind, genau in derselben Blickrichtung liegen, ist eine Standlinie als Verbindungsgerade dieser zwei Punkte auf der Karte festgelegt, ohne daß der Kompaß benutzt zu werden brauchte. In dem seltenen Falle zweier gleichzeitiger Deckpeilungen ist der Schiffsort unabhängig vom Kompaß bestimmt.

b) *Kreuzpeilung.* Durch zwei möglichst gleichzeitig ausgeführte Kompaßpeilungen zweier getrennt sichtbarer Küstenpunkte werden zwei Standlinien gefunden, deren Schnittpunkt der Schiffsort ist.

c) *Doppelpeilung.* Oft steht nur *ein* markanter Küstenpunkt (Leuchtturm) zur Verfügung. Dann muß die Peilung nach angemessener Zeit wiederholt und die inzwischen zurückgelegte Fahrstrecke bestimmt werden. Dies geschieht entweder unmittelbar durch das Log oder mittelbar auf rechnerischem Wege aus Zeit und Fahrgeschwindigkeit (oder aus der Umdrehungszahl der Schiffsschraube). Die Konstruktion des entstehenden Dreiecks (aus Winkel—Seite—Winkel) wird am besten so ausgeführt, daß zunächst die beiden Peillinien in der Karte eingezeichnet werden, worauf dann die Fahrstrecke durch Parallelverschiebung eingepaßt wird (vgl. Fig. 1). Besonders einfach gestaltet sich das Verfahren, wenn die erste Peilung mit 45° gegen den Kurs, die zweite querab (unter 90° gegen den Kurs) vorgenommen wird (oder umgekehrt), da dann das Dreieck gleichschenkligrechtwinklig ist, so daß der Abstand vom Küstenpunkt im Augenblick der Querpeilung gerade gleich der durchfahrenen Strecke ist.

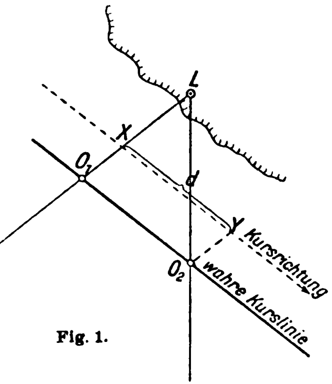


Fig. 1.

d) *Gefahrkreis.* Nimmt man die Peilungen zweier Punkte A und B ohne Verwendung des Kompaß auf einer Peilscheibe vor, bestimmt also nur den

4*

Winkel δ zwischen den Peilrichtungen, so ist damit als Standlinie, auf der sich das Schiff befinden muß, der Kreisbogen über der Sehne AB mit dem Umfangswinkel δ gefunden. Innerhalb dieses Kreises ist der Sehwinkel nach AB größer, außerhalb dagegen kleiner als δ. Hiervon kann in der Navigation bisweilen Gebrauch gemacht werden, wenn eine Untiefe, die der Küste vorgelagert ist, sicher umfahren werden soll. Man wählt zwei geeignete leicht erkennbare Küstenpunkte A und B, über deren Verbindungsstrecke man einen die zu vermeidende Untiefe umschließenden *Gefahrkreis* schlägt. Der auf der Karte zu entnehmende Umfangswinkel über AB ist der *Gefahrwinkel* δ, der nicht überschritten werden darf. Die Untiefe wird sicher vermieden, wenn das Schiff so geführt wird, daß die Peilungen von A und B stets einen Winkel kleiner als δ einschließen.

e) *Doppelwinkelpeilung.* Bei drei verfügbaren Küstenpunkten A, B, C ergeben sich aus ihren Peilungen die Sehwinkel δ und ε für die Strecken AB bzw. BC und daraus zwei Umfangsbogen als Standlinien, deren *einer* Schnittpunkt eindeutig den Schiffsort liefert (Fig. 2). Dieses Verfahren ist wegen seiner Unabhängigkeit vom Kompaß in der Praxis besonders wertvoll. Die Ausführung einer Doppelwinkelpeilung ergibt eine sehr hübsche und keineswegs sehr schwierige praktisch-geometrische Aufgabe für den Schüler. Die drei Punkte A, B, C sind entweder nach der Karte zu wählen oder beliebig im Gelände derart anzunehmen, daß die Seiten des Dreiecks ABC bequem ausgemessen werden können. Die Konstruktion der zwei Standkreise auf der Karte oder Skizze ist ein guter Ersatz für manche entbehrliche Dreieckskonstruktion mit dem Umfangsbogen und bedeutet eine anschauliche Vorübung für die in der Trigonometrie rechnerisch durchzuführende Pothenotsche Aufgabe. Hervorgehoben zu werden verdient der besondere Fall, daß die drei Punkte gerade auf einem Kreis liegen und der Schiffsort nicht mehr eindeutig durch die zwei Winkelmessungen bestimmt ist („gefährlicher Kreis“).

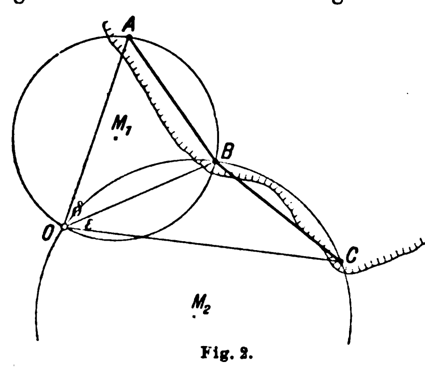


Fig. 2.

f) *Peilung in der Kimm.* Beim ersten Auftauchen eines Leuchtfeuers wird dieses gerade in der Horizontlinie oder Kimmlinie sichtbar. In diesem Augenblick verläuft der Sehstrahl tangential zur Erdoberfläche. Die Berechnung der Entfernung kann daher nach dem Sehnen-Tangentensatz erfolgen. Zunächst ergibt sich für die in der Luftlinie gemessene Entfernung des Auges von der Kimm, wenn h die Augeshöhe und r den (mittleren) Halbmesser der Erdkugel bezeichnet

$$s = h(2r + h) = 2rh + h^2.$$

Da aber auf dem Schiff die Beobachtungshöhe h gegenüber r stets verschwindend klein ist (man lasse den Schüler das Verhältnis $h : 2r$ zahlenmäßig ausrechnen oder die Größen h^2 und $2rh$ wirklich vergleichen!), so gilt mit weitgehender Annäherung

$$s^2 = 2r \cdot h \quad \text{oder} \quad s = \sqrt{2r \cdot h}.$$

Die Sichtweite bis zum Horizont ist also das geometrische Mittel zwischen der Augeshöhe und dem Erddurchmesser. Diese überraschende Anwendung des geome-

trischen Mittels verfehlt den Eindruck auf den Schüler nicht. Überdies gibt sie Gelegenheit, die Quadratwurzelberechnung zu beleben. Die atmosphärische Strahlenbrechung, durch welche die Sichtweite unter normalen Umständen um etwa 8—9% vergrößert wird, ist erwähnenswert. Die Entfernung e des in der Kimm auftauchenden Leuchtfeuers wird als Summe der Sichtweite vom Schiff (Höhe h) und der vom Leuchtfeuer (Höhe H) gefunden, also

$$e = \sqrt{2rh} + \sqrt{2rH} = \sqrt{2r} \cdot (\sqrt{h} + \sqrt{H}).$$

g) *Peilung eines Höhenwinkels.* Die Messung des Höhenwinkels, unter dem ein Punkt bekannter Höhe über der Horizontalen erscheint, gibt die Möglichkeit, den Abstand des Beobachters zu bestimmen. Freilich liegt bei der geringen Höhe der in der Seefahrt zur Verfügung stehenden Beobachtungsgegenstände der Höhenwinkel selten über einem Grad, so daß nur eine rechnerische Lösung der Aufgabe in Frage kommt (ohne Trigonometrie!) und das Ergebnis meist wenig zuverlässig ist. In der Praxis wird daher diese Abstandbestimmung nur bei kürzesten Entfernungen anwendbar sein. So wird z. B. beim Geschwaderfahren der vorgeschriebene Abstand zum Nachbarschiff durch ständige Kontrolle des Winkels, unter dem dessen Mast erscheint, eingehalten.

h) *Funkpeilung.* Dort, wo Land nicht in Sicht ist, kann die Funkpeilung mit Vorteil verwandt werden. Sie wird entweder als *Eigenpeilung* vom Schiff her ausgeführt, indem zwei geeignete Landstationen radiotelegraphisch angerufen und zur Zeichengebung aufgefordert werden, so daß nach Art der Kreuzpeilung der Schiffsort bestimmt werden kann, oder, falls an Bord keine Funkpeileinrichtung vorhanden ist, übernehmen die Landstationen die Peilung des sendenden Schiffes, dem das Ergebnis radiotelegraphisch übermittelt wird (sog. *Fremdpeilung*). Zur angenäherten Bestimmung des Schiffsortes dienen *Richtfunkbaken*. Es sind dies Stellen an Land, die mittels Richtfunksendern in einzelne schmale Sektoren dauernd Funksignale senden, aus denen auch Schiffe ohne Funkpeilempfänger durch ungerichteten Empfang feststellen können, daß sie sich im betreffenden Sektor befinden. Die Genauigkeit der Funkpeilung ist im allgemeinen nicht sehr groß. Die Erfahrung hat gelehrt, daß Peilungsstrahlen, die mehrfach über Wasser und Land gehen oder auf längerer Strecke nahe der Küstenlinie verlaufen, beträchtliche Abweichungen von der Geraden zeigen. Ferner können Nebelbänke unberechenbare Ablenkungen der Peilstrahlen verursachen, und zu den Zeiten des Sonnenunter- und aufganges treten häufig Störungen auf. Solche *Funkfehlweisung* ist vor allem bei der Fremdpeilung vorhanden, so daß die Richtungsbestimmung nur auf etwa 2° bis 3° genau ist. Eine weitere Erschwerung der Funkpeilung tritt noch dadurch auf, daß die Peilstrahlen als Großkreisbogen der Erdkugel auf der Seekarte (Merkatorkarte) streng genommen nicht als Geraden, sondern als zum Äquator konkav gekrümmte Kurven erscheinen. Bei Abständen unter 200 Seemeilen kann die Abweichung dieser Kurven (Orthodromen) von den Geraden der Seekarte (den Loxodromen) vernachlässigt werden. Für größere Entfernungen muß der Winkel zwischen der Großkreispeilung und der auf der Karte als Gerade erscheinenden Loxodrome berücksichtigt werden. Die hierfür erforderliche Berechnung wird dem Seemann durch Diagramme und Tabellen erleichtert.

Am Schluß dieses Abschnittes mag noch die folgende im Geometrieunterricht besonders gut verwendbare Aufgabe Platz finden, die meist als

i) *Kreuzeraufgabe* bezeichnet wird. Von einem Schiff S, dessen augenblickliche Lage und Kursrichtung bekannt sind, kann angenommen werden, daß es ohne Kursänderung mit der konstanten Geschwindigkeit v_1 weiterfährt. Ein Kreuzer K mit der Fahrgeschwindigkeit v_2 erhält den Auftrag, das Schiff einzuholen. Welchen Kurs muß er zu diesem Zweck steuern, wo und wann erfolgt das Zusammentreffen? Die Lösung ergibt der Strahlensatz (Fig. 3). Man zieht durch den Schiffsort S die Kurslinie und trägt auf ihr in der Fahrtrichtung v_1 etwa in cm ab bis zum Punkte H, um den man mit $r = v_2$ cm den Kreis schlägt. Dieser möge die Verbindungsgerade KS in L schneiden. Dann liefert die Parallele durch K zu HL mit SH den Schnittpunkt T, in welchem das Zusammentreffen stattfindet. Bemerkenswert ist, daß man je nach der Lage und den Geschwindigkeiten der beiden Schiffe bisweilen zwei Punkte L_1 und L_2 oder auch gar keinen solchen erhält. Das Einholen ist dann auf zwei verschiedenen Wegen bzw. überhaupt nicht möglich. Die etwas allgemeinere Aufgabe, bei der der Kreuzer das Schiff nicht treffen, sondern in eine bestimmte Richtung und Entfernung von ihm gelangen soll, kann unter Hinzunahme einer Verschiebung in gleicher Weise gelöst werden.

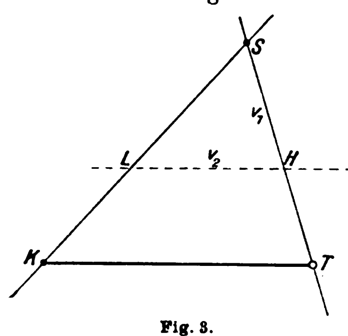


Fig. 3.

Beispiel 3. Ein Kreuzer, der vom Flaggschiff in N 30° O um 8 sm entfernt steht, soll so schnell wie möglich die Stellung N 80° W 10 sm entfernt einnehmen. F fährt mit Kurs N 40° W 14 Knoten (d. h. 14 sm in der Stunde), K macht 20 Knoten. Wann und wo ist die befohlene Stellung erreicht?

3. Die Besteckrechnung.

Länge und Breite des Schiffsortes, das sogenannte Besteck, kann auch aus Kurs und gefahrener Distanz ermittelt werden, wenn die Lage des Ausgangsortes bekannt ist. Diese *Besteckrechnung* hat den Vorzug, daß sie auch beim Fehlen jeder Möglichkeit von Peilungen und astronomischen Beobachtungen ausführbar ist, allerdings ist ihre Genauigkeit nicht sehr groß, da nicht nur die Unsicherheit der Kompaßkurse eingeht, sondern auch Versetzung durch mehr oder weniger unbekannte Strömungen das Ergebnis störend beeinflussen kann. Bei der Einführung in die Besteckrechnung geht man am besten von der Definition der Seemeile aus, die als Bogenminute auf dem Meridian oder Äquator erklärt ist. Daher ergibt beim Segeln mit nord-südlichem Kurs jede gefahrene Seemeile eine Breitenänderung von 1 Bogenminute. Bei der Bewegung auf einem Breitenkreis (ost-westlicher Kurs) ist die Beziehung nicht so einfach, da die Parallelkreise keine Großkreise der Kugel sind. In bekannter Weise folgt für den Halbmesser eines Parallelkreises in der Breite φ $r = R \cos \varphi$ und für den Umfang $u = 2\pi r = U \cdot \cos \varphi$, wenn R den Erdradius und U den Erdumfang bezeichnet. Demgemäß gibt ein *Längenunterschied* l (in Bogenminuten gemessen) zwar auf dem Äquator ebensoviele Seemeilen, auf einem Breitenkreis aber nur $l \cos \varphi$ Seemeilen. Eine solche Strecke auf einem Breitenkreis wird *Abweitung* genannt. Es gilt also $a = l \cdot \cos \varphi$, umgekehrt $l = a : \cos \varphi$. Diese aus einem rechtwinkligen Dreieck gewonnene Beziehung

kann schon in den ersten Stunden der Trigonometrie vom Schüler hergeleitet werden und gibt Veranlassung zur Stellung einfacher Aufgaben.

Beispiel 4. Ein Schiff fährt auf der Breite $\varphi = 55^0 30'$ mit Ostkurs 56 sm. Wie hat sich dadurch die Länge des Schiffsortes verändert?

Beispiel 5. Zwei Orte der gleichen geographischen Breite $\varphi = 38^0 45'$ haben einen Längenunterschied $l = 3^0 14'$. Welche Entfernung muß ein Schiff im Ost-West-Kurs von einem Ort zum andern zurücklegen?

Im allgemeinen fällt die Fahrtrichtung nicht gerade mit einer Haupthimmelsrichtung (Nord-Süd oder Ost-West) zusammen, sondern die Kursrichtung bildet einen spitzen Winkel mit dem Meridian. Wird dieser Kurswinkel α auf der Fahrt von A nach B dauernd beibehalten, so läuft der Weg nicht auf einem Großkreis, er bildet vielmehr das Stück einer Loxodrome (Kurve konstanten Schnittwinkels mit den Meridianen). Unter Hinzunahme des Punktes D, der mit A auf demselben Längengrad, mit B auf demselben Breitengrad liegt, ergibt sich Dreieck ABD auf der Kugel. Bei nicht zu großer Ausdehnung kann dieses durch ein ebenes rechtwinkliges Dreieck näherungsweise ersetzt werden, wobei die eine Kathete gleich dem Breitenunterschied, die andere gleich der Abweitung a und die Hypotenuse gleich der durchfahrenen Distanz d (sämtliche Längen in Seemeilen gemessen) und der Winkel DAB gleich dem Kurswinkel α ist (Fig. 4). In diesem *Kursdreieck* kann lediglich mit den Formeln der ebenen Trigonometrie einerseits aus Distanz d und Kurswinkel α der Breiten- und der Längenunterschied von B gegenüber A und damit der neue Schiffsort B, andererseits umgekehrt aus der geographischen Länge und Breite der beiden Orte A und B Distanz und Kurs für die Fahrt von A nach B (näherungsweise) bestimmt werden, wie die folgenden Beispiele zeigen mögen:

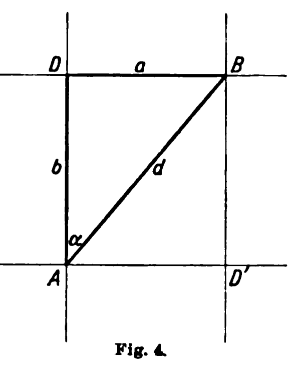


Fig. 4.

Beispiel 6. Vom äußersten Elbefeuerschiff ($54^0 0'$ n; $8^0 15'$ ö) dampft ein Schiff N 30^0 W 110 sm. Wo befindet es sich nun?

Aus dem Kursdreieck folgt

$$b = 110 \cdot \cos 30^0 = 95{,}3 \text{ sm}, \quad a = 110 \cdot \sin 30^0 = 55{,}0 \text{ sm}.$$

Also

$$\begin{array}{rl} \text{verlassene Breite } \varphi_1 = & 54^0\ \ 0'\,\text{n} \\ \text{Breitenunterschied } b = 95 \text{ sm} = & 1^0 35'\,\text{n} \\ \hline \text{erreichte Breite } \varphi_2 = & 55^0 35'\,\text{n}. \end{array}$$

Um die Länge zu finden, muß die Abweitung a erst in Längenunterschied umgerechnet werden. Die oben hergeleitete Formel $l = a : \cos \varphi$ ist streng genommen für den vorliegenden Fall nicht zutreffend, da sie voraussetzt, daß die *Abweitung auf gleichbleibender Breite erzielt worden ist*, und dies ist bei der Fahrt auf der Hypotenuse d nicht der Fall. Auf den ersten Blick scheint es allerdings, als könne die Breite φ_2 des Ankunftsortes genommen werden. Da aber mit demselben Recht auch das Dreieck ABD' (Fig. 4) der Rechnung zugrunde gelegt werden kann, und dann die Breite φ_1 des Abfahrtortes in gleicher Weise in Frage kommt, erkennt man, daß eine gewisse mittlere Breite für die

Umrechnung der Abweitung in Längenunterschied die richtige sein wird. In der Praxis genügt es in den meisten Fällen, das arithmetische Mittel $\varphi_m = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}$ zu benutzen. Dann wird

$$l = 55 : \cos 54^0 48' = 95{,}4.$$

Also

$$\begin{array}{rl} \text{verlassene Länge } \lambda_1 = & 8^0 15' \text{ö} \\ \text{Längenunterschied } l = 95' = & 1^0 35' \text{w} \\ \hline \text{erreichte Länge } \lambda_2 = & 6^0 40' \text{ö.} \end{array}$$

Beispiel 7. Vom äußersten Elbefeuerschiff soll nach Borkumriff-Feuerschiff ($55^0 49'$ n; $6^0 17'$ ö) gefahren werden. Welchen Kurs hat man zu steuern, und wie groß ist die Entfernung?

$$\begin{array}{rl} \text{Verlassene Breite } \varphi_1 = & 54^0\ \ 0' \text{n} \\ \text{zu err. Breite } \varphi_2 = & 53^0 49' \text{n} \\ \hline \text{Breitenunterschied } b = & 0^0 11' \text{s} \\ = & 11 \text{ sm} \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \text{verlassene Länge } \lambda_1 = & 8^0 15' \text{ö} \\ \text{zu err. Länge } \lambda_2 = & 6^0 17' \text{ö} \\ \hline \text{Längenunterschied } l = & 1^0 58' \text{w} \\ = & 118'. \end{array}$$

Die Mittelbreite, mit der die Abweitung berechnet werden muß, ist $\varphi_m = 53^0 55'$. Hieraus folgt $a = 118 \cdot \cos 53^0 55' = 69{,}5$; weiter $\tan \alpha = \frac{69{,}5}{118}$, also $\alpha = 81^0$ und $d = \frac{b}{\cos \alpha} = \frac{11}{\cos 81^0} = 70{,}3$.

In der Praxis wird die Besteckrechnung häufig durch die einfachere, wenn auch weniger genaue Zeichnung auf der Karte ersetzt. Bei Stromversetzung muß die Richtung und Stärke der Strömung geschätzt und in der Besteckrechnung oder Zeichnung berücksichtigt werden.

Wegen der Erdkrümmung liefert die Besteckrechnung am ebenen Kursdreieck nur annähernd richtige Ergebnisse. Doch sind die hierdurch bedingten Ungenauigkeiten bis zu Entfernungen von etwa 300 sm nicht nennenswert, da sie sich unterhalb der durch Kompaß und Log bedingten Fehler halten. Infolge häufigen Kurswechsels im Laufe eines Tages, eines Etmals (= 24 Stunden), ergibt sich meist schon für einen Tag eine ganze Reihe aneinander anschließender kleiner Kursdreiecke, für die man einzeln die Katheten $b_1, b_2, b_3, \ldots$ und $a_1, a_2, a_3 \ldots$ berechnet. In der Regel braucht der Schiffsort nur am Ende des Etmals ermittelt zu werden. Daher ist es bequem, alle Größen b zu einem *Gesamtbreitenunterschied* und alle Größen a zu einer *Gesamtabweitung* zu vereinigen, welch letztere dann durch die Mittelbreite von Ausgangs- und Endort in Gesamtlängenunterschied umgewandelt wird. Dieses vereinfachte Verfahren der Zusammenziehung der Rechnung, das nicht ganz streng ist, wird als Koppelung der Kurse bezeichnet.

Die Besteckrechnung, die dem Seemann durch besondere Tafeln erleichtert wird, eröffnet dem Schüler ein nicht zu schwieriges und abwechselungsreiches (Überquerung des Äquators oder der Datumgrenze!) Anwendungsgebiet für die Formeln des ebenen rechtwinkligen Dreiecks. Bei gelegentlichem Fortschreiten bis zu Aufgaben der Koppelkursrechnung kann dem Schüler der Zwang zu einer sorgfältigen und übersichtlichen Anordnung der Rechnung besonders heilsam sein.

4. Die Seekarte.

An die Besteckrechnung läßt sich die Erklärung der Seekarte gut anknüpfen. Die von Gerhard Kremer 1569 erfundene und nach ihm benannte *Merkatorkarte* ist für die Seefahrer besonders geeignet, weil sie die von den Schiffen *stets befahrenen Kurven konstanten Kurses*, die Loxodromen, winkeltreu als Geraden abbildet. Demgemäß müssen auf dieser Karte die Längen- und Breitenkreise durch orthogonale Parallelenscharen dargestellt sein, was zur Folge hat, daß die Abweitung zwischen zwei Meridianen in allen Breiten gleich groß erscheint und zwar gleich der Abweitung am Äquator, d. h. gleich dem Längenunterschied. Aus der auf dem Globus geltenden Beziehung $a = l \cdot \cos \varphi$ wird also auf der Merkatorkarte $a = l$. Dies bedeutet eine Streckung der Fläche in der Ost-West-Richtung im Verhältnis $1 : \cos \varphi$, durch welche alle Kurswinkel verzerrt würden. Um die Winkeltreue trotzdem zu erzielen, muß die Kartenfläche noch in der Nord-Süd-Richtung in dem gleichen Verhältnis gestreckt werden. Da diese Streckung eine Funktion der Breite ist, so ändert sich das Maß der Streckung von Punkt zu Punkt je weiter man auf dem Meridian nach den Polen zu fortschreitet. Näherungsweise kann man bei der Herstellung der Karte bei der Breite 0^0 (Äquator) beginnend stets den gleichen Betrag db an Bogenminuten (oder Seemeilen) nehmen und diese Schrittlänge jedesmal durch Multiplikation mit dem reziproken Kosinus der Anfangs- (oder Mittelbreite) des Intervalles vergrößern. Durch Addition aller dieser Produkte $db \cdot \frac{1}{\cos \varphi}$ erhält man die vergrößerte Breite Φ der Merkatorkarte. Kremer benutzte als Intervall $db = 30'$ und konstruierte rein geometrisch nacheinander die Breitenkreise seiner Karte. Er erhielt also für die vergrößerte Breite

$$\Phi = 30\left(\frac{1}{\cos 0^0} + \frac{1}{\cos 0{,}5^0} + \frac{1}{\cos 1^0} + \cdots \frac{1}{\cos \varphi}\right).$$

Dies ist nur ein Näherungsverfahren, da die Streckung sich nicht ruckweise von 30 zu 30 Minuten, sondern stetig ändert, was sich rechnerisch nur als Grenzfall verschwindender Intervallgröße ($db \to 0$) erfassen läßt. Dann wird

$$\Phi = \lim \sum_{0}^{\varphi} \frac{db}{\cos \varphi}.$$

Diese Limes-Summe ist nichts anderes als ein Integral, dessen Auswertung die Integralrechnung lehrt. Nach Einführung von Bogenmaß durch

$$db = \frac{10800}{\pi} d\varphi$$

erhält man

$$\Phi = \frac{10800}{\pi}\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\cos \varphi} = \frac{10800}{\pi} \ln \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) = 7915{,}7 \cdot \log \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)$$

und kann daraus zu jeder Breite φ die vergrößerte Breite Φ (auch Meridionalteile genannt) *genau* berechnen. In den nautischen Handbüchern finden sich hierfür ausführliche von Minute zu Minute fortschreitende Wertetabellen.

Aus dem Kursdreieck auf dem Globus wird auf der Merkatorkarte durch die Verzerrung ein vergrößertes, aber ähnliches Dreieck, in dem die Katheten nun der Längenunterschied l (statt a) und der vergrößerte Breitenunterschied $v = \Phi_2 - \Phi_1$ (statt $b = \varphi_2 - \varphi_1$) sind, während die Hypotenuse nicht mehr gleich der Distanz d ist, also keine einfache Bedeutung hat. Wohl aber ist der Kurswinkel α wegen der Winkeltreue der Abbildung erhalten geblieben. Daraus folgt, daß man den Kurswinkel aus $\operatorname{tang} \alpha = l : v$ *genau* berechnen kann, im Gegensatz zu dem Verfahren nach Mittelbreite, das nur Näherungswerte liefert. Das exakte Verfahren nach vergrößerter Breite ist dann anzuwenden, wenn bei sehr weit auseinanderliegenden Orten der Kurswinkel für loxodromische Fahrt bestimmt werden soll. Die Distanz d kann nicht aus dem vergrößerten Kursdreieck berechnet werden, da sie in diesem gar nicht vorkommt. Vielmehr findet man sie aus dem wahren Kursdreieck gemäß $d = b : \cos \alpha$, ein Ergebnis das genau richtig ist, wenn der aus dem *vergrößerten Kursdreieck* berechnete genaue Kurswinkel benutzt wird.[1])

Beispiel 8. Wie groß ist die Entfernung auf loxodromischer Fahrt von San Franzisko bis Jeddo in Japan?

San Fr.	$\varphi_2 = 37^0 49'$ n		$\lambda_2 = 122^0 30'$ w
Jeddo	$\varphi_1 = 35^0 40'$ n		$\lambda_1 = 140^0\ 0'$ ö
Breitenuntersch.	$b = 2^0\ 9'$ s	Längenuntersch.	$l = 97^0 30'$ w
	$= 129'$ s		$= 5850'$.

Für die vergrößerte Breite ergibt sich

$$\Phi_2 = 7915{,}7 \cdot \log \operatorname{tang} 63^0 54{,}5' = 2454{,}3$$
$$\Phi_1 = 7915{,}7 \cdot \log \operatorname{tang} 62^0 50' = 2293{,}4$$
$$\text{vergrößerter Breitenunterschied } v = \Phi_2 - \Phi_1 = 160{,}9$$
$$\operatorname{tang} \alpha = l : v = 5850 : 160{,}9, \quad \text{daraus} \quad \alpha = 88^0 25'$$
$$d = b : \cos \alpha = 129 : 0{,}0277, \quad \text{daraus} \quad d = 4669 \text{ sm.}$$

Die vorstehende an die Merkatorkarte anknüpfende strenge Berechnung der loxodromischen Fahrt wird selbstverständlich erst für Prima in Betracht zu ziehen sein, da sie die Bekanntschaft mit dem natürlichen Logarithmus und dem Integralbegriff voraussetzt. Hier ermöglicht dann auch die Kenntnis der sphärischen Trigonometrie die Berechnung des auf dem Großkreis verlaufenden kürzesten Weges zwischen zwei Punkten der Erdkugel. In dem obigen Beispiel findet man als kürzesten Abstand zwischen San Franzisko und Jeddo 4446 sm, also 223 sm weniger als auf der Loxodrome. Diese Ersparnis von $5\,^0/_0$ fällt praktisch immerhin ins Gewicht. Bei solch großen Entfernungen wird daher in der Schiffahrt der Weg dem Großkreise (Orthodrome) folgen, bei dem

---

1) Da nämlich das Bogenelement der Loxodrome $ds = \frac{d\varphi}{\cos \alpha}$ ist, so folgt durch Integration für die Distanz

$$d = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} ds = \frac{1}{\cos \alpha} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\cos \alpha} = \frac{b}{\cos \alpha}.$$

allerdings streng genommen der Kurs stetig verändert werden müßte, was praktisch undurchführbar ist. Man ist vielmehr darauf angewiesen, mit konstantem Kurs zu fahren und von Zeit zu Zeit die Fahrtrichtung unstetig zu ändern. D. h die einzelnen Stücke der Fahrtlinie sind doch Loxodromen, die auf der Seekarte als gerade Strecken erscheinen und ein Sehnenpolygon des Orthodromenbogens bilden. Die Ecken dieses Polygons können so ermittelt werden, daß man die Schnittpunkte der Meridiane (etwa von 10^0 zu 10^0 Länge fortschreitend) mit dem Großkreis bestimmt. Wenn man den Scheitel berechnet, der ja der Fußpunkt F der vom Pol aus gefällten Höhe ist, so können die Zwischenpunkte dann leicht aus rechtwinkligen sphärischen Dreiecken erhalten werden.

Über die

II. Astronomische Navigation

können wir uns hier kürzer fassen, da einerseits ihre mathematische Grundlage und ihre einfachsten Probleme in der sphärischen Trigonometrie behandelt zu werden pflegen, wie schon der Name „nautisches Dreieck" erkennen läßt, andererseits ihre weitergehenden Methoden über den Rahmen der Schule im allgemeinen hinausgehen. Immerhin könnte und sollte beim Unterricht in der sphärischen Trigonometrie noch öfter die Gelegenheit ergriffen werden, die astronomische Navigation als Anwendungsgebiet heranzuziehen, selbst auf die Gefahr hin, daß dann die Zeit fehlt, um zu berechnen, wann die Breitestraße in Buxtehude am 19. Mai schattenlos ist und wie lang in diesem Augenblick der Schatten einer Fahnenstange von 3 m Höhe in Spitzbergen sein muß! Neben der üblichen Behandlung der Breitenbestimmung aus der Polarsternhöhe oder der Meridianhöhe der Sonne und der Längenbestimmung aus Orts- und Chronometerzeit kann vielleicht unter günstigen Umständen auch ein orientierender Hinweis auf die *neuere Standlinienmethode* erfolgen, von der hier noch kurz die Rede sein soll.

Der Punkt der Erdoberfläche, für welchen ein Stern gerade im Zenit steht, heißt sein *Projektionspunkt* P. Seine geographische Breite ist gleich der Deklination des Sternes δ, während sich seine Länge fortwährend verändert. Die Höhe, unter der man an anderen Punkten der Erde den Stern sieht, ist kleiner als 90^0 und im allgemeinen von Punkt zu Punkt verschieden. Es gibt aber Punkte, die im gleichen Augenblick alle die gleiche Beobachtungshöhe h_b ergeben, natürlich bei verschiedenem Azimut. Sie liegen, wie aus der Eigenschaft der Kugel hervorgeht, alle auf einem Kreis um P, der den sphärischen Abstand $\varepsilon = 90^0 - h_b$ zum Radius hat. Auf diesem Kreise, *Höhengleiche* genannt, muß der Schiffsort liegen, wenn von ihm aus der Stern in der Höhe h_b beobachtet worden ist. Wird gleichzeitig die Höhe eines anderen Sternes bestimmt, so erhält man eine zweite Höhengleiche, die mit der ersten zwei Schnittpunkte ergibt. Welcher von beiden der Schiffsort ist, kann nicht zweifelhaft sein, da durch die Besteckrechnung die Lage des Schiffes annähernd schon bekannt ist. Die Ausführung dieses sehr einfachen Gedankens bietet nun insofern Schwierigkeiten, als die Höhengleiche auf der Merkatorkarte weder ein Kreis noch eine Gerade ist und darum nicht unmittelbar eingezeichnet werden kann. Man benutzt daher folgendes Verfahren (Fig. 5): Als Ausgangspunkt dient zunächst der durch die Besteckrechnung gefundene Schiffsort O_g, das sogenannte *gegißte Besteck* (φ_g, λ_g). Für diesen Ort O_g berechnet man aus dem nautischen Dreieck

Zenit-Pol-Gestirn (bekannt: Stundenwinkel, Breite, Deklination) die Höhe h_e und das Azimut ω des Steines. Von O_g aus kann man dann den Azimutstrahl auf der Karte einzeichnen näherungsweise als Gerade, die die Richtung nach P angibt. Die *errechnete Höhe* h_e weicht im allgemeinen von der *beobachteten Höhe* h_b etwas ab, da O_g nicht der genaue Schiffsort ist. Es sei $\triangle h = h_b - h_e$. Diese Höhendifferenz (in Minuten) braucht nur auf dem Azimutstrahl von O_g aus (bei $\triangle h > O$ nach P hin, bei $\triangle h < O$ von P fort) in Seemeilen abgetragen zu werden, um den Punkt zu finden, in dem die gesuchte Höhengleiche den Azimutstrahl rechtwinklig schneidet, er heißt der Leitpunkt L_1. In

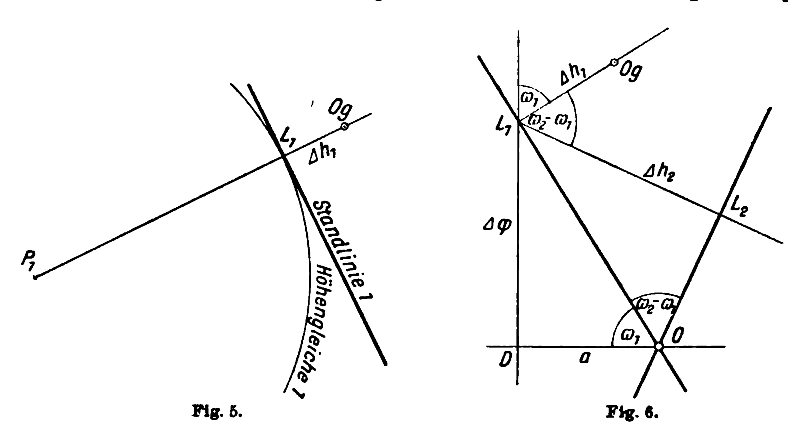


Fig. 5. Fig. 6.

oder nahe bei L_1 auf der Höhengleiche muß der Schiffsort liegen. Da der Spielraum nicht groß sein kann, ist es statthaft, das kurze in Frage kommende Stück der Höhengleiche auf der Karte als tangentiale Gerade durch L_1 senkrecht zum Azimutstrahl zu zeichnen. Hiermit ist *eine* Standlinie gefunden, eine zweite ergibt sich in gleicher Weise aus der Höhenbestimmung des zweiten Sternes, nur nimmt man jetzt als Ausgangspunkt der Berechnung statt O_g den genaueren Punkt L_1. Der Schnittpunkt beider Standlinien ist der Schiffsort O. Die Konstruktion der Standlinien erfolgt entweder unmittelbar auf der Seekarte oder die Auswertung wird rechnerisch vorgenommen, indem nach dem Verfahren der Besteckrechnung zunächst aus O_g. Länge und Breite beider Leitpunkte L_1 und L_2 mit Hilfe von $\triangle h_1$, ω_1 und $\triangle h_2$, ω_2 ermittelt wird. Die weitere Ausrechnung erfolgt am besten an einer Skizze. Man erhält dann (Fig. 6)

$$b = \triangle \varphi = L_1 O \cdot \sin \omega_1 \quad \text{und} \quad L_1 O = \triangle h_2 : \sin(\omega_2 - \omega_1),$$

also
$$\triangle \varphi = \frac{\triangle h_2 \sin \omega_1}{\sin(\omega_2 - \omega_1)}$$

und daraus
$$\varphi = \varphi_1 + \triangle \varphi.$$

Weiter
$$a = \triangle \varphi \cdot \operatorname{ctg} \omega_1 \quad \text{und} \quad l = a : \cos \varphi,$$

also
$$l = \triangle \lambda = \frac{\triangle h_2 \cdot \cos \omega_1}{\sin(\omega_2 - \omega_1) \cdot \cos \varphi}$$

und daraus
$$\lambda = \lambda_1 + \triangle \lambda.$$

Der Begriff der Höhengleiche ist natürlich auch bei den einfacheren Methoden der Breitenbestimmung anwendbar und führt in diesen Sonderfällen zu sehr anschaulichen Ergebnissen. Bei der Messung der Polhöhe (Polarsternhöhe) ist der Projektionspunkt P der Nordpol der Erde, so daß die Höhengleiche ein Parallelkreis sein muß und auf der Karte genau als Breitengrad erscheint. Bei der Breitenbestimmung durch die Meridianhöhe der Sonne ist die Höhengleiche ein Kreis, der den Breitenkreis des Beobachtungsortes berührt, so daß auf der Karte die Standlinie mit dem Breitenkreis sich deckt. In beiden Fällen ist die Zeichnung oder Berechnung eines Leitpunktes entbehrlich, worin eben der Vorzug dieser einfachen Methoden liegt.

Mit diesen Andeutungen muß es hier sein Bewenden haben. Weiteres kann aus den orientierenden oder grundlegenden Werken über Navigation entnommen werden, von denen einige unten angegeben sind. Ohne Anspruch auf irgendwelche Vollständigkeit sollte hier nur das reiche Anwendungsgebiet, das die Nautik dem mathematischen Unterricht darbietet, einmal in den Blickpunkt der Schulmathematiker gerückt werden. Möge die Berücksichtigung der Nautik dazu beitragen, dem mathematischen Unterricht die „Trockenheit" vollends zu nehmen!

Literatur.

Lehrbuch für den Unterricht in der Navigation an der Marineschule. Berlin 1917, Mittler & Sohn.

Meldau, Nautik. Encyklopädie d. math. Wissensch. Band VI. 1; 5.

Wirtz, Geographische Ortsbestimmung. Encyklopädie d. math. Wissensch. Band VI. 2; 3.

Möller, Nautik. (Aus Natur und Geisteswelt.)

Schulze, Nautik. (Göschen.)

Bolte, Elementare Schiffahrtskunde. (Seemännische Bücherei.) Hamburg, Eckardt & Meßtorff.

Fulst u. Meldau, Nautische Aufgaben. (Seemännische Bücherei.) Hamburg, Eckardt & Meßtorff.

Der Sturmsche Satz in graphischer Darstellung.

Von P. Buchner in Basel.

Mit 6 Figuren im Text.

Die Reformbewegung im mathematischen Unterricht hat der graphischen Darstellung eine führende Rolle zugewiesen. Immer mehr wird wohl im höheren Unterricht die Cardanische Formel verschwinden und an deren Stelle die generelle Behandlung der Gleichungen höheren Grades mit Näherungsverfahren treten.

Zur Bestimmung der reellen Wurzeln einer algebraischen Gleichung empfiehlt sich insbesondere das Lillsche Verfahren.[1] Seine einzige Voraussetzung bildet die graphische Multiplikation; außerdem ist die Durchführung von größter Einfachheit, hat man doch lediglich rechtwinklig gebrochene Streckenzüge zu zeichnen.

In einem Aufsatz dieser Zeitschrift weist E. Dintzl[2]) darauf hin, daß diese

1) E. Lill, Résolution graphique des équations numériques de tous les degrés à une seule inconnue et description d'un instrument inventé dans ce but. Nouvelles Annales de Mathématiques T. 6. 1867.

2) E. Dintzl, Graphische Darstellung von Sätzen der elementaren Algebra. Diese Zeitschrift, Bd. 54, S. 21, 1923.

Methode mit Vorteil auch in der Präzisionsmathematik Verwendung finden könne, insbesondere wird die graphische Multiplikation und Division von ganzen, rationalen Funktionen durchgeführt. Dieser Anregung folgend, soll ein weiteres Theorem der Präzisionsmathematik, der Sturmsche Satz, der graphischen Behandlung zugänglich gemacht werden.

Wurden auf Grund des Lillschen Verfahrens weniger Wurzeln gefunden, als der betreffenden Gleichung zukommen, so wird man leicht unsicher bleiben, ob die Ungenauigkeit der graphischen Methode oder die Existenz komplexer Lösungen die Ursache sei. Selbst auf Grund der Regeln von Budan-Fourier, Newton oder Descartes wird sich eine Entscheidung meist nicht treffen lassen. Eine vollständige Lösung des Problems bietet aber der Sturmsche Satz, jedoch setzt seine Verwendung umständliche Rechnungen voraus, weswegen sie gänzlich unterbleiben wird. Ist man aber mit der graphischen Behandlung dieses Theorems vertraut, so wird man sich zur Ausführung der wenigen Striche rascher entschließen und zwar umso eher, als sich dieselbe ganz in das Lillsche Schema einbauen läßt.

Es sei $y = f(x)$ eine ganze rationale Funktion n^{ten} Grades und $f'(x) = f_1(x)$ ihre erste Ableitung. Der Einfachheit halber soll angenommen werden, daß $f(x) = 0$ keine mehrfachen Wurzeln besitzt. Bekanntlich erhält man die Sturmsche Kette

$$f(x) = \sum_{\nu=n}^{\nu=0} a_\nu x^\nu, \quad f_1(x) = \sum_{\nu=n-1}^{\nu=0} b_\nu x^\nu, \quad f_2(x) = \sum_{\nu=n-2}^{\nu=0} c_\nu x^\nu, \quad \ldots, f_{\varkappa-1}(x), f_\varkappa \qquad (1)$$

auf Grund des folgenden Algorithmus:

$$\begin{aligned} f_2(x) &= q_1(x) f_1(x) - f(x), \\ f_3(x) &= q_2(x) f_2(x) - f_1(x), \\ &\cdots\cdots\cdots \\ f_\varkappa\ \ &= q_{\varkappa-1}(x) f_{\varkappa-1}(x) - f_{\varkappa-2}(x). \end{aligned}$$

Dieses Verfahren ist fortzusetzen, bis $f_\varkappa$ von x unabhängig geworden ist. Der Sturmsche Satz sagt aus, daß die genaue Zahl der reellen Wurzeln zwischen x_1 und x_2 gleich ist der Anzahl der beim Übergang von $x = x_1$ zu $x = x_2$ verlorenen Zeichenwechsel der Sturmschen Kette (1).

Besonders wichtig ist der Umstand, daß in der Folge (1) die Funktionen $f_\nu(x)$ ersetzt werden dürfen durch $c_\nu f_\nu(x)$, wobei c_ν irgendeine positive Konstante bedeutet

Da im folgenden eine von der Dintzlschen abweichende Darstellung vorgezogen wird, soll in Kürze auf alle in Frage kommenden Operationen eingegangen werden.

I. Das Lillsche Verfahren zur Bestimmung der Funktionswerte. Zur Konstruktion der Funktionswerte von

$$y = f(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 2x^3 + 3x^2 - 2x - 1 \qquad (2)$$

hat man in einem rechtwinkligen Koordinatensystem das „Graph“ dieser Funktion einzuzeichnen, wobei sich die Figuren 1—5 auf das Zahlbeispiel beziehen. Im Punkte $A_3\,(0; -1)$ beginnend trägt man den Vektor a_3, in Übereinstimmung

mit seinem Vorzeichen, in der Richtung der positiven resp. negativen y-Achse auf. Die Richtung jedes folgenden Vektors bildet mit derjenigen des unmittelbar vorangehenden einen rechten Winkel. Haben die beiden aufeinanderfolgenden Koeffizienten a_ν, $a_{\nu-1}$ gleiches Vorzeichen, so hat man in positivem, bei entgegengesetzten Zeichen aber in negativem Drehsinn abzuschwenken.

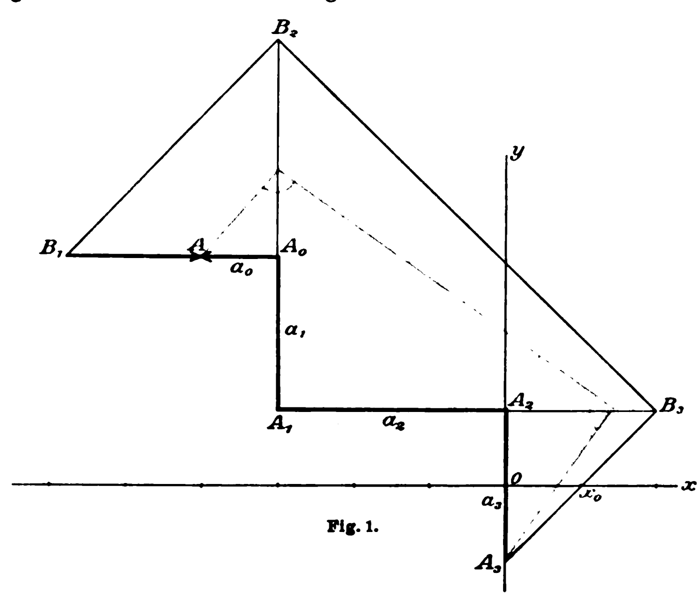


Fig. 1.

Um den Funktionswert y an der Stelle $x = x_0$ zu konstruieren, zeichnet man den rechtwinkligen Zug $A_3 B_3 B_2 B_1$. Alsdann ist auf Grund der graphischen Multiplikation (Fig. 1)

$$B_3 A_2 = a_3 x_0,$$

$$B_3 A_1 = a_3 x_0 + a_2,$$

$$B_2 A_1 = (a_3 x_0 + a_2)\, x_0,$$

$$B_2 A_0 = (a_3 x_0 + a_2)\, x_0 + a_1,$$

$$B_1 A_0 = [(a_3 x_0 + a_2)\, x_0 + a_1]\, x_0,$$

$$B_1 A = [(a_3 x_0 + a_2)\, x_0 + a_1]\, x_0 + a_0 = y(x).$$

Je nachdem a_0 und $y(x_0) = B_1 A$ gleiche oder entgegengesetzte Richtung besitzen, stimmen sie im Zeichen überein oder nicht. Offenbar ist $x = x_0$ eine Wurzel der Gleichung

$$a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0,$$

falls der Streckenzug $A_3 B_3 B_2 B_1$ in A endigt.

II. Das Graph der Ableitung. Durch Differentiation folgt aus (2)

$$y' = f_1(x) = 3\, a_3 x^2 + 2\, a_2 x + a_1 = b_2 x^2 + b_1 x + b_0.$$

Da durch die Differentiation an der Vorzeichenfolge nichts geändert wird, sondern die Koeffizienten lediglich eine Vergrößerung erfahren, ist doch

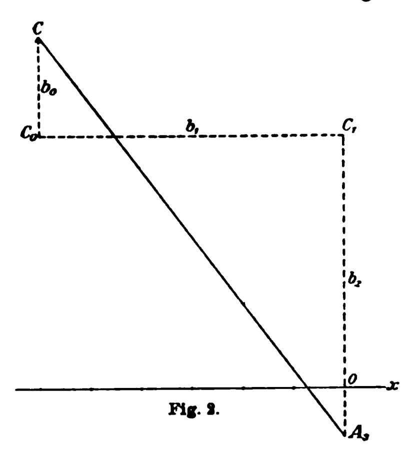


Fig. 2.

$$b_{\nu-1} = \nu a_\nu,$$

so geht das Graph der Ableitung in einfacher Weise aus dem der Hauptfunktion hervor (Fig. 2).

III. Division zweier Polynome. Um das dritte Glied $f_2(x)$ der Sturmschen Kette (1) zu erhalten, hat man $f(x)$ durch $f_1(x) = f'(x)$ zu dividieren. Ist R_2 der Divisionsrest, so ist

$$f_2(x) = -R_2 = -c_1 x - c_0, \qquad (3)$$

oder $\quad f(x) = q_1(x) f_1(x) - f_2(x).$

Die Kenntnis von $q_1(x)$ ist nicht notwendig, ebensowenig die absoluten Dimensionen des Graphs von $f_2(x)$, da positive Zahlfaktoren weggelassen werden können.

Um die Division[1]) auszuführen, hat man das Graph von $f_1(x)$ im Verhältnis $1:3$ [im allgemeinen $1:n$] ähnlich verkleinert auf dasjenige von $f(x)$ zu legen. Es wird alsdann der Vektor a_3 von $\frac{b_2}{3}$ vollständig überdeckt; hingegen wird $\frac{b_1}{3}$ den Vektor a_2 im allgemeinen nicht ausschöpfen. Deshalb hat man im Endpunkt C den die Funktion $f_1(x)$ repräsentierenden Streckenzug (Fig. 2) gegenüber der ersten Stellung um 90^0 gedreht, nochmals anzufügen (Fig. 3). Hierbei hat man das Ähnlichkeitsverhältnis derart zu wählen, daß der erste Vektor gleich dem Reststück $C_0 A_1$ des Vektors a_2 wird. Das Graph des Divisionsrestes R_2 wird durch den Streckenzug $C' D_0 A$ dargestellt. Bei dem vorliegenden Zahlenbeispiel (2) sind $c_1 = C' D_0$ und $c_0 = D_0 A$ von gleicher Richtung und daher gleichem Vorzeichen, wie a_1 resp. a_0 (Fig. 3), also beide negativ. Infolge (3) hat aber $f_2(x)$ positive Koeffizienten.

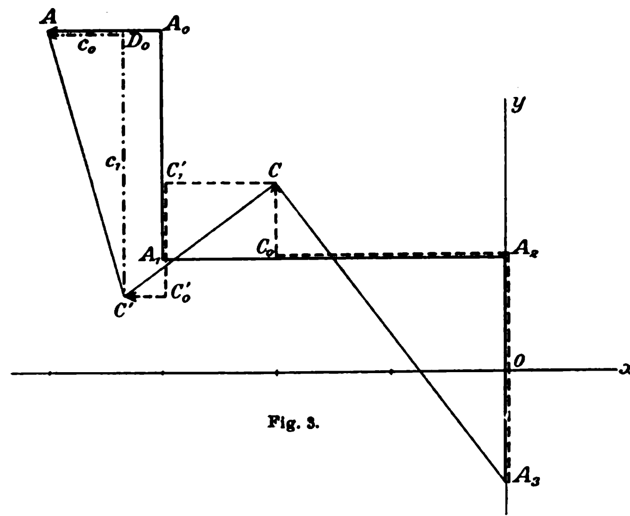


Fig. 3.

Nebenbei bemerkt, kann auch die Funktion $q_1(x)$ der Figur entnommen werden; ihr zugeordnetes Graph wird durch $A_3 C C'$ gegeben (s. Dintzl, a. a. O.).

1) E. Dintzl, a. a. O.

Endlich verbleibt noch die Konstruktion von f_3. Der Streckenzug c_1, c_0 wird ähnlich verkleinert auf den Zug b_2, b_1, b_0 gelegt, derart, daß das Bild von c_1 den Vektor b_2 überdeckt. Hierzu ist offenbar nur notwendig, durch $A_3 (0; -1)$ die Parallele zu $C'A$ (Fig. 3) zu ziehen bis zum Schnitt in D (Fig. 4). In D ist c_1, c_0 nochmals anzufügen, und zwar so reduziert, daß das Bild von c_1 die Strecke DC_0 ausfüllt. Der Divisionsrest R_3 ergibt sich zu $D'C$ und hat mit b_0 gleiches Vorzeichen (Fig. 4). In unserem Zahlbeispiel kann daher $f_3 = +1$ angenommen werden.

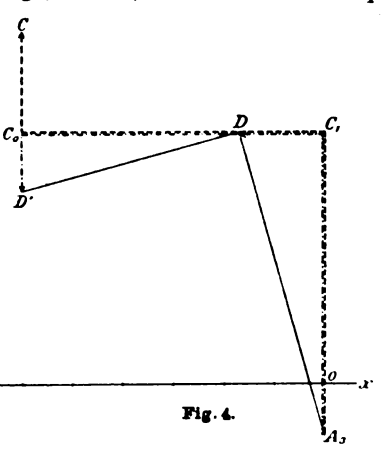


Fig. 4.

IV. Die Sturmsche Kette. Die eben konstruierten Streckenzüge aller Funktionen der **Sturmschen** Kette (1) werden in dasselbe Koordinatensystem eingezeichnet, wobei dieselben zugleich derart normiert werden, daß sie sämtlich denselben Anfangsvektor besitzen. Nach dem **Lillschen** Verfahren werden z. B. die Funktionswerte an den Stellen $x = -2; -1; 0; +1$ konstruiert (Fig. 5) und die Ergebnisse in einer Tabelle zusammengestellt:

Fig. 5.

x:	-2	-1	0	$+1$
sig. $f(x)$:	sig. $A_0A = -$	sig. $B_1A = +$	sig. $A_0A = -$	sig. $B_1A = +$
sig. $f_1(x)$:	sig. $BC = +$	sig. $C_0C = -$	sig. $C_0C = -$	sig. $BC = +$
sig. $f_2(x)$:	sig. $FD = -$	sig. $C_0D = -$	sig. $A_2D = +$	sig. $B_2D = +$
sig. f_3:	$+$	$+$	$+$	$+$
Zahl der Zeichenwechsel	3	2	1	0
Wurzeln		1	1	1

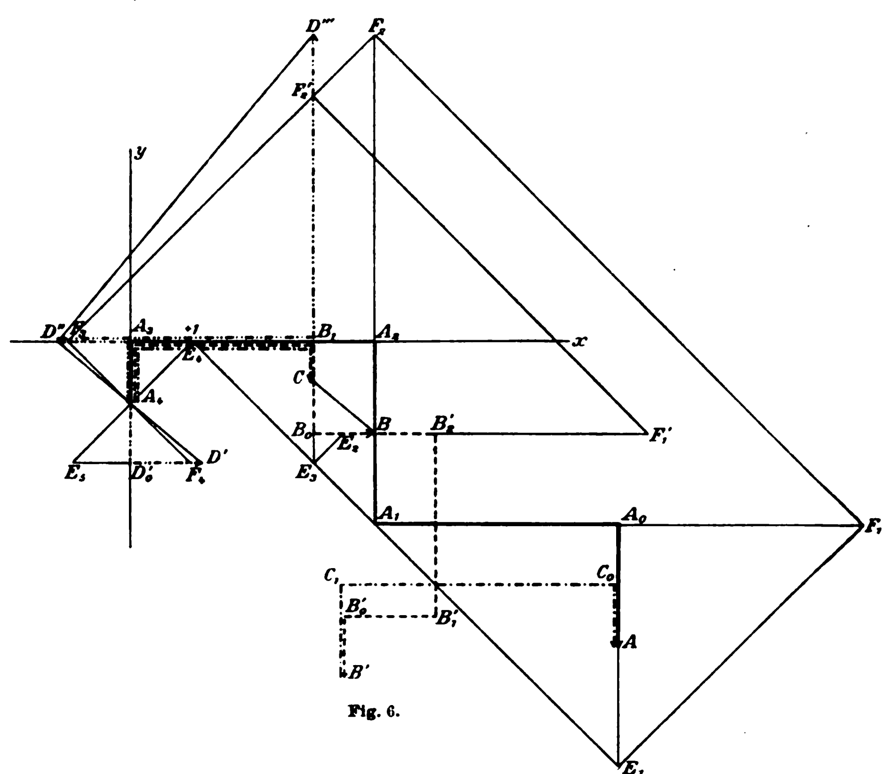


Fig. 6.

V. Ein Beispiel vierten Grades. In mehr kursorischer Weise soll die Gleichung

$$x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 4x - 2 = 0$$

behandelt werden. In Fig. 6 ist durch den Streckenzug $A_4A_3A_2A_1A_0A$ das Graph dieses Gleichungspolynoms gegeben. Das Graph der ersten Ableitung ist im Verhältnis $1:4$ verkleinert auf dasjenige der Hauptfunktion aufgelegt und durch $A_4A_3B_1B_0B$ dargestellt. Da A_3A_2 durch A_3B_1 nicht überdeckt wird, so hat man das Graph von $f_1(x)$ nochmals in B anzufügen; so gelangt

man über $BB_2'B_1'B_0'B'$ nach B'. Der Divisionsrest R_2 wird durch $B'C_1C_0A$ repräsentiert.[1]) Hierbei hat $B'C_1$ zu A_2A_1 entgegengesetztes Zeichen, ist also selbst negativ. Nun ist aber

$$f_2(x) = -R_2,$$

somit wird der Koeffizient von x^2 positiv.

Zur Bestimmung von $f_3(x)$ hat man $f_1(x)$ durch $f_2(x)$ zu dividieren. Diese Operation ist in Fig. 6 enthalten, indem der Streckenzug $B'C_1A_0A$, entsprechend verkleinert, nach $A_4A_3B_1C$ transportiert wurde. Zufälligerweise ist damit die Division bereits beendet, da die Strecke A_3B_1 zugleich mit A_4A_3 überdeckt wird. Der Divisionsrest R_3 wird daher durch CB_0B dargestellt, wobei CB_0 mit B_1B_0 gleiche Richtung besitzt und daher von positivem Vorzeichen sein wird. Der Koeffizient von x in $f_3(x)$ ist daher negativ, und das Graph dieser Funktion, derart normiert, daß allen Funktionen der Kette (1) ein Anfangskoeffizient von gleichem absolutem Betrage zukommt, wird daher durch $A_4D_0'D'$ wiedergegeben.

Endlich ist noch die Division von $f_2(x)$ durch $f_3(x)$ durchzuführen, wozu der Streckenzug $A_4D_0'D'$ um 180^0 gedreht auf $A_4A_3B_1C$ zu legen ist. Da A_3D'' die zu A_3B_1 entgegengesetzte Richtung besitzt, so ist die zweitmalige Abtragung von $f_3(x)$ so vorzunehmen, daß $D''B_1$ die zu A_4D_0' entsprechende Strecke wird, wobei nur notwendig ist, auf A_4D'' das Lot $D''D'''$ zu fällen und in D''' mit B_1D''' zum Schnitt zu bringen. Der Divisionsrest R_4 entspricht alsdann der Strecke $D'''C$ und hat demnach positives Zeichen, daher kann

$$f_4 = -1$$

angenommen werden. Durch Anwendung des Lillschen Verfahrens erhält man leicht folgende Zusammenstellung:

x:	-1	0	$+1$
sig. $f(x)$:	sig. $E_1A = +$	sig. $A_0A = -$	sig. $E_1A = +$
sig. $f_1(x)$:	sig. $F_1'B = -$	sig. $B_0B = +$	sig. $E_2B = +$
sig. $f_2(x)$:	sig. $F_2'C = +$	sig. $B_1C = +$	sig. $E_3C = -$
sig. $f_3(x)$:	sig. $F_4D' = -$	sig. $D_0'D' = -$	sig. $E_5D' = -$
sig. f_4:	$-$	$-$	$-$
Zeichenwechsel	3	2	1
Wurzeln:		1	1

Die beiden einzigen reellen Wurzeln liegen in den Intervallen $(-1; 0)$ und $(0; +1)$.

1) Siehe Dintzl, a. a. O.

Über die zeichnerische Lösung einer Dreiecksaufgabe mit Hilfe des Lillschen Verfahrens.

Von Alexander Fischer in Göding (Mähren).

Mit 3 Figuren im Text.

Die Berechnung ebener Dreiecke aus gegebenen Bestimmungsstücken führt bekanntlich des öfteren zu Gleichungen höheren Grades, so daß die konstruktive Lösung nicht mehr mittels Zirkel und Lineal durchgeführt werden kann. Im folgenden soll gezeigt werden, daß die Anwendung des seit langer Zeit bekannten Lillschen Verfahrens zur Auflösung algebraischer Gleichungen sich auch hier von Vorteil erweisen kann, ja, im vorliegenden Fall geradezu den naturgemäßesten Weg zur konstruktiven Lösung darbietet.

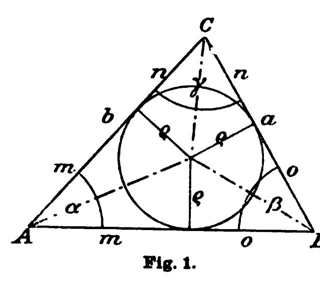


Fig. 1.

Es seien als Bestimmungsstücke eines schiefwinkligen ebenen Dreiecks gegeben: Die Längen der beiden Seiten a, b sowie der Inkreishalbmesser ϱ.

1. Die *rechnerische* Lösung gestaltet sich folgendermaßen: Es ergibt sich auf Grund der Beziehungen (s. Fig. 1)

$$\frac{\varrho}{m} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}, \quad \frac{\varrho}{n} = \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}, \quad \frac{\varrho}{o} = \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$$

$$m + n = b, \quad n + o = a, \quad \alpha + \beta + \gamma = 180^0$$

folgendes Gleichungssystem (A):

$$\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2} = \frac{b}{\varrho},$$

$$\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2} = \frac{a}{\varrho},$$

$$\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{cotg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2} = \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}\cdot\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}\cdot$$

Nach Einführung von $x = \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$ ergibt sich daraus folgende Gleichung für x:

$$(a+b)x^3 - \left(\frac{ab}{\varrho} + \varrho\right)x^2 + (a+b)x - \varrho = 0.$$

2. Durch die Heranziehung des Lillschen Verfahrens[1]) kann nun die *zeichnerische* Lösung bewerkstelligt werden. Dasselbe besteht in Kürze in folgendem: Es sei die Funktion

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

gegeben. Unter Annahme einer Anfangsrichtung und eines positiven Drehsinns stellt man die Koeffizienten a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0 dieser ganzen rationalen Funktion durch Strecken dar, die in einem beliebigen Maßstabe so aneinandergefügt werden, daß der Anfangspunkt jeder Strecke auf den Endpunkt der unmittelbar

1) Die Literatur über dasselbe ist am Schluß dieser Note zusammengestellt.

vorhergehenden fällt und jede Strecke gegen die vorhergehende im Drehsinn — bei negativem Koeffizienten entgegen demselben — um 90° gedreht ist. Es entsteht so ein *Rechtwinkelzug*, der der *ursprüngliche* genannt werde, und dieser stellt die Funktion $f(x)$ dar. Ist für x ein beliebiger Zahlenwert gegeben, so zieht man durch den Anfangspunkt o (s. Fig. 2) eine Gerade op_1 bis zum Schnittpunkt p_1 mit der Geraden $o_1 o_2$ in solcher Richtung, daß, wenn $x = \operatorname{tg} \varphi$ gesetzt wird, aus ihr durch Drehung im positiven oder negativen Drehsinn oo_1 entsteht, je nachdem x positiv oder negativ ist. Wird in der in Fig. 2 angegebenen Weise fortgefahren, so entsteht ein neuer Rechtwinkelzug $op_1p_2 \cdots p_n$; fällt sein Endpunkt p_n mit dem Endpunkt o_{n+1} des ursprünglichen Zuges zusammen, so heißt er *auflösender Rechtwinkelzug*. Dann ist das entstehende $r = \operatorname{tg} \varphi$ eine Wurzel der Gleichung, also $f(r) = o$. Es kann weiter gezeigt werden[1]), daß dieser auflösende Zug der Wurzel r der vorgelegten Gleichung n-Grades die Gleichung $(n-1)$-Grades (wenn auch in einem anderen Maßstabe) darstellt, durch deren Auflösung man die übrigen Wurzeln der *ursprünglichen* Gleichung erhält. Zur raschen Gewinnung *einer* Wurzel kann man entweder ein Probierverfahren[2]) ein-

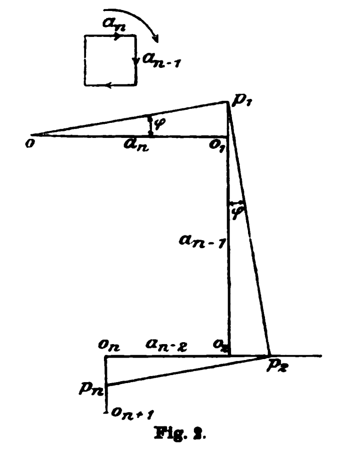


Fig. 2.

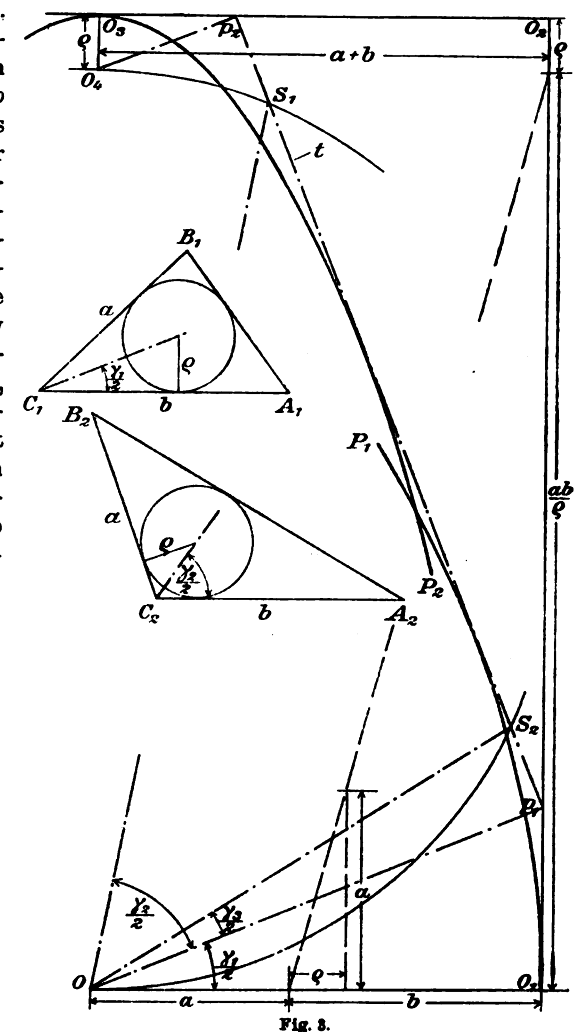


Fig. 3.

1) S. z. B. R. Mehmke, H. v. Sanden.
2) S. z. B. C. Runge, H. v. Sanden.

schlagen, oder aber auch systematisch vorgehen, indem man Beziehungen zwischen den zu Anfangs- und Endpunkt gehörenden Hüllkurven verwendet.[1]) Im vorliegenden Fall ist dieser letztere Weg besonders einfach und daher betreten worden. Wie leicht einzusehen, besitzen die zum Anfangspunkt des ursprünglichen Rechtwinkelzuges gehörenden Strahlen $p_1 p_2$ als Einhüllende eine Parabel[2]); das gleiche ist für die Strahlen, die in entsprechender Weise zum Endpunkt gehören, der Fall (s. Fig. 3). Bei der Gleichung 3. Grades erhält man also die Lösung in der gemeinsamen Tangente beider Parabeln.

Die Fig. 3 zeigt die Berechnung des Falles $a = 40$, $b = 50$, $\varrho = 11$. Daselbst ist auch die Konstruktion der Größe $\frac{ab}{\varrho}$ gestrichelt angedeutet. Aus der gemeinsamen Tangente t der beiden Parabeln P_1 und P_2 ergibt sich zunächst der Winkel $\frac{\gamma_1}{2}$, zu dem das Dreieck $A_1 B_1 C_1$ gehört. Der so entstandene auflösende Rechtwinkelzug $o p_1 p_2 o_4$, der zur Gleichung 2. Grades gehört, ergibt gemäß dem für diese Gleichung in der Literatur Bewiesenen in seinen Schnittpunkten S_1 und S_2 mit dem Kreis über $o o_4$ die beiden Lösungen $\frac{\gamma_2}{2}$ und $\frac{\gamma_3}{2}$. Zu ersterer gehört das Dreieck $A_2 B_2 C_2$, während letztere *keine* Lösung der vorgelegten Aufgabe ergibt, indem aus der Konstruktion aus a, b und $\frac{\gamma_3}{2}$ kein Dreieck hervorgeht, das den gegebenen Bedingungen entspricht. Der Grund hierfür ist darin zu suchen, daß die im 1. Teile angeschriebenen Formeln für $\frac{\alpha}{2}$ und $\frac{\beta}{2}$ Werte $> \frac{\pi}{2}$ ergeben, was sinnlos ist. — Wie leicht nachzuweisen, geht aus den Beziehungen auf den Rechtwinkelzügen die Beziehung $\frac{\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3}{2} = \sphericalangle\, o_1 o\, o_4 = 90^0$ hervor, die einen Sonderfall der allgemeinen Beziehung zwischen den Wurzeln und Koeffizienten einer algebraischen Gleichung darstellt, die ihrerseits die in der Literatur vorkommenden arc tg-Relationen zur Berechnung von $\frac{\pi}{n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ umfaßt.[3])

Im zweiten Band seiner Vorlesungen über „Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus" bespricht F. Klein[4]) die *„argen Mißstände,* die sich *infolge der isolierten Stellung der Elementargeometrie* fern von der allgemeinen Entwicklung der Mathematik herausgebildet haben . . ." Er nennt hier die „algebraische Geometrie", die „Dreieckskonstruktionen" und die „Dreiecksgeometrie". Wie leicht einzusehen, wird gerade durch das im vorstehenden gegebene Lillsche Verfahren einerseits ein allgemeines Verfahren zur Lösung hierher gehöriger Aufgaben gegeben und anderseits eine passende Verbindung zwischen der Elementargeometrie und den a. a. O. genannten Hochschulvorlesungen über graphische Methoden hergestellt, die ihrerseits diesem elementaren Gebiete eine reichhaltige Auswahl von Übungs- und Anwendungsbeispielen entnehmen können.

---

1) Vgl. hierzu A. Fischer, J. Geißler.

2) Die Gleichung der Hüllparabel ist nach leichter Rechnung $y^2 = 4ax$, wenn a die Entfernung des Ausgangspunkts auf der x-Achse bedeutet.

3) Vgl. hierzu A. Fischer.

4) 2. Aufl., Leipzig u. Berlin 1914, B. G. Teubner. (S. 461.)

Literatur über das Lillsche Verfahren.

L. Bieberbach, Über neuere Lehrbücher der praktischen Analysis. (Zeitschr. f. angewandte Mathematik u. Mechanik 1 [1921], Heft 1, S. 61.)

A. Fischer, Beiträge zum graphischen Rechnen. II. Zur graphischen Auflösung algebraischer Gleichungen nach Lill. (Der prakt. Maschinen-Konstrukteur 54 [1921], Nr. 28, S. 225.)

J. Geißler, Ein Beitrag über die graphische Bestimmung reeller Wurzeln einer algebraischen Gleichung. (Zeitschr. d. österr.-Ing. u. Arch.-Vereins 1916, Heft 36, S. 679.)

R. Mehmke, Leitfaden zum graphischen Rechnen. 1. Aufl. (Leipzig u. Berlin 1917, B. G. Teubner.)

M. d'Ocagne, Calcul graphique et Nomographie. 3e éd. (Paris 1924, Oct Doin.)

C. Runge, Graphische Methoden. 2. Aufl. (Leipzig u. Berlin 1919, B G. Teubner.)

H. v. Sanden, Praktische Analysis. 1. Aufl. (Leipzig u. Berlin 1914, B. G. Teubner.)

Kleine Mitteilungen.

Nochmals die Dreiteilung einer Strecke. (Vgl. d. Zeitschrift 47. Jahrg., S. 389; 48. Jahrg., S. 28; 49. Jahrg., S. 215.) Die Kreise um A und B (Endpunkte der gegebenen Strecke a) mit dem Radius a schneiden sich in C und D. Der Kreis um C mit dem Radius a schneidet die beiden ersten Kreise in E und F. Die Kreise um E und F (Radius a) schneiden den Kreis um C in G und H. Die Verbindungsgeraden GD und HD schneiden AB in J und K. Es ist

$$AJ = JK = KB.$$

(Alle bei der Konstruktion benutzten Kreise haben also denselben Radius a.)

Erfurt. E. Lampe.

Über die stereographische Projektion. (Mit 2 Figuren im Text.) Projiziert man die Punkte einer Kugeloberfläche vom „Nordpol" N auf die „Äquatorebene" oder eine dazu parallele Ebene Π, so erhält man eine Abbildung der Kugel auf die Ebene, die sogenannte „stereographische Projektion". Sie hat zwei wichtige Eigenschaften: erstens ist sie winkeltreu, zweitens bildet sie die Kreise auf der Kugel auf die Kreise und Geraden der Ebene ab.

Die zweite Eigenschaft wird im allgemeinen durch räumliche Betrachtungen oder durch Rechnung bewiesen. Der folgende Beweis stützt sich demgegenüber auf einige geometrische Betrachtungen für die Ebene und die Kugel, insbesondere auf die unter 2. angeführte Verallgemeinerung des Peripheriewinkelsatzes.

Zunächst sei an einige einfache Eigenschaften der stereographischen Projektion erinnert.

1. Jeder durch den Pol N gehende Kreis auf der Kugel wird in der Ebene auf eine Gerade abgebildet, die parallel der Kreistangente in N ist (die Schnittgerade der Kreisebene mit der Projektionsebene Π). Zwei Kreise durch N gehen in zwei Geraden über, die sich unter demselben Winkel schneiden, wie die Kreise auf der Kugel. Das letzte ergibt sich aus dem auch für das folgende wichtigen und anschaulich unmittelbar einleuchtenden Satze, daß zwei Kreise auf der Kugel oder in der Ebene sich in beiden Schnittpunkten — wenn sie sich überhaupt treffen — unter demselben Winkel schneiden.

2. In einer Ebene (oder auf einer Kugel) seien K ein Kreis, A, B, C beliebige Punkte auf K und K_1, K_2, K_3 drei beliebige Kreise durch B und C,

C und A, A und B, die sich (der Einfachheit wegen) in K nicht weiter schneiden mögen (Fig. 1). α, β, γ seien die Winkel im Kreisbogendreieck ABC. Hält man AB und K_3 fest und läßt C auf dem einen Bogen AB von K wandern und auch K_1 und K_2 variieren, dann gilt die Beziehung

$$\alpha + \beta - \gamma = \text{konst.}$$

Es ist nämlich

$$\alpha + \beta - \gamma = \pi - (\varepsilon + \eta) + \pi - (\delta + \eta) - (\pi - (\delta + \varepsilon)) = \pi - 2\eta,$$

und η bleibt fest.

Ein bekannter Spezialfall auf der Kugel tritt ein, wenn K_1, K_2, K_3 Großkreise sind. In der Ebene ergibt sich durch Spezialisierung von K_1, K_2, K_3 auf Geraden der Peripheriewinkelsatz, da dann auch die Gleichung $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ gilt.

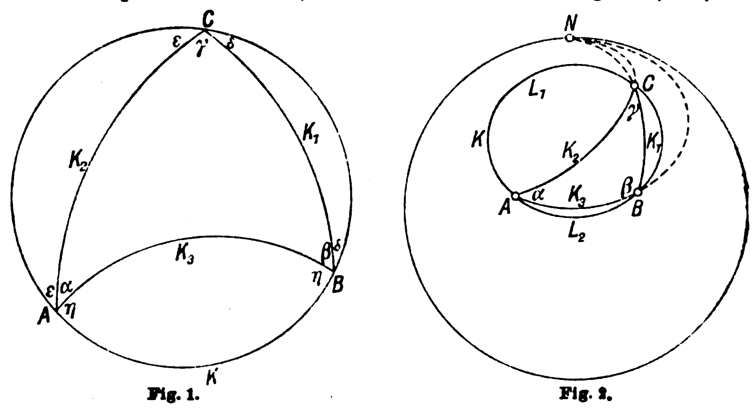


Fig. 1. Fig. 2.

3. Nun sei K ein Kreis auf der Kugel, der nicht durch N geht. Als Kreisinneres gelte der Teil der Kugel, der N nicht enthält. A, B, C seien beliebige Punkte auf K und K_1, K_2, K_3 die Kreise durch B und C, C und A, A und B, die zugleich durch N laufen. Das Kreisdreieck ABC geht bei der Abbildung 2 nach 1. in ein gewöhnliches ebenes Dreieck $A'B'C'$ über. Dabei gilt

$$\alpha' = \alpha, \quad \beta' = \beta, \quad \gamma' = \gamma.$$

Hält man nun AB fest und läßt C auf dem einen Bogen AB von K, der L_1 heißen möge, wandern, so durchläuft C' eine Kurve L_1'. Dabei gilt nach 2.

$$\alpha' + \beta' - \gamma' = \alpha + \beta - \gamma = \text{konst.}$$

Für die ebenen, geradlinigen Dreiecke $A'B'C'$ ist aber außerdem $\alpha' + \beta' + \gamma' = \pi$. Also bleibt γ' konstant, d. h. L_1' ist ein Kreisbogen. Ebenso entspricht auch dem zweiten Bogen L_2 von K zwischen A und B ein Kreisbogen L_2', und L_1' und L_2' ergänzen sich zu einem Kreis K' (A und B waren ja ursprünglich beliebig).

Daß umgekehrt allen Kreisen und Geraden der Ebene Kreise auf der Kugel entsprechen, folgt leicht aus der Tatsache, daß ein Kreis durch drei seiner Punkte eindeutig bestimmt ist.

Analoge Betrachtungen lassen sich auch bei anderen Abbildungen durchführen. Es sei $\mathfrak{S}$ irgendein System von Kreisen in der Ebene oder auf der Kugel der-

art, daß durch zwei beliebige Punkte der Ebene (Kugel) sich immer wenigstens ein Kreis aus 𝔖 legen läßt. Wenn nun bei einer Abbildung der Ebene (Kugel) auf eine Ebene oder auf eine Kugel ein derartiges System winkeltreu (allenfalls mit Umlegung der Winkel) wieder auf ein Kreissystem abgebildet wird, so kann man ähnlich wie oben zeigen, daß dann alle Kreise in Kreise übergehen müssen; die Geraden sind dabei unter den Kreisen einbegriffen. (Die Betrachtungen unter 2. lassen sich nämlich verallgemeinern und umkehren.) Z. B. gehen bei der Abbildung durch reziproke Radien alle den Einheitskreis senkrecht schneidenden Kreise in sich selbst über. Daraus folgt dann sofort, daß alle Kreise in Kreise oder Geraden übergehen müssen

Haigerloch, z. Z. i. Göttingen. H. Späth.

Aufgaben-Repertorium.

Redigiert von Studienrat M. Brettar in Viersen (Burgstr. 2c).

Alle das Aufgaben-Repertorium betreffenden Zusendungen und Anfragen sind an die Adresse dieses Herrn zu richten.)

A. Auflösungen.

882. Aus einem Halbkreis (r) ist ein konzentrischer (ϱ) herausgeschnitten. Man untersuche die Lage des Schwerpunktes der Restfigur für verschiedene Werte von ϱ, sowie die Lage des Schwerpunktes des bei der Drehung um den senkrechten Radius entstehenden Körpers. (1925, Heft 3, Fiebig-Charlottenburg.)

Lösung. Sind S_r, S_ϱ und S bzw. die Schwerpunkte von (r), (ϱ) und der Restfigur, so gilt, da sie auf der durch den Mittelpunkt M gehenden Symmetrielinie liegen: $\overline{OS_r} = \frac{4r}{3\pi}$, $\overline{OS_\varrho} = \frac{4\varrho}{3\pi}$. Aus $\frac{\pi}{2}(r^2-\varrho^2)\cdot\overline{OS} = \frac{\pi}{2}r^2\cdot\overline{OS_r} - \frac{\pi}{2}\cdot\varrho^2\cdot\overline{OS_\varrho} = \frac{2}{3}(r^3-\varrho^3)$ folgt $\overline{OS} = \frac{4}{3\pi}\cdot\frac{r^2+r\varrho+\varrho^2}{r+\varrho}$. $\varrho = 0$ ergibt $\overline{OS} = \frac{4r}{3\pi}$ (Halbkreisfläche); $\varrho = r$ liefert $\overline{OS} = \frac{2r}{\pi}$ (Halbkreisbogen). — Bei Drehung um die Symmetrielinie findet man für die Lage des Schwerpunkts S' den Wert $OS' = \frac{3}{8}\cdot\frac{r^3+r^2\varrho+r\varrho^2+\varrho^3}{r^2+r\varrho+\varrho^2}$; $\varrho = 0$ führt auf $\overline{OS'} = \frac{3r}{8}$ (Halbkugel als Körper), $\varrho = r$ auf $\overline{OS'} = \frac{r}{2}$ (Halbkugel als Fläche). — Man vgl. auch Aufg. 644 in Bd. 51 und Aufg. 679 in Bd. 19.

Conrad. Dies. Hoffmann. Jansen. Kasper. Lindemann. Lohnes. Mahrenholz. Mertens. Münst. Nitsche. Sohn. Stiegler. Stucke.

883. Die Summe der sechszifferigen Zahlen $abcdef + fedcba$ ist stets gleich der Summe der Zahlen $aedcbf + fbcdea$, d. h. gleich der Summe der Zahlen, die man aus den ursprünglichen erhält, wenn man die gleichweit von den Enden abstehenden Ziffern miteinander vertauscht. — Gesucht sind Zahlen, bei denen die Bedingung $a + f = 10$, $b + e = 11$, $c + d = 12$ erfüllt ist, so daß sich die Summe 1123320 ergibt. (1925, Heft 3, Lohnes-Offenbach.)

Lösung. Die Summe des ersten Zahlenpaares ist:

$$100001a + 10010b + 1100c + 1100d + 10010e + 100001f,$$

die des zweiten

$$100001a + 10010e + 1100d + 1100c + 10010b + 100001f.$$

Die Identität ist somit erwiesen. Zahlen mit der verlangten Eigenschaft sind leicht zu finden. — Wie viel solcher Zahlen gibt es? Wie heißt die größte und die kleinste? — Wie lautet die Verallgemeinerung der Aufgabe? — Man vgl. Aufg. 1190, Bd. 24.

CONRAD. DIEZ. HOFFMANN. JANZEN. KASPER. LINDEMANN. LOHNES MÜNST. RUFF. STIEGLER. STUCKE.

884. Man verbinde einen Punkt P der Ellipse mit den Hauptscheiteln A_1 und A_2 und bringe PA_1 und PA_2 mit den Scheiteltangenten in A_2 und A_1 zum Schnitt. Die Verbindungsgerade dieser Schnittpunkte geht durch den Schnittpunkt der Ellipsentangente des Punktes P mit der Hauptachse. (Analytischer und synthetischer Beweis.) (1925, Heft 4, Gaedecke-Wilmersdorf.)

Lösung. a) analytisch: Die Gleichungen von PA_1 und PA_2 sind $\frac{x-a}{x_1-a}=\frac{y}{y_1}$ und $\frac{x+a}{x_1+a}=\frac{y}{y_1}$. Für die Schnittpunkte B_1 und B_2 mit den Scheiteltangenten ergeben sich die Ordinaten $+\frac{2ay_1}{x_1+a}$ und $-\frac{2ay_1}{x_1-a}$. Die Gleichung von B_1B_2 ist nun leicht zu finden. Als Abszisse des Schnittpunktes von B_1B_2 und x-Achse ergibt sich $\frac{a^2}{x_1}$, d. h. derselbe Wert wie für den Schnitt von Tangente und x-Achse.

b) synthetisch: Ist Q der Fußpunkt der Ordinate von P, S der Schnittpunkt der Hauptachse der Ellipse mit B_1B_2, so erkennt man leicht, daß SA_1QA_2 eine harmonische Punktreihe ist (Vierseit $A_1B_1B_2A_2$). Der Pol von PQ bezüglich der Ellipse liegt auf A_1A_2 und bildet mit A_2QA_1 ebenfalls eine harmonische Punktreihe. Demnach muß er mit S identisch sein.

BÜCKING. CLAUSS. CONRAD. DIEZ. FIEBIG. GÖTZE. HOFFMANN. JANZEN. JONAS. KAPPHAN. KASPER. KLOBASA. LINDEMANN. LOHNES. MAHRENHOLZ. MERTENS. MÜNST. NITSCHE. RALL. SCHUMACHER. SOHN. STIEGLER. STUCKE. WITTRIEN.

885. Ist P ein Punkt des Umkreises eines Dreiecks ABC, so ist $\overline{PA}^2\sin 2\alpha+\overline{PB}^2\sin 2\beta+\overline{PC}^2\sin 2\gamma=4\triangle$. (1925, Heft 4, Hörting-Zeitz.)

Lösung. Es ist 1. $\overline{PB}\cdot\overline{PC}\cdot\sin\alpha+\overline{PA}\cdot\overline{PC}\cdot\sin\beta-\overline{PA}\cdot\overline{PB}\sin\gamma=2\triangle$. Nach Ptolemäus ist 2. $\overline{PA}\sin\alpha+\overline{PB}\cdot\sin\beta=\overline{PC}\sin\gamma$. Durch Quadrieren erhält man:

$$2\overline{PA}\cdot\overline{PB}\sin\alpha\sin\beta=\overline{PC}^2\sin^2\gamma-\overline{PA}^2\sin^2\alpha-\overline{PB}^2\sin^2\beta,$$

$$2\overline{PB}\cdot\overline{PC}\sin\beta\sin\gamma=\overline{PB}^2\sin^2\beta+\overline{PC}^2\sin^2\gamma-\overline{PA}^2\sin^2\alpha,$$

$$2\overline{PC}\cdot\overline{PA}\sin\gamma\sin\alpha=\overline{PC}^2\sin^2\gamma+\overline{PA}^2\sin^2\alpha-\overline{PB}^2\sin^2\beta.$$

Durch Einsetzen in 1. erhält man — unter Benutzung der Beziehung $\sin^2\alpha+\sin^2\beta-\sin^2\gamma=2\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\cos\gamma$ — die gesuchte Identität.

BÜCKING. CONRAD. DIEZ. GÖTZE. LINDEMANN. MAHRENHOLZ. MERTENS. MÜNST. NITSCHE. RALL. RUFF. STUCKE.

Man vgl.: Jahnke, Vorlesungen über die Vektorenrechnung. Leipzig, 1905, S. 50. — Wolstenholme, Mathematical problems, 2. ed. London. Aufg. 576 bis 580. — Journal de mathématiques élémentaires, 31, 1906/7, S. 157, Aufg. 6390. — Diese Zeitschr. Aufg. 230, Bd. 40, S. 523. MAHRENHOLZ.

B. Neue Aufgaben.

941. Auf horizontaler Unterlage soll ein Gegenstand vom Gewicht P mit möglichst geringem Kraftaufwand fortgezogen werden. Unter welchem Winkel muß die Kraft angreifen, wenn der Reibungskoeffizient R ist? KASPER-Dresden.

942. Bei einer (zentralen) Kurve wird ein Punkt der Achse mit einem Kurvenpunkt verbunden und auf der Verbindungsgeraden das Mittellot errichtet. Welches ist der geometrische Ort der Schnittpunkte des Mittellotes und der Verbindungslinie des beweglichen Kurvenpunktes mit dem Mittelpunkt, wenn die erzeugende Kurve: 1. eine Parabel („Mittelpunkt" ist der unendlich ferne Punkt), 2. eine Ellipse, 3. eine Hyperbel, 4. eine Lemniskate ist?
CONRAD-Moers.

943. Man soll Paare ganzer Zahlen bilden, von denen jede die n^{te} Potenz der anderen teilt, n ganz und positiv vorausgesetzt. STENGEL-München.

944. Es sind diejenigen Werte von x zwischen 0^0 und 360^0 zu bestimmen, die der Gleichung $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x = 4 + \operatorname{ctg} x$ genügen. HOFFMANN-Ravensburg.

Briefkasten zum Aufgaben-Repertorium.

An Lösungen gingen ein bis zum 3. Februar: Brehm-Tilsit 914. 923. 925. 928. Bücking-Darmstadt 931. 933. 934. Diez-Heilbronn 906. 920. 921. 923. 925—928. Fried-Zweibrücken 920. 921. 923. 927. 928. Friedrich-Sagan 925. 928. 931. 933. Herbst-Bochum 927. Hoffmanns-Ravensburg 926—928. Janzen-Treptow 913. 914. 923—925. 927—929. 931. Kasper-Dresden 923. 924. Klobasa-Troppau 921. 929. 931. 934. Mahrenholz-Kottbus 925 929—931. 933. 934. Neumann-München 916. 919. Nikol-München 931. Rall-Mergentheim 910. 912. 924—928. 933. Roth-Jüterbog 933. Scharffetter-Memel 924. 927. 932. Scheffler-Zerbst 929. Schick-Riedlingen 925. 926. 928 Schmidt-Schweidnitz 925. Sohn-Würzburg 907. 914. 916. 923. 924. 926—928. Stiegler-Madrid 925. 928.

Schülerlösungen gingen ein von Häusler-Tilsit 903. 928. Marchand-Tilsit 903. 923.

Lösungen der Aufgabe im Briefkasten (Heft 10, 1926) sandten ein: Conrad-Moers, Diez-Heilbronn, Janzen-Treptow, Klobasa-Troppau, „Mathematicus"-Chemnitz, Michnik-Beuthen, Rall-Mergentheim, Schierholz-Lemgo.

Neue Aufgaben sandten ein: a) mit Lösung: Conrad (1), Epstein-Frankfurt a. M. (1), Kasper-Dresden (1), Klobasa-Troppau (1), Michnik-Beuthen (11), Neumann-München (5), Sohn-Würzburg (3); b) ohne Lösung: Roth-Jüterbog (2), Scharff-Kaiserslauten (1), Sohn-Würzburg (1).

Ich bitte die Manuskripte nur *einseitig* zu beschreiben.

Berichte.

Aus der Forschung.

Entfernungen und Entfernungsmessungen im Weltraum. (Mit 2 Figuren im Text.) Will man die Entfernung eines Himmelskörpers von der Erde bestimmen, so ist prinzipiell das einzig mögliche Verfahren die trigonometrische Messung. Das heißt also, man muß eine Basis linear ausmessen und muß in dem Dreieck, das von dieser Basis und dem Stern als Spitze gebildet wird, noch zwei Winkel bestimmen. Handelt es sich um einen der näheren Körper unseres Planetensystems, so dient als Grundlinie eine irdische Entfernung. Im Jahre 1671 wurde auf diese Weise durch gleichzeitige Beobachtungen in Paris und Cayenne die Entfernung des Mars von der Erde bestimmt. Aber schon beim Jupiter und den

anderen äußeren Planeten würde eine irdische Entfernung als Grundlinie kaum noch in Frage kommen. Da aber die Entfernungen der Planeten von der Sonne mit ihren Umlaufszeiten durch das 3. Keplersche Gesetz verbunden sind, kann man sie leicht indirekt bestimmen.

Für den nächsten Fixstern schrumpfen die Erddimensionen in einen Punkt zusammen. Als Basis für Entfernungsmessungen muß dann der Durchmesser der Erdbahn dienen. Beobachtet man nämlich den Ort eines Fixsternes am Himmel etwa im Frühjahr und im Herbst, so wird sich der Sternort um den Winkel geändert haben, unter dem die Erdbahn von dem Stern aus erscheint. Die Hälfte dieses Winkels oder der Winkel, unter dem der Radius der Erdbahn, die wir hier ohne Bedenken kreisförmig annehmen dürfen, von dem Stern aus erscheint, wird die Parallaxe (Verschiebung, von dem griechischen Wort *παραλλάττειν*) des Sterns genannt.

Diese theoretisch sehr einfache Methode in die Praxis umzusetzen ist freilich eine der schwierigsten Aufgaben der Astronomie. Wenn man bedenkt, daß selbst der nächste Fixstern α Centauri nur eine Parallaxe 0.75″ zeigt, und daß nur vier von den Sternen 1. Größe, nämlich α Centauri, Sirius, Prokyon und α Aquilae, Parallaxen haben, die größer als 0.2″ sind, so sieht man ein, daß es sich hier um außerordentlich mühevolle Messungen handelt. Es ist erstaunlich, welchen Grad von Feinheit diese Messungen heute erreicht haben. Z. B. haben Schlesinger auf der Allegheny-Sternwarte in Pittsburgh und van Maanen auf der Mt.-Wilson-Sternwarte Parallaxen gemessen, deren mittlerer Fehler nur etwa 0.005″ beträgt. Eine Parallaxe von 0.010″ wird also noch mit einem Fehler von 50% gemessen, und für Sterne mit noch größeren Entfernungen werden die Messungen illusorisch. Nun stellen aber die Sterne mit Parallaxen über 0.010″ nur einen verschwindenden Bruchteil aller sichtbaren Sterne dar, und es entsteht die Aufgabe, auch für diese scheinbar aussichtslosen Fälle noch annehmbare Entfernungswerte zu bestimmen, um damit die Grundlagen zu schaffen für unsere Kenntnis vom Bau des Weltalls.

Es ist zweckmäßig, an dieser Stelle ein paar Worte über die benutzten Maße zu sagen. Für die Entfernung, die einer Parallaxe von 1″ entspricht, hat sich die etwas barbarische, aber ganz zweckmäßige Bezeichnung Parsec eingebürgert, so daß also z. B. ein Stern, dessen Parallaxe 0.25″ beträgt, 4 Parsec von uns entfernt ist. Nach der Definition ist 1 Parsec gleich 206 265 Erdbahnradien oder rund 30 Billionen km. Das Licht braucht $3^1/_4$ Jahre, um diese Strecke zurückzulegen. Man sagt daher auch, 1 Parsec sei gleich $3^1/_4$ Lichtjahren, und der Stern α Centauri, der bereits erwähnt wurde, ist $^4/_3$ Parsec oder $4^1/_3$ Lichtjahre von uns entfernt. Aus der Genauigkeit, die oben für eine gute moderne Parallaxe angegeben wurde, nämlich $\pm$ 0.005″, folgt, daß wir mit Hilfe der trigonometrischen Parallaxen höchstens 600 Lichtjahre in den Raum vorzudringen vermögen.

Schon viel früher, als Bessel im Jahre 1839 die erste Parallaxenmessung an dem Stern 61 Cygni durchführen konnte, waren den Astronomen Eigenbewegungen zahlreicher Fixsterne aufgefallen. Beim Vergleich von alten und neuen Sternkatalogen hatte man erkannt, daß es den Begriff Fixstern im ursprünglichen Sinne überhaupt nicht gibt. So ändert z. B. der helle Stern Arktur im Sternbild des Fuhrmanns seinen Ort jedes Jahr um 2.3″, hat also seit der Zeit, in der Hipparch seinen Sternkatalog beobachtete, bereits mehr

als 2 Vollmondbreiten am Himmel zurückgelegt. Zu diesen Eigenbewegungen der Fixsterne senkrecht zur Gesichtslinie sind seit dem Ende des vorigen Jahrhunderts die Bewegungen in der Gesichtslinie hinzugekommen, die das Spektroskop uns gezeigt hat. Nach dem Dopplerschen Prinzip werden ja die Spektrallinien eines Sternes, der sich auf uns zu bewegt, um einen Betrag, der in der einfachsten Weise von der Geschwindigkeit des Sterns abhängt, nach dem blauen Ende des Spektrums verschoben. Bei Sternen, die sich von uns entfernen, erfolgt die Verschiebung nach der entgegengesetzten Seite.

Wenn nun die Eigenbewegung eine allgemeine Eigenschaft der Sterne ist, so ist selbstverständlich auch für die Sonne eine solche Eigenbewegung anzunehmen. Man kann sogar einfach umgekehrt in roher Näherung annehmen, daß die beobachteten Eigenbewegungen nur scheinbar sind und hervorgerufen werden durch eine Bewegung der Sonne gegen das ruhende System der Fixsterne. Schon Herschel versuchte aus den wenigen damals bekannten Eigenbewegungen auf diese Weise die Bewegung der Sonne unter den Sternen zu bestimmen. Wären die Fixsterne tatsächlich in Ruhe gegeneinander, und bewegte sich nur die Sonne durch ihr System hindurch, so könnte man zunächst die Bewegung der Sonne der Größe und Richtung nach festlegen und könnte dann die Fixsternentfernungen trigonometrisch messen, da ja die Sonne auf ihrer Fahrt durch den Raum uns eine ideale Basis für die Entfernungsmessungen bieten würde. In Wahrheit liegen die Dinge wesentlich verwickelter. Die Sterne bewegen sich untereinander und die Sonne gegen die Sterne. Wenn man die Annahme macht, daß die Sternbewegungen sich im Mittel aufheben, so kann man die Sonnenbewegung der Größe und Richtung nach festlegen. Schon Herschels primitive Untersuchungen führten für die Richtung der Sonnenbewegung auf einen brauchbaren Wert. Danach bewegt sich die Sonne auf einen Punkt im Sternbild der Leier zu. Dies Resultat läßt sich heute ableiten sowohl aus den Eigenbewegungen im ursprünglichen Sinne als auch aus den Bewegungen in der Gesichtslinie. Die Bewegungen in der Gesichtslinie liefern aber auch den Betrag der Sonnenbewegung direkt in km/sec. Campbell fand auf diese Weise den Wert von 20 km/sec für die Geschwindigkeit der Sonne.

Die Eigenbewegungen der Sterne setzen sich in Wirklichkeit aus zwei Teilen zusammen, nämlich erstens aus einer scheinbaren Bewegung infolge der Sonnenbewegung. Man bezeichnet diesen Teil auch als die parallaktische Bewegung des Sterns. Den zweiten Teil bildet die dem Stern eigentümliche Bewegung, die man in der Fachsprache auch Pekuliarbewegung nennt. Damit erscheint das Problem, aus den Eigenbewegungen der Sterne auf ihre Entfernung zu schließen, unlösbar. Für den einzelnen Stern ist das auch tatsächlich der Fall. Man kann sich aber die Aufgabe stellen, die mittlere Entfernung für ganze Klassen von Sternen zu berechnen, etwa für alle Sterne einer gewissen Helligkeit. Man bezeichnet die Parallaxen, die man auf diese Weise gewinnt, als säkulare Parallaxen. Auf solche statistischen Mittelwerte — denn das sind letzten Endes diese säkularen Parallaxen — hat vor allem der holländische Astronom Kapteyn seine Untersuchungen über den Bau des Universums gegründet. Kapteyn drang bei diesen Untersuchungen bis zu Entfernungen von 30000 Lichtjahren vor und konnte bis zu dieser Entfernung in großen Zügen die Gestalt unseres Sternsystems und die Dichteverteilung darin darstellen. Die Gestalt des Sternsystems ist die eines stark abgeplatteten Rotationsellipsoides. Die Länge der

halben großen Achse der erzeugenden Ellipse beträgt 30000 Lichtjahre, die Länge der halben kleinen Achse 4000 Lichtjahre. Die Sonne befindet sich nahe der Mitte des Systems. Bezeichnet man die Sterndichte in der Umgebung unserer Sonne mit 1, so beträgt sie an der Grenze des Sternsystems nur noch 0.01. Man darf aber nicht vergessen, daß Kapteyn unser Sternsystem sehr stark schematisieren mußte, um überhaupt einmal das Problem irgendwie angreifen zu können. So wird sich beispielsweise zeigen, daß in Gegenden, in denen die Dichte auf ein Hundertstel ihres Wertes in der Umgebung der Sonne gesunken sein soll, plötzlich so riesige Massenansammlungen wie die kugelförmigen Sternhaufen auftreten. Ja, es genügt eigentlich ein Blick auf die Milchstraße in einer klaren Nacht, um zu zeigen, daß mit einer einfachen Rotationssymmetrie im Bau des Sternsystems nicht auszukommen ist.

Die moderne Astronomie hat tatsächlich Mittel und Wege gefunden, von den trigonometrisch abgeleiteten Entfernungen in gewissem Sinne sich frei zu machen, indem sie andere Eigenschaften der Sterne zu Hilfe nimmt, die auf den ersten Blick nichts mit der Entfernung zu tun haben. Die beiden wichtigsten Eigenschaften — bei allen Sternen — sind Helligkeit und Spektraltypus. Dann aber gibt es noch viele Sterne mit ganz besonderen Eigenschaften; vor allem kommen für uns die Sterne mit veränderlicher Helligkeit in Frage. Ein Beispiel soll zunächst die Möglichkeit andeuten, solche physikalischen Eigenschaften der Sterne zur Entfernungsmessung auszunutzen. Wir kennen die Entfernung des Sirius. Der Sirius ist ein Stern von rein weißer Farbe. Wir nehmen nun an, daß alle Sterne von rein weißer Farbe die gleiche Leuchtkraft besitzen. Finden wir dann einen andern weißen Stern am Himmel, dessen Leuchtkraft nur $^1/_9$ der Leuchtkraft des Sirius ist, so können wir in der einfachsten Weise ausrechnen, daß dieser Stern drei mal so weit wie Sirius von uns entfernt ist. In der Tat würde eine so einfache Messung und Rechnung schon einen guten Näherungswert für die Entfernung eines weißen Sternes liefern.

Wir müssen aber jetzt etwas näher auf diese Dinge eingehen und zunächst den Begriff der absoluten Größe eines Sterns einführen und erklären. Schon im Sternkatalog des Ptolemäus sind die Sterne, also die mit dem bloßen Auge sichtbaren Sterne, in 6 Größenklassen eingeteilt, und zwar so, daß die hellsten Sterne die Größe 1, die schwächsten die Größe 6 erhalten. Dazwischen sind rein gefühlsmäßig die Sterne als 2. Größe usw. bezeichnet. Messungen mit einem Photometer zeigen nun, daß zwei Sterne sich dann um eine Größenklasse (1^M) unterscheiden, wenn das Verhältnis ihrer Leuchtkräfte 2.5 beträgt. Ein Stern 5. Größe sendet uns also 2.5 mal soviel Licht zu wie ein Stern 6. Größe. Man sieht, daß die Intensitäten in geometrischer Reihe, unsere Sinneseindrücke in arithmetischer Reihe wachsen. Um auch für teleskopische Sterne Größenangaben zu erhalten, ist einfach definiert, daß die Zahl 2.5 ganz allgemein das Verhältnis der Leuchtkräfte zweier Sterne sein soll, die sich um 1^M unterscheiden. Auf diese Weise erhalten schwächere Sterne die Bezeichnung 7^M, 8^M und so fort bis zu den schwächsten. Ohne weiteres verständlich sind Bezeichnungen wie $9{,}5^M$ oder $10{,}26^M$, und es muß noch darauf hingewiesen werden, daß man folgerichtig die Reihe der Sterngrößen auch nach oben fortsetzen kann und dann die Größen 0^M, -1^M, -2^M usw. bekommt.

Die Größe eines Sternes sagt zunächst über seine Entfernung von uns gar nichts aus. Immerhin wird man annehmen dürfen, daß im allgemeinen die

schwächeren Sterne weiter von uns entfernt sind als die helleren. Ganz entsprechend nahmen wir an, daß die Sterne mit großer Eigenbewegung im Durchschnitt uns näher stehen als die mit kleinen Eigenbewegungen, und man macht heute in der Stellarstatistik Ansätze, in denen die Eigenbewegungen *und* die scheinbaren Größen der Sterne vorkommen. Von den Sternen, deren Entfernungen man kennt, kann man die Größen miteinander alle unmittelbar vergleichen, wenn man sie alle auf eine Entfernung von uns umrechnet. Als diese Einheitsentfernung dient die Entfernung von 10 Parsec oder 33 Lichtjahren. Die so umgerechneten Größen bezeichnet man als absolute Größen, die Helligkeiten als absolute Helligkeiten. So hat z. B. unsere Sonne die absolute Größe $+ 5^M$.

Wenden wir uns jetzt noch kurz der spektralen Einteilung der Sterne zu! Der italienische Astronom Secchi erkannte als erster, daß man die Sternspektren bis auf ganz vereinzelte Ausnahmen in drei große Klassen einteilen kann. Die erste Klasse bilden die weißen Sterne mit einem Spektrum, in dem die Wasserstofflinien die Hauptrolle spielen, der zweite Typus kann etwa als Sonnentypus, mit zahlreichen Metallinien, bezeichnet werden, und beim dritten Typus treten Banden in den Spektren auf, die auf niedrige Temperatur hindeuten. Diesem dritten Typus gehören die rötlichen und tief roten Sterne an. Zwischen den drei Typen gibt es Übergänge, und es ist zu verstehen, daß man bei wachsender Kenntnis der Spektren allmählich Zwischenklassen einschaltete. In der heute gebräuchlichen Bezeichnungsweise läßt sich die Hauptmasse der Sterne in die folgenden 6 Klassen einteilen.

Klasse	Typische Linien	Temperatur
B	Heliumlinien	12000°
A	Wasserstofflinien	9000°
F	Kalziumlinien	6500°
G	Kalzium- und Metallinien	5500°
K	Metallinien und einzelne Banden	4000°
M	Starke Banden	3000°

Von der ursprünglichen Annahme, daß die Stärke der Linien ein Anzeichen für ein besonders starkes Auftreten des betreffenden Elementes ist, daß also z. B. ein B-Stern zum größten Teil aus Helium besteht, ist man heute gänzlich abgekommen. Man hat gelernt, daß die Skala der Sternspektren im wesentlichen eine Temperaturskala ist. Deswegen sind in der kleinen Tabelle auch die Temperaturen für die einzelnen Klassen in rohen Durchschnittswerten angegeben.

Im Jahre 1914 hat der amerikanische Astronom Russell für alle Sterne, für die damals zugleich absolute Helligkeit und Spektrum bekannt waren, in einer graphischen Darstellung den Zusammenhang zwischen diesen beiden Größen gegeben (Fig. 1). In unserer Figur sind in horizontaler Richtung die Spektraltypen, in vertikaler Richtung die absoluten Größen aufgetragen. Die Punkte stellen gut bestimmte Einzelwerte dar, die Kreise sind Mittelwerte von durchschnittlich 20 Einzelwerten, denen weniger gute Parallaxen zugrunde liegen. Die Stellung unserer Sonne im Diagramm ist durch ein Kreuz bezeichnet.

Dieses „Russel-Diagramm" hat auf die Entwicklung der Astronomie in den letzten 12 Jahren einen gewaltigen Einfluß ausgeübt. Im Rahmen dieses kurzen Aufsatzes können wir nur eine interessante Tatsache weiter verfolgen. Wir sehen unmittelbar, daß fast alle B-Sterne absolute Helligkeiten haben zwischen 0^M und

— 3^M^, also im Mittel 6^M^ bis 7^M^ heller sind als die Sonne. Daraus folgt, daß man in prinzipiell sehr einfacher Weise die Verteilung der B-Sterne untersuchen kann, indem man annimmt, daß alle B-Sterne gleich hell sind, nämlich ungefähr die absolute Größe — 1^M^ haben. Diese Tatsache hat schon vor Russell der schwedische Astronom Charlier bei seinen stellarstatistischen Untersuchungen benutzt. Auch für die A-Sterne läßt sich eine ähnliche Untersuchung durchführen, wenn auch nicht ganz so sicher wie bei den B-Sternen.

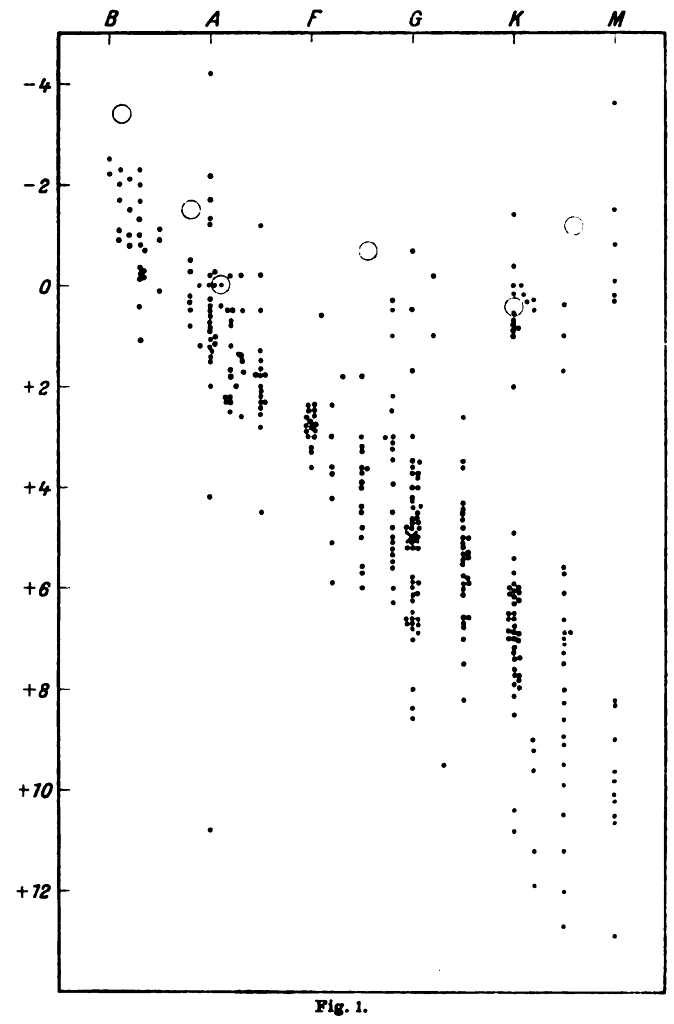


Fig. 1.

Etwa bei der Klasse F setzt, wie man im Diagramm sieht, eine Trennung der Sterne in zwei Gruppen ein, die man sehr treffend als Riesen und Zwerge gekennzeichnet hat. Am weitesten trennen sich die Gruppen bei den M-Sternen. Ihr gehören Sterne an, die 6 Größenklassen heller sind als die Sonne, aber auch solche, die 5 Größenklassen schwächer sind. Diese 11 Größenklassen stellen ein Verhältnis der Leuchtkräfte von 25000 : 1 dar. Hier versagt die Methode, aus den absoluten Größen die Entfernung zu berechnen, wenn nicht die Entscheidung gelingt, ob ein Stern zur Klasse der Riesen oder der Zwerge gehört. Dem deutschen Astronomen Kohlschütter ist es gelungen, diese Trennung für die Klassen G, K und M an den Unterschieden in der Schärfe und dem Aussehen gewisser Spektrallinien durchzuführen. Während z. B. bei M-Sternen Spektren vorkommen, die fast genau übereinstimmen in bezug auf die Lage der Linien, können die Wasserstofflinien bei dem einen relativ stark (Riesenstern), bei dem andern relativ schwach sein (Zwergstern). In den beiden Ästen selbst ist die Streuung der Helligkeiten ziemlich gering, und wenn man von *einem* Riesen

oder *einem* Zwerg die absolute Helligkeit kennt, so kann man für alle andern Sterne des Typus aus dem Unterschied der absoluten und der scheinbaren Größe die Entfernung ausrechnen. Auf der Mt. Wilson-Sternwarte sind nach dieser Methode, die von Adams und Joy noch verfeinert worden ist, bereits mehrere Tausende von „spektroskopischen" Parallaxen gemessen worden. Wir können also jetzt mit gewissen Einschränkungen die durchschnittlichen Parallaxen von Kapteyn durch individuelle Werte ersetzen, aber wir können nicht etwa über das Kapteynsche System hinausdringen, weil die Sterne dann viel zu schwach sind, als daß man die Spektra näher untersuchen könnte.

In dem bisher besprochenen Kapteynschen Sternsystem gibt es zahlreiche Sterne, deren Helligkeit regelmäßigen oder unregelmäßigen Schwankungen unterliegt. Eine besonders wichtige Klasse dieser Veränderlichen wird nach ihrem

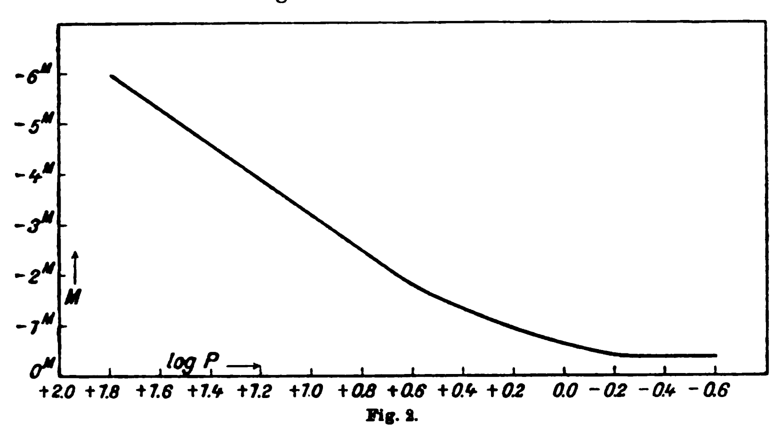


Fig. 2.

Hauptvertreter δ Cephei-Sterne oder Cepheiden genannt. Diese Sterne sind dadurch gekennzeichnet, daß die Perioden ihrer Helligkeitsschwankungen zwischen etwa 60 Tagen und wenigen Stunden liegen. Der Aufstieg zum Lichtmaximum erfolgt meist viel schneller als der Abstieg zum Minimum. Bei diesen Sternen fand man ein sehr merkwürdiges Gesetz. Rechnet man für die δ Cephei-Sterne, deren Entfernung man kennt, die absolute mittlere Helligkeit aus, d. h. also das Mittel der absoluten Helligkeiten im Maximum und im Minimum, und ordnet man diesen absoluten Helligkeiten die Perioden der Helligkeitsänderung zu, so bekommt man eine sehr einfache Beziehung, die in der Fig. 2 dargestellt ist, wo als Abszisse der Logarithmus der Periode, als Ordinate die absolute mittlere Helligkeit aufgetragen ist. Man sieht zunächst, je länger die Periode, desto größer die absolute Helligkeit; für die ganz kurzen Perioden unter einem Tag ist die absolute Helligkeit konstant. Ferner zeigt die Darstellung, daß die Cepheiden zu den hellsten Sternen überhaupt gehören. Die mit den längeren Perioden gehören zu den „Übergiganten", und selbst die kurzperiodischen sind mehr als 5^M heller als die Sonne.

Nun gibt es eine Klasse von Sternhaufen am Himmel, die nach ihrem Aufbau als kugelförmige bezeichnet werden und die in mehr als einer Beziehung merkwürdig sind. Schon die Tatsache, daß sie aus sehr schwachen Sternen bestehen, deutet auf ihre große Entfernung von uns hin, ebenso die ganz unsymmetrische

Verteilung auf eine Hälfte des Himmels, die sie in schroffen Gegensatz zu allen andern Klassen von Himmelskörpern setzt und andeutet, daß sie ein System bilden, in dem unser eigenes näheres Fixsternsystem nur eine ganz untergeordnete Rolle spielt. Ferner ist auffallend der Reichtum mancher dieser Sternhaufen an den eben erwähnten kurzperiodischen Veränderlichen, den die großen Fernrohre der Neuzeit enthüllt haben. Ein bekannter Sternhaufen in den Jagdhunden enthält etwa 900 Sterne zwischen der 14. und 16. Größe; die Anzahl der schwächeren Sterne ist einstweilen gar nicht abzuschätzen. Von diesen 900 Sternen sind mindestens 150 kurzperiodische Veränderliche, deren mittlere Helligkeit sehr eng um den Wert 15.5^{M} liegt. Macht man die fundamentale Annahme, ohne die überhaupt weitere Forschungen sinnlos würden, daß ein Veränderlicher auch in diesen fernen Räumen dieselben Eigenschaften hat wie in unserem engeren Sternsystem, so kann man jetzt aus der Fig. 2 zunächst die absolute Helligkeit der Veränderlichen ablesen und dann aus der Differenz zwischen der scheinbaren und der absoluten Helligkeit die Entfernung des Sternhaufens ausrechnen zu 40000 Lichtjahren.

Dies ist in kurzen Worten der Gedankengang, der den amerikanischen Astronomen Shapley bei seinem Vorstoß in die weitere Umgebung unserer Sonne geleitet hat. Freilich mußten hier viele Einzelheiten beiseite gelassen werden, so daß die gewaltigen Schwierigkeiten des Problems nicht genügend hervortreten. Es mag z. B. erwähnt werden, daß Shapley bei seinen Untersuchungen mehr als 1000000 Sternhelligkeiten auf photographischen Aufnahmen gemessen hat. Das Resultat ist eine Erweiterung der Welt von den Dimensionen, die Kapteyn gefunden hatte, auf etwa 220000 Lichtjahre. Das ist die Entfernung des weitesten Kugelsternhaufens, in dem Shapley Veränderliche gefunden hat. Unser nächster Nachbar unter diesen Haufen liegt in einer Entfernung von 23000 Lichtjahren, also noch innerhalb der Grenzen des Kapteynschen Systems.

Durch diese überraschenden Erfolge hat in der jüngsten Zeit Hubble auf der Mt. Wilson-Sternwarte versucht, die alte Frage nach der Entfernung der Spiralnebel zu lösen. Mit dem großen Spiegelfernrohr von 258 cm Öffnung machte er viele Aufnahmen vom Andromedanebel und einigen andern großen Spiralnebeln, und es gelang ihm, auch hier δ Cephei-Sterne zu finden, die die 18. Größe im Maximum erreichen. Aber es handelt sich hier nicht um Sterne mit den ganz kurzen Perioden, wie bei den Kugelsternhaufen, sondern um Veränderliche mit längerer Periode, die also eine bedeutend größere absolute Helligkeit haben. Sie liefern für den Andromedanebel eine Entfernung von 900000 Lichtjahren, einen Durchmesser von 50000 Lichtjahren, also vergleichbar mit dem Durchmesser unseres eigenen Systems (60000 Lichtjahre), wie Kapteyn ihn gefunden hat. Damit ist die Frage nach der Natur der Spiralnebel, ob sie nur kleine Systeme, etwa gar Planetensysteme in der Entwicklung, seien oder ferne Systeme, ähnlich unserem Milchstraßensystem, zugunsten der „Weltinseltheorie“ entschieden. Die andern von Hubble untersuchten Spiralnebel liefern ganz ähnliche Werte für Entfernung und Dimensionen.

Bergedorf b. Hamburg (Sternwarte). Joh. Larink.

Versammlungen und Kurse.

Tagung: Die Reformanstalten und Oberrealschulen. Veranstaltet vom Zentralinstitut für Erziehung und Unterricht; Frankfurt a. M., 4.—7. Okt. 1926. Die Tagung stellte ein bedeutungsvolles Glied in der Kette der Kämpfe dar, durch die den Reformanstalten und Oberrealschulen durch den Nachweis ihrer Bedeutung wieder ihre gebührende Stellung zurückerobert werden soll, die ihnen durch die Preuß. Denkschrift genommen worden ist.

Den einleitenden und für die ganze Tagung richtunggebenden Vortrag hielt Univ.-Prof. Dr. Spranger, Berlin, über das Thema „Bildungsziel und Schulorganisation". Er versuchte darin aus dem Gedanken des „neudeutschen Klassizismus" heraus ein neues, allgemeines Bildungsideal herauszuarbeiten. Als Folgerung ergab sich, daß eigentlich nur zwei Schultypen aufgestellt werden könnten, von denen die eine den antiken, die andere den neudeutschen Klassizismus in den Mittelpunkt stellt. Der Forderung, Neigungen und Begabungen des Schülers zum Richtpunkt von Schulreformen zu machen, sei mit Vorsicht nachzugeben, da sie zur Auflösung der Schule in Einzelkurse führen müsse.

Von philologischer Seite wurde vor allem die Stellung des Lateinischen und die Frage erörtert, ob Englisch oder Französisch als erste Fremdsprache zu wählen ist.

Am Mittwoch, den 6. Oktober, kamen die mathematisch-naturwissenschaftlichen Fächer zum Wort.

Oberstudiendirektor Dr. Behrend sprach über den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht auf der Unter- und Mittelstufe der Reformanstalten und Oberrealschulen. Das Reformsystem erscheint ihm als eine Vorstufe für eine zukünftige, einheitliche deutsche höhere Schule. Bei konsequenter Entwicklung des Reformgedankens kommt man zu einem Aufbau, der unter strenger Anpassung an die jeweilige Entwicklungsstufe der heranwachsenden Jugend auf einen gemeinsamen Unterbau eine Oberstufe mit weitgehender Differenzierung und Bewegungsfreiheit setzt. Dieser Gedanke ist der preußischen Reform mit ihren starren Typen diametral entgegengesetzt, in der neuen sächsischen Reform dagegen weitgehend verwirklicht.

Suchen wir nach einem objektiven Bildungsziel, so ist zunächst der Gedanke der enzyklopädischen Bildung als erledigt anzusehen. Mit Spranger können wir ausgehen von der „grundlegenden Bildung" und als Ziel die Entwicklung von der Individualität zur Persönlichkeit durch die Sache setzen. Klar ausgesprochen finden wir diesen Weg in der „spezifischen Allgemeinbildung" im Sinne von Felix Klein. Dabei erscheint bei Spranger der Berufsgedanke, der der zentrale ethische Gedanke der neueren Zeit ist, nicht genügend betont; in der sächsischen Denkschrift ist er in seiner vollen Bedeutung erfaßt.

Unter diesem Gesichtswinkel treten Mathematik und Naturwissenschaften als gleichberechtigte Bildungsfächer neben die sogenannten kulturkundlichen Fächer. Die verschiedenen Schulen brauchen sich nur durch die verschiedenen Sprachen zu unterscheiden; sonst können sie völlig einheitlich sein. Darin liegt ein Fortschritt, den die preußischen Richtlinien bringen: Deutsch, Religion, Geschichte und Erdkunde sind einheitlich für alle Typen bis U II; für Mathematik gilt dasselbe bis O III. Deshalb ist in Mathematik auch für alle Schulen bis U II ein einheitliches Bildungsziel zu fordern.

Innerlich erscheint die Forderung allgemeiner mathematischer und naturwissenschaftlicher Bildung darin begründet, daß es eine grundsätzliche Eigenart des menschlichen Geistes ist, die Gesetzmäßigkeiten der räumlichen Welt und der Natur zu begreifen. Deshalb ist auch für die „mittlere Reife" Verständnis der mathematischen Sprache als notwendig anzustreben, denn das Buch der Natur ist mit mathematischen Buchstaben geschrieben.

Weiter wäre nun zu behandeln die Frage des Stoffgebietes, der Interessen und der Antriebe der Kinder. Da ist zu erwähnen: Zählen, Messen, Orientieren, Ein- und Verkauf; weiter die Natureindrücke, die dauernd auf die Kinder einwirken, die Eindrücke durch die Technik; Fortsetzung der Zahlenreihe führt zum Urproblem der Menschheit, zur Unendlichkeit und Gesetzmäßigkeit. Die Interessenrichtung erkennen wir aus den Spielen, besonders den Berufsspielen der Kinder, die oft eng an die Technik angeknüpft sind. Die damit schon angedeutete Orientierung des Unterrichts nach der technischen Seite habe nichts mit utilitaristischen und materialistischen Motiven zu tun. Ist Technik nicht auch Erfüllung uralten Sehnens, den Stoff geistig zu bezwingen und zu formen?

Damit verlasse die Schule den Standpunkt der reinen Gelehrtenschule. Nicht nur der kontemplative, sondern vor allem der aktive Mensch sei zu erziehen.

Daraus ergebe sich weiterhin speziell für die Mathematik eine neue Einstellung, da sie ursprünglich das Reich der idealen Bestimmtheiten verwaltet, aber jetzt sich daneben das Reich der Anwendungen erobert habe. Von hier aus sei der Gedanke der Fusion von Planimetrie und Stereometrie innerlich zu verstehen: wirkliche Formen seien zu betrachten und darzustellen.

Es folgte die Behandlung einer Fülle von Einzelfragen im Anschluß an die preußischen Richtlinien. Für das Rechnen wurde dabei gestreift: Stetigkeitsbegriff, Gedanke der Gesetzmäßigkeit, der Vorbereitung der Algebra; Reihenentwicklungen, graphische Darstellungen, Tabellenrechnung. Betont wurde die Notwendigkeit, das Übungsmaterial dem täglichen Leben zu entnehmen.

In der Algebra fanden die Richtlinien die Zustimmung des Redners; in der Geometrie sei das Ziel mit der Stundenzahl nicht zu erreichen.

Für die Naturwissenschaften sei die Verlegung der Physik nach U III zu begrüßen. Freilich müsse man hier bei der Durchführung des Lehrplanes bedenken, daß Natur eine lebendige Einheit sei und im Unterricht als solche erlebt werden müsse, daß Zersplitterung also bildungsfeindlich sei. Der Unterricht in der Chemie verlange ganz besondere Vorsicht, da sie starke Abstraktionen und neue, strenge Begriffsbildungen anwende, wobei wenig Anknüpfungsmöglichkeiten an den Schülern schon Bekanntes gegeben seien.

Und darauf komme es an: Ausgehend vom Bekannten, von der Umwelt müsse der naturwissenschaftliche Unterricht ein Auflösen des Naturganzen in zusammenhanglose Einzelgebiete vermeiden; vielmehr müsse er das Ganze in einem einheitlichen Geiste erleben lassen. Und dieser einheitliche Geist habe sich in allen Bildungsgütern trotz der verschiedenen Wege, die bei ihrer Erarbeitung beschritten werden, auszuwirken.

Es schloß sich an der Vortrag von Oberschulrat Prof. Dr. Zühlke über den „Mathematischen Unterricht auf der Oberstufe der Reformanstalten und Oberrealschulen". Der Redner verteidigt zunächst die Mathematik gegen mehrfache plumpe Angriffe (Umfrage des Berliner Tageblattes), die in letzter Zeit auf ihren Bildungswert erfolgt sind. Sodann hebt er anerkennend hervor, daß sich

die preußischen Richtlinien die Meraner Vorschläge zu eigen gemacht haben. Als neu betont er an diesen Vorschlägen die folgenden drei Prinzipien: Materiales Prinzip (Betonung der Anwendungen); psychologisches Prinzip (Anpassung an die Entwicklungsstufe des Schülers; Abstraktion und strenger Beweis erst dann, wenn das Bedürfnis dazu zwingend ist und die nötige Reife erreicht ist); didaktisches Prinzip (Funktionsgedanke, Raumanschauung). Aus der Zielsetzung einer harmonischen Persönlichkeitsbildung ergibt sich die Forderung der Konzentration, der lebensvollen Wechselbeziehungen zu den übrigen Fächern. Dabei gilt es, die Brücken zu den übrigen Fächern nicht zu schaffen, sondern aufzusuchen.

Die Konzentration im Gebiete der Mathematik selbst kann durch die Behandlung großer, zusammenfassender Gebiete erzielt werden (Infinitesimalrechnung, Aufbau des Zahlensystems, Kegelschnittlehre, Abbildungsprinzip, projektive Geometrie). Für die Konzentration zu anderen Fächern wird vor allem auf die Lektüre fremdsprachlicher Mathematiker (Descartes) verwiesen.

Der Redner gibt sodann eine ausführliche Behandlung der Frage des Arbeitsunterrichts, den er in vernünftigen Bahnen durchaus befürwortet, dessen extreme Richtung er aber scharf bekämpft. Wirklichkeitsnähe des mathematischen Unterrichts werde vor allem durch Beispiele aus der Volkswirtschaft erzielt. Die Frage der Heranziehung des Gedächtnisses sei so zu beantworten, daß das Gedächtnis durch Übung im raschen Ablauf von Gedankenreihen erzogen und dadurch von rein mechanischer Belastung befreit werden müsse. Nach einer statistischen Mitteilung über die Beliebtheit der Reformanstalten und der Oberrealschulen schloß der Redner mit dem Ausdruck der Überzeugung, daß den genannten Schulen ein gutes Stück deutscher Zukunft gehöre.

Den physikalischen Unterricht an Reformanstalten und Oberrealschulen behandelte Prof. Dr. Hillers. Auch er beklagt es, daß die Richtlinien gerade den Reformanstalten und Oberrealschulen nur wenig inneres Verständnis entgegenbringen. Vor allem sei die ungenügende Stundenzahl für die Physik auf der Oberrealschule zu bedauern; in diesem Rahmen sei ein wirklicher Arbeitsunterricht schlechthin unmöglich. Nur auf der Oberrealschule könne gerade noch ein Überblick über das Gebiet der Physik gegeben werden; auf allen übrigen Schularten sei das ausgeschlossen und nur noch eine Behandlung einiger ausgewählter Kapitel möglich. Und dabei sei der Unterricht in der Physik nicht nur eine Forderung des praktischen Lebens. Gerade die Physik vermittle ganz spezifische Bildungswerte. Hervorzuheben sei ein klarer Einblick in das Verfahren der Induktion und der in den Rahmen der Erfahrung gespannten Deduktion, weiter die scharfe Formulierung der Naturgesetze durch die mathematischen Hilfsmittel, eine Erkenntnis der großen, allgemeinen Prinzipien der Naturwissenschaft (Energie- und Impulsprinzip) sowie schließlich eine Vorbereitung eines naturwissenschaftlichen Weltbildes. Durch eine Fülle von Beispielen belegt der Redner seine Ausführungen; gestreift wurde dabei die Stellung der Integralrechnung und die Frage der Dimensionsbetrachtung physikalischer Begriffe. Auch der physikalische Arbeitsunterricht, die Schülerübungen und der Gedanke der Konzentration mit den übrigen Fächern, namentlich in Richtung der Chemie und der Geographie wurden beleuchtet.

Zum chemischen Unterricht auf den Reformanstalten und den Oberrealschulen sprach Prof. Dr. Scheid. Er stellte einen eingehenden Plan für den chemischen

Unterricht auf und legte dar, wie auch dieser Unterricht in inneren Zusammenhang zu bringen sei mit dem flutenden Leben. Auch der Chemieunterricht soll scharfes Beobachten und logisches Denken fördern. Von den modernen Lehrplänen für Chemie erklärt er als die geeignetsten die schon erprobten Pläne Bayerns.

Über den biologischen Unterricht schließlich führte Studienrat Dr. Depdolla aus: Noch immer finde sich die Biologie in einer aus der geschichtlichen Entwicklung heraus zwar erklärlichen, vom modernen Standpunkte aus aber nicht mehr haltbaren Randstellung. Während sie früher wesentlich Floristik und Faunistik gewesen sei, habe sie jetzt durch Einbeziehung moderner biologischer Erkenntnisse (Vererbungsgesetze, Entwicklungsgedanke, Anpassungsproblem) Bildungswert gewonnen, der ihr eine zentrale Stellung und Bedeutung sichere. Diese erzieherischen Werte lassen sich dahin zusammenfassen, daß die Biologie die Wissenschaft vom Leben sei, daß sie begriffliche und logische Ordnung, also Systematik erleben lasse. Wie jede Naturwissenschaft lasse sie kausales Denken erkennen, wenn auch unter wesentlich komplizierteren und komplexeren Zusammenhängen, als wie sie etwa in der Physik vorlägen. Neben den Funktionsbegriff setze sie den Begriff der Korrelation. Weiter erziehe sie zur Besinnlichkeit und Bescheidenheit, zur Selbstverantwortung, zur Körperethik und zur Verantwortung für kommende Geschlechter (Eugenik). Sie entwickle im Schüler Liebe zur Natur, zu Tier und Pflanze und bereite gemeinsam mit den übrigen Naturwissenschaften ein Weltbild vor, wobei die Eigengesetzlichkeit des Lebens, die Frage, ob Mechanismus oder Vitalismus, entscheidend mitspreche. An der Hand des Aufbaues eines Lehrganges, der von der engeren Heimat auszugehen habe, wurden diese Ausführungen im einzelnen erläutert.

Dresden. E. GÜNTHER.

Bücherbesprechungen.

Die Preise der besprochenen Bücher sind nach den Mitteilungen der Verlagsanstalten im Erscheinungsmonat angegeben. Da die Buchhandlungen sich Änderungen vorbehalten, kann keine Sicherheit dafür geboten werden, daß die angegebenen Preise auch heute noch gelten.

O. Knopf, Mathematische Himmelskunde. (Mathematisch-Physikalische Bibliothek, Bd. 63). Leipzig 1925, B. G. Teubner. Geb. RM 1.20.

Wegemann, Grundzüge der mathematischen Erdkunde. (Sammlung Borntraeger, Bd. 9). Berlin 1926.

Bahnbrechend für die mathematische Erd- und Himmelskunde auf den Schulen war bekanntlich das Werk von Martus, und Martus war wirklich „ein guter Meister"; aber er ist, um mit Beckmesser zu reden, „doch lang schon tot". Es ist daher gerechtfertigt, den seinerzeit der Schule von ihm erschlossenen Lehrstoff in bequemerer und handlicherer Form zugänglich zu machen, als es in jenem klassischen Werk geschehen ist.

In vortrefflicher Weise kommt das Büchlein von Knopf dieser Aufgabe nach, das in knapper, aber vollständig verständlicher Form das ganze Gebiet behandelt. Da der Verfasser als Professor der Astronomie an der Universität Jena das Gebiet auch wissenschaftlich völlig beherrscht, findet selbst der mit dem Gebiet Vertraute in dem Büchlein manche ihm neue und ihn erfreuende Bemerkung und auch in der Art der Darstellung manchen wertvollen didaktischen Gedanken. Die Schrift sei warm empfohlen.

Leider läßt sich dem Buch von Professor Wegemann nicht das gleiche Lob spenden. Zugegeben, daß es kaum möglich ist, ein Buch ohne kleinere Unachtsamkeiten oder selbst Unrichtigkeiten zu schreiben, so kann doch verlangt werden,

daß sie sich nicht allzu sehr häufen. Wir finden hingegen auf Seite 19 oben die Bemerkung, daß die Sonne ihren Durchgangspunkt durch den Äquator täglich ändert. Auf derselben Seite steht unten, daß für einen Beobachtungsort von der Polhöhe 0° das Koordinatensystem von Höhe und Azimut mit dem von Deklination und Rektaszension zusammenfalle (gemeint natürlich: Polhöhe 90 Grad). Dann wird fortgefahren, daß sich, „von diesem Spezialfall abgesehen", die Sterne mit gleicher Deklination auf demselben Parallelkreis bewegen (gemeint natürlich: auch abgesehen von diesem Spezialfall ganz allgemein). Weiter finden wir auf Seite 20 die Bemerkung, daß der Stundenkreis den Äquator in 24 Stunden einmal durchläuft (gemeint natürlich sein Schnittpunkt mit dem Äquator). Alsdann folgt der Satz: „Aus der Zeichnung erkennt man die Beziehung Stundenwinkel + Rektaszension = Sternzeit, wenn man unter Sternzeit eines Ortes den Winkel zwischen Ortsmeridian und Stundenkreis des Frühlingspunktes versteht". — Man kann doch wohl verlangen, daß so grundlegende Definitionen nicht in beiläufigen Nebensätzen abgemacht werden, sondern daß sie bereits erledigt sind, ehe Lehrsätze über sie abgeleitet werden. Die Zeichnung, aus der diese Beziehung erkannt werden soll, ist völlig unverständlich und weist auch mehrere Fehler auf. In der Erläuterung derselben Zeichnung ist auf Seite 23 λ als Breite statt als Länge bezeichnet. — Auf Seite 122 steht, daß die Mondbewegung wohl dazu beigetragen habe, daß sich das geozentrische System „bis in die Neuzeit behaupten konnte, selbst zur Zeit des Hochstandes griechischer oder arabischer Astronomie". Die griechische und arabische Astronomie scheint für den Verfasser eine Steigerung gegenüber der Neuzeit zu bedeuten. Auf der folgenden Seite ist das Beobachtungsmaterial über die Bewegung des Mars erwähnt, „welches Tycho Brahe zur Stützung der geozentrischen Theorie gesammelt hatte, weil gerade der Mars eine relativ starke elliptische Bahn hat. — Was hat wohl die elliptische Bahn des Mars mit dem geozentrischen System zu tun? Auf Seite 125 ist das dritte Keplersche Gesetz mit der ausdrücklichen Beschränkung auf Planeten von gleicher Masse erwähnt, während unmittelbar dahinter steht, daß $t^2 : r^3 = t_1^2 : r_1^3 = k$ für alle Planeten gilt. Auf der folgenden Seite ist beim Newtonschen Gravitationsgesetz $P = \frac{k \cdot M \cdot m}{r^2}$ bemerkt, daß k eine Konstante ist, die von der Wahl der Einheit (statt „der Einheiten") und der Größe der Masse M abhängt. Welcher Art ist diese letztere Abhängigkeit? Dann folgt der Satz: „Newtons Verdienst besteht also obendrein darin, daß er nachwies, daß nur die Massen der Himmelskörper eine Rolle spielen". Was heißt „Rolle spielen" und spielt ihre Entfernung keine Rolle?

Wenn man bedenkt, daß jede einzelne solche Ungenauigkeit — wir haben hier nur die sich auf wenigen Seiten findenden erwähnt — den gewissenhaften Anfänger, der sich durch ein solches Buch durcharbeiten will, Stunden und Stunden kosten kann, so wäre wirklich zu wünschen, daß der Verfasser etwas strenger gegen sich selbst gewesen wäre. Und auch seine im Vorwort bedankte Korrekturleserin hätte schließlich einige der gröbsten Fehler auch merken können.

Nikolassee b. Berlin. P. Kirchberger.

A. Flechsenhaar, Einführung in die Finanzmathematik. 70 S. Leipzig 1926, B. G. Teubner. Kart. *RM* 2.40.

Zunächst als Hilfsmittel zur Vorbereitung auf die Ersatzreifeprüfung gedacht, kann das überaus klar geschriebene Bändchen jedem empfohlen werden, der mit Zinseszins-, Renten- und Versicherungsrechnung zu tun hat und eine Darstellung wünscht, die ihn nicht nur theoretisch aufklärt, sondern auch praktisch zur Lösung von Aufgaben anleitet. Als Einleitung zu diesen Gebieten bringt der Verfasser das Nötigste über arithmetische und geometrische Reihen, Kombinatorik und Wahrscheinlichkeitsrechnung. Der Abschnitt über die letztere ist in seiner Kürze und Übersichtlichkeit besonders gut gelungen. Zahlreiche nützliche Aufgaben dienen zur Einübung des behandelten Stoffes.

Vaihingen a. F. K. Fladt.

A. Schoenflies, Einführung in die analytische Geometrie. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Bd. 21.) 304 S. Berlin 1925, Julius Springer. Geh. *RM* 15.—.

A. Heß, Analytische Geometrie für Studierende der Technik und zum Selbststudium. 172 S. Berlin 1925, Julius Springer. Geh. *RM* 7.50

J. G. Rutgen, Beknopte analytische Meetkunde. 471 S. Groningen 1925, Noordhoff. Geb. fl. 9.—.

Das Buch von Schoenflies behandelt die ebene und räumliche analytische Geometrie der linearen und quadratischen Formen. Es knüpft an das Wissen der Schulen höherer Lehranstalten in analytischer Geometrie an, führt dann aber recht weit in die wissenschaftliche Forschung hinein. Neben den gebräuchlichen Punktkoordinaten werden Linienkoordinaten, homogene Koordinaten ausgiebig behandelt. Die projektiven Beziehungen, überhaupt die Fragen der geometrischen Verwandtschaft werden kräftig berücksichtigt. Das arithmetische Rüstzeug, soweit es über den üblichen Lehrstoff der höheren Schulen hinausgeht, Determinanten, Substitutionen, Invarianten usf. wird im Anhang bereitgestellt. — Die Darstellung, die sich durch Stoffreichtum auszeichnet, ist pädagogisch wohl durchdacht (ein Schlußparagraph des Anhangs bringt auch Beispiele und Aufgaben), es ist aber keineswegs eine leichte Lektüre. Diese „Einführung" dringt weit tiefer in den Stoff ein, als manches „Lehrbuch".

Ist das Buch von Schoenflies alles in allem theoretisch gerichtet, so das von Heß praktisch, wie es für einen mehr technisch interessierten Leserkreis selbstverständlich ist. Auf die analytische Geometrie der Ebene beschränkt, berücksichtigt es über die Kegelschnitte hinaus auch einige andere Kurven. Die numerische und die graphische Anwendung ist stark in den Vordergrund gestellt, Nomogramme, graphische Flächenbestimmung, Rechenschemata, Konstruktion von Krümmungsradien, das ist die Stoffwelt und die Welt der zahlreichen (gelösten) Beispiele und (ungelösten) Aufgaben (nur am Schluß die Ergebnisse). Die Darstellung bleibt immer elementar und leicht lesbar. Ausgezeichnet sind die Figuren; man sieht, daß sie als ein wesentlicher Teil des Ganzen gewertet werden. Das Buch schließt sich würdig den bekannten knappen Leitfäden des Verfassers für Planimetrie [1]) und Trigonometrie [2]) an, die, schon in höherer Auflagenzahl, dem technischen Unterricht und den nach technischen Anwendungen Ausschau haltenden allgemeinen Schulen gute Dienste leisten.

Das als „beknopte" = knappe analytische Geometrie angezeigte, die Ebene und den Raum berücksichtigende umfangreiche holländische Lehrbuch von Rutgen, das auch zahlreiche Aufgaben bringt und besonders durch die übersichtliche Form der Darstellung angenehm berührt (die Figuren könnten erheblich verkleinert werden), sei bei dieser Gelegenheit kurz angezeigt. Es hält in seinen Anforderungen an den Leser etwa die Mitte zwischen Schoenflies und Heß.

Göttingen. W. Lietzmann.

Zeitschriftenschau.

Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. — 35. Bd., 9. bis 12. Heft. — A. Terracini, Corrado Segre. — G. Junge, Besonderheiten der griechischen Mathematik. — A. Ostrowski, Mathematische Miszellen VII. — J. Lense, Über ametrische Mannigfaltigkeiten und quadratische Differentialformen mit verschwindender Diskriminante. — E. Study, Über einige Arbeiten des Herrn M. Beck. — Soji Nakajima, Eine charakteristische Eigenschaft der Kugel. — N. Obreschkoff, Über einige Multiplikatoren in der Theorie der algebraischen Gleichungen.

---

1) A. Heß, Planimetrie. Mit einem Abriß über die Kegelschnitte. Ein Lehr- und Übungsbuch zum Gebrauche an technischen Mittelschulen. 3. Aufl. 146 S. Berlin 1925, Julius Springer. Geh. *RM* 2.50.

2) A. Heß, Trigonometrie für Maschinenbauer und Elektrotechniker. Ein Lehr- und Aufgabenbuch für den Unterricht und zum Selbststudium. 5. Aufl. 132 S. Ebenda 1926. Geh. *RM* 3.—.

Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften. — 32. Jahrg., Nr. 12. — H. Hermann, Zur Frage der elektrophysikalischen Vorbereitung für die Hochschulreife. — H. Weinreich, Physikalische Schülerübungen über Erdtelegraphie. — E. Günther, Eine Denkaufgabe aus der Wärmelehre (Mischungsregel und Abkühlungsgesetz). — H. Behmann, Über die Erweiterung des Zahlbereiches, insbesondere die Einführung der negativen Zahlen.

Mathematics Teacher. — Vol. XIX, Nr. 7. — R. K. Morley, You know what I mean. — H. C. Barber, Some values of algebra. — J. W. Bradshaw, Drawing for teachers of solid geometry. — E. E. Watson, An analysis of freshman college mathematics. — J. O. Hassler, Suggestions on conducting the recitation in geometry. — T. P. Sharwell, Books that help make mathematics interesting.

Annalen der Physik. — IV. Bd. 81, 5. Heft. — M. A. Bontsch-Bruewitsch, Die Strahlung der komplizierten rechtwinkligen Antennen mit gleichbeschaffenen Vibratoren. — E. Marx, Reaktionskonstanten, Verweilzeiten, Rekombinationen und Wechselzahlen in Flammengasen und die Sättigungsspannungen der Charakteristik. — M. Neunhöffer, Beiträge zur Theorie des kontinuierlichen Anteils der Röntgenstrahlen. — A. Dietrich, Über die Temperaturabhängigkeit der Dielektrizitätskonstante von Quarz, Flußspat und Gips.

81. Bd., 6. Heft. — E. Brüche, Über den Querschnitt von Wasserstoff- und Stickstoffmolekülen gegenüber langsamen Elektronen. — T. Engset, Die Bahnen und die Lichtstrahlung der Wasserstoffelektronen. — A. Winter, Über gewisse Eigenschwingungen mit kontinuierlichem Spektrum. — W. Busse, Über den Nachweis monomolekularer Ionen in Luft und das Bestehen von Fernkräften zwischen Ion und Gasmolekül. — W. Alexandrow, Das Wasserstoffmolekülion und die Undulationsmechanik. I. Mitteilung: Die Berechnungsmethode der Energiestufen; die Ionisierungsspannung und das Prinzipielle über das Viellinienspektrum. — E. Rupp, Über die Polarisation des abklingenden Kanalstrahllichtes. — J. Kudar, Zur vierdimensionalen Formulierung der undulatorischen Mechanik. — K. L. Wolf, Dispersion und Molrefraktion der Alkalihalogenide und der Halogenwasserstoffe.

81. Bd., 7. Heft. — W. Arkadiew, Die Reflexion Hertzscher Wellen an ferromagnetischen Drahtgittern. — M. C. Johnson, Die Verteilung der Intensität in einer von positiven Strahlen ausgehenden Spektrallinie. — E. Gaviola, Die Abklingungszeiten der Fluoreszenz von Farbstofflösungen. — H. Hellmann und H. Zahn, Die Dielektrizitätskonstanten gutleitender Elektrolytlösungen.

81. Bd., 8. Heft. — W. Leo, Über ausgewählte Gebiete des Heliumspektrums. — T. Sexl, Zur Theorie der Radiometerwirkungen. — R. Frerichs, Intensitätsmessungen an Multipletts. — A. Wintner, Über gewisse Eigenschwingungen mit kontinuierlichem Spektrum. — Th. Sexl, Zur gastheoretischen Begründung der Stokes-Cunninghamschen Formel. — L. Schiller, Bemerkung zu Herrn Knodels Arbeit: „Über die Gasströmung in Röhren und den Luftwiderstand von Kugeln." — F. Kottler, Zur Theorie der Beugung an schwarzen Schirmen.

Physikalische Zeitschrift. — 27 Jahrg., 23. Heft. — R. Stoppel, Beitrag zum Problem der Leitfähigkeit der Atmosphäre. — L. S. Ornstein und F. Zernike, Bemerkung zur Arbeit von Herrn K. C. Kar: Die Molekularzerstreuung des Lichtes beim kritischen Zustande. — H. Rausch v. Traubenberg und S. Levy, Über ein Polariskop zur Bestimmung schwacher Polarisationen. — J. Errera, Die elektrischen Polarisationen einiger Kohlenstoffverbindungen: Geometrische und Stellungs-Isomeren. — J. J. Bikerman, Über die Dielektrizitätskonstante der Stäbchensole. — E. Wertheimer, Über eine Umformung der theoretischen chemischen Konstanten. — P. J. Jurišić, Beobachtungen über anomale Osmose durch Kollodiummembranen. — A. Müller, Über die Anwendung von Spülelektroden zu elektrolytischen Reindarstellung von Wasserstoff. — D. Rožansky, Der Ferromagnetismus des Nickels und der Quantenzustand seiner Atome. — G. Hettner, Stoßverbreiterung von Spektrallinien und Schärfe der Quantenzustände. — R. Ladenburg, Anomale Dispersion an elektrisch erregtem Wasserstoff, Helium, Neon und Quecksilber. — F. Simon, Ein neues einfaches Verfahren zur Erzeugung sehr tiefer Temperaturen. — G. Mie, Über ein Linienspektrum bei Wellenlängen von mehreren Dezimetern. A. Goetz, Untersuchungen über den glühelektrischen Elektronenaustritt bei Zu-

standsänderungen des Kathodenmaterials. — E. Rupp, Über die Polarisation des abklingenden Kanalstrahllichts. — F. Kirchner, Experimentelle Untersuchungen über die Richtungsverteilung der von Röntgenstrahlen ausgelösten Elektronen. — A. Korn, Neue Fortschritte mechanischer Theorien in Physik und Chemie. — A. Wigand, Ladungsmessungen an natürlichen Nebel.

Zeitschrift für Physik. — 40. Bd., 1. u. 2. Heft. — F. Matossi, Bemerkungen über die Schwingungsenergie der Molekeln CO und CO_2. — F. M. Penning, Über die Ionisation durch Elektronen in einem homogenen elektrischen Felde. — W. Grotrian, Bemerkung über das *M*-Dublett des Argons. — H. Kniepkamp, Über die Anwendbarkeit von Entladungsröhren mit Edelgasfüllung als Photometer. — K. Becker, Eine röntgenographische Methode zur Bestimmung des Wärmeausdehnungskoeffizienten bei hohen Temperaturen. — F. Ehrenhaft und E. Wasser, Das mikromagnetische Feld. — E Schmid, Über die Schubverfestigung von Einkristallen bei plastischer Deformation. — A. Kronenberger und P. Pringsheim, Über das Absorptionsspektrum des festen Benzols bei — 180°. — H. Stintzing, Eine mögliche Bedeutung der Tetraederzahlen im natürlichen System für die Anordnung von Protonen und Elektronen in den Atomen. — K. Ljalikov und A. Terenin, Spektroskopische Untersuchungen des Reaktionsleuchtens. — W. Gordon, Der Comptoneffekt nach der Schrödingerschen Theorie. — A. Popoff, Über die Formeln für die Zusammensetzung der Geschwindigkeiten der Massen, der Energien und der Bewegungsgröße in der Mechanik des Punktes von variabler Masse. — A. Popoff, Ableitung der formellen relativistischen Mechanik ohne Hilfe des Relativitätsprinzips. — A. Popoff, Beweis der Einsteinschen Formel für die Zusammensetzung der Geschwindigkeiten für den Fall, daß die Geschwindigkeiten aufeinander senkrecht sind. — A. Hnatek, Die Isophoten auf einer Kugel nach den Beleuchtungsgesetzen von Euler, Lambert und Lommel-Seeliger. — M. Jeżewski, Über elektrische Anisotropie der kristallinischen Flüssigkeiten. — D. Iwanenko und L. Landau, Zur Ableitung der Klein Fockschen Gleichung. — A. Smekal, Zur Frage des Widerspruches zwischen der klassischen Mechanik und Erfahrung bei Wärmestrahlung. — R. Bass, Bemerkung zu einer Veröffentlichung von Herrn Hans Reichenbach. — F. Lütgemeier, Bemerkung zu meiner Arbeit „Zur Quantentheorie des drei- und mehratomigen Moleküls“.

40. Bd., 3. u. 4. Heft. — M. Born, Das Adiabatenprinzip in der Quantenmechanik. — F. London, Winkelvariable und kanonische Transformationen in der Undulationsmechanik. — St. v. Bogdandy, J. Boehm und M. Polanyi, Über eine Methode zur Herstellung „molekularer Gemenge“. — N. v. Raschevsky, Zur Theorie der Schmelzwärmen. — H. Lessheim und R. Samuel, Bemerkungen über den Aufbau der Elektronengruppen im Atom. — J. Beckenkamp, Der Kristall als homogenes Polyeder und die Beziehungen der physikalischen Eigenschaften der Kristalle zu den einzelnen Gruppen der geometrischen Kristallographie. — E. Reichenbächer, Die Änderung der Riemannschen Krümmung bei Einführung der elektrischen Potentiale in den Fundamentaltensor. — V. S. Vrkljan, Über die Beziehung zwischen den Ausdehnungskoeffizienten und den Kompressibilitätskoeffizienten der Flüssigkeiten. — G. I Pokrowski, Über die Zerstreuung und Polarisation des Lichtes in dispersem Kohlenstoff. — H. Walter, Über die Berechnung elektrostatischer Potentiale von Kreis- und Kugelkonduktoren, insbesondere von unendlichen Kreis- und Kugelgittern. — G. H. Dieke und J. J. Hopfield, Das Absorptionsspektrum des Wasserstoffs und die Analyse seines ultravioletten Bandenspektrums. — E. Wilke und W. Strathmeyer, Experimentelle Beiträge zur Theorie der Diffusionsvorgänge. — E. Madelung, Quantentheorie in hydrodynamischer Form. — K. F. Herzfeld und A. Hettich, Die Symmetrie von Sylvin und die Natur der Ätzfiguren. Entgegnung auf die Bemerkungen von J. J. P. Valeton zu unserer Arbeit. — G. Joos und G. F. Hüttig, Zur Frage der Elektronenaffinität des Wasserstoffs.

40. Bd., 5. Heft. — O. Laporte und A. Sommerfeld, Versuch einer spektroskopischen Deutung der Magnetonenzahlen in der Eisengruppe. — L. Pauling, Die Abschirmungskonstanten der relativistischen oder magnetischen Röntgenstrahlendubletts. — R. Fürth, Über ein Problem der Diffusion im Schwerefeld. — R. Fürth, Anwendung der Fehlerrechnung auf ein Problem unsymmetrischer Verteilung. —

G. I. Pokrowski, Über die Lichtzerstreuung in Schwefelsuspensionen. — G. Wataghin, Über eine experimentelle Prüfung der ballistischen Hypothese. — E. Fermi, Zur Wellenmechanik des Stoffvorganges. — N. v. Raschevsky, Berichtigung zu der Arbeit: Einige Bemerkungen zur Heisenbergschen Quantenmechanik.

40. Bd., 6. Heft. — L. S. Ornstein und H. C. Burger, Die Einheit vom Singulett- und Triplettsystem und ihre Interkombinationen. — A. Güntherschulze, Über einen neuen Effekt der anomalen Glimmentladung und seine Beziehung zum Pseudohochvakuum. — M. Berek, Über Kohärenz und Konsonanz des Lichtes. — E. Schmid und G. Wassermann, Über die Rekristallisation von Kupferdraht. — A. W. Uspensky, Über die Abhängigkeit der Zahl der Lichtelektronen von der Wellenlänge und der Intensität des Lichtes. — A. Predwoditelew, Zur Frage der Abhängigkeit der Dichte von der Temperatur.

40. Bd, 7. Heft. — R. Glocker, Über den Energieumsatz bei einigen Wirkungen der Röntgenstrahlen. — E. Wigner, Über nicht kombinierende Terme in der neuen Quantentheorie. — W. Heisenberg, Schwankungserscheinungen und Quantenmechanik. — S. Kyropoulos, Die Druckabhängigkeit der Dielektrizitätskonstante einiger Flüssigkeiten bis zu 3000 kg/cm². — J. Pflicht, Reflexion eines beliebigen Strahlenbündels endlicher Öffnung an einem mit konstanter Geschwindigkeit bewegten Spiegel. — G. Goudsmit und E. Back, Die Koppelung der Quantenvektoren bei Neon, Argon und einigen Spektren der Kohlenstoffgruppe. — J. J. Weigle, Über die Gitterenergie und die Ablösearbeit von Elektronen bei Kalzium. — A. Güntherschulze, Zur Theorie des Kathodendunkelraumes. — B. A. Lomakin, Neue Vorrichtung zur Erzeugung des Funkenspektrums von Lösungen. — J. Mattauch, Antwort auf die Bemerkungen Herrn Ehrenhafts zu meiner Arbeit: Zur Frage nach der Existenz von Subelektronen.

40. Bd., 8. Heft. — E. Warburg und W. Rump, Über die Bildung von Ammoniak aus den Elementen durch stille Entladungen in Siemenschen Röhren. — G. Wentzel, Zur Theorie des photoelektrischen Effekts. — G. Wentzel, Zwei Bemerkungen über die Zerstreuung korpuskularer Strahlen als Beugungserscheinung. — B. Trumpy, Über Intensität und Breite von Spektrallinien. — S. Kyropoulos, Darstellung, Brechungsindex und Dielektrizitätskonstante des roten, kristallinischen Selens. — L. Landau, Zur Theorie der Spektren der zweiatomigen Moleküle. — F. Zernike, Die natürliche Beobachtungsgrenze der Stromstärke. — W. Zachariasen, Beitrag zur Frage nach dem Ionisationszustand der Atome im Raumgitter des Berylliumoxyds. — V. Thorsen, Über die Seriendarstellung des Wismutspektrums. — M. N. Saha, N. K. Sur und K. Mazumdar, Über einen experimentellen Nachweis der thermischen Ionisierung der Elemente. — G. P. Thomson, Bemerkungen zu der Arbeit von Herrn Richard Conrad: Über die Streuungsabsorption von Wasserstoff-Kanalstrahlen beim Durchgang von Wasserstoff.

Zeitschrift für technische Physik. — 7. Jahrg., 11. Heft. — W. Fischer, Der eisenlose Induktionsofen. — H. Schmidt, Über ein Verfahren zur Messung von Gastemperaturen. — W. Jubitz, Einfluß der Bearbeitung auf den thermischen Ausdehnungskoeffizienten der Metalle. — V. Fischer, Beiträge zur Thermodynamik veränderlicher Massen nebst Anwendungen. — G. Tamman, Die Kristallitenorientierung in metallischen Werkstücken in ihrer Beziehung zu den elastischen Eigenschaften. — A. Smekal, Zur Molekulartheorie der Festigkeit und der Verfestigung. — F. Koref, Über den Einfluß der Kristallstruktur auf die Formbeständigkeit von Wolfram-Leuchtkörpern. — R. Becker, Über Plastizität, Verfestigung und Rekristallisation. — E. Drehme u. A. Lotz, Beiträge zur Frage Gold aus Quecksilber. — A. Schack, Die Gasstrahlung vom physikalischen und technischen Standpunkt. — H. Behnken und R. Jaeger, Die deutsche Einheit der Röntgenstrahlendosis. — R. Glocker, Comptoneffekt und Röntgenstrahlenmessung. — S. Strauß, Das Mekapion, ein neuer Röntgendosiszähler mit Selbstkontrolle.

7. Jahrg., 12. Heft. — A. Meißner, Über piezoelektrische Kristalle bei Hochfrequenz. — E. Alberti, Über Schwingungserzeugung bei Raumladegitterröhren. — A. Korn, Drahtlose Bildtelegraphie. — N. v. Korschenewski, Ein Sendeverfahren für kurze Wellen. — W. Kummerer, Röhrensenderschaltungen insbesondere für kurze Wellen. — H. Barkhausen, Ein neuer Schallmesser für die Praxis. — H. Richter und H. Geffcken, Ein neues Relais für extrem schwache Ströme. —

U. **Meyer**, Hysteresisverluste bei starken und schwachen Magnetisierungen. — E. **Meyer**, Über Messung von Schallfeldern. — K. **Möller**, Anwendung der Wheatstoneschen Brücke bei einem Dynanometer. — W. O. **Schumann**, Ionenlehre und Gasdurchschlag. — W. **Deutsch**, Die Reinigung der Gase durch Stoßionisation. — W. **Backhaus** und F. **Trendelenberg**, Über die Kraftwirkung von Kolbenmembranen. — J. **Teichmüller**, Die Leuchttechnik, ihre Entwicklung und ihr gegenwärtiger Stand. — A. **Kühl**, Visuelle Leistungen von Fernrohren.

Die Naturwissenschaften. — 14. Jahrg., 48/49. Heft. — W. **van Dyck**, Gedächtnisrede auf Joseph Fraunhofer, Bernhard Riemann und Felix Klein. — A. **Vögler**, Wissenschaft, Technik und Wirtschaft. — A. **Petersen**, Die moderne Forschung auf dem Gebiete der Nichteisenmetalle, insbesondere der Leichtmetalle. — H. **Konen**, Die Lage der quantitativen Spektralanalyse. — P. **Günther**, Die quantitative Röntgenspektralanalyse.

14. Jahrg., 50./51. Heft. — L. **Meitner**, Experimentelle Bestimmung der Reichweite homogener β-Strahlen. — K. **Philipp**, Die Existenz der weitreichenden α-Strahlen des Radium *C*. — St. **Bogdany** und M. **Polanyi**, Emission von Atomen aus festen Körpern bei chemischem Angriff auf ihre Oberfläche. — R. **Ladenburg**, Die quantentheoretische Dispersionsformel und ihre experimentelle Prüfung. — H. **Schmidt**, Über ein Gaspyrometer. — Fr. **Wever**, Über die Röntgen-Emissionsspektren der Eisenmodifikationen. — A. **Betz**, Wirbelschichten und ihre Bedeutung für die Strömungsvorgänge.

14. Jahrg., 52. Heft. — R. **Courant**, Bernhard Riemann und die Mathematik der letzten hundert Jahre. — W. **Bothe**, Lichtquanten und Lichtwellen. — J. R. **Oppenheimer**, Quantentheorie des kontinuierlichen Absorptionsspektrums. — Fr. **Rinne**, Notiz über die Art des Regenbogenlichtes.

Zeitschrift für den physikalischen und chemischen Unterricht. — 39. Jahrg., 6. Heft. — H. **Hermann**, Messung und begriffliche Darstellung der thermischen Ausdehnung und Spannung. — K. **Polenske**, Zwei neuartige Methoden zur Behandlung der Wellenlehre. — H. E. **Hollmann**, Eine neue Apparatur zur Demonstration elektrischer Schwingungserscheinungen. — M. **Schneider**, Photochemische Eisenchloridstudien. — G. **Nyman**, Über einen Apparat zur Bestimmung von *g*. — A. **Stäger**, Ein einfacher Vorlesungsversuch zur Demonstration der Schnee-Elektrizität. — O. **Sättele**, Die Benutzung der Zeitzeichen von Nauen und vom Eiffelturm im Unterricht. — P. **Werner**, Die ionisierende Wirkung von Licht bei der Glimmlampe. — J. **Brun**, Nachweis der Wechselstromperiode. — C. **Heinrich**, Temperaturbestimmung einer Azetylenflamme. — C. **Heinrich**, Die Anwendung der Methode von Kurlbaum und Güntherschulze zur Photometrie der Spektrallinien. — C. **Heinrich**, Die Verfestigung des Heliums.

Naturwissenschaftliche Monatshefte für den biologischen, chemischen, geographischen und geologischen Unterricht. — VII. Bd, der ganzen Folge XXIV. Bd., 2. Heft. — O. **Hahn**, Die Bedeutung der Radioaktivität für die Geschichte der Erde. — H. **Langerfeld**, Über die Gefahr der schleichenden Quecksilbervergiftung.

Das Wetter. — 43. Jahrg., 10. Heft. — K. **Joester**, Das Wetter in Deutschland im August 1926. — F. X. **Beck**, Aus dem öffentlichen Wetterdienst: Flugwetter. Zur Ausbildung des meteorologischen Hilfspersonals.

43. Jahrg., 11. Heft. — A. **Schmauß**, Schulgemäße und nichtschulgemäße Meteorologie. — **Pfaff**, Wodurch wird der Wettersinn des Menschen ausgelöst?

Physik und Chemie (Wien). — 26. Jahrg., 6. Heft. — J. **Deisinger**, Der hydraulische Widder. — O. **Waldstein**, Einfache Versuche zur Optik. — L. **Pechinger**, Verwendung von Elektronenröhren zu Meßzwecken.

Optik und Schule. — Nr. 8/9. — F. **Vith**, Das Mikroskop und seine Anwendung im Unterricht der Volksschule. — M. **Berek**, Einführung in die Grundlagen der Optik. — **Stüler**, Ein bewegliches Strahlenmodell.

Die Sterne. — 6. Jahrg., 11./12. Heft. — G. **Schnauder**, Mars und die Keplerschen Gesetze. — K. **Graff**, Die südliche Polkappe des Mars während seiner Opposition 1924. — W. **Voß**, Große Sonnenflecke. Ihr Einfluß auf die Ausbreitung elektrischer Wellen.

Eingegangene Lehrmittel und Kataloge.

Raumbilder von Hildebrand-Präzisions-Instrumenten, Reihe 1. Firma Max Hildebrand, Freiberg i. Sa.

Der kleine Brockhaus in der Arbeitsschule von C. Broglie. Firma F. A. Brockhaus, Leipzig.

Catalogus November 1926. Firma N. V. Erven P. Noordhoff, Groningen.

Neuerscheinungen.[1]

Sammelwerke.

Der Weg zur Natur. Gemeinverständliche Darstellungen aus dem Reiche der Natur. Freiburg i. Br., Herder & Co., G. m. b. H.

R. Lais, Auf der Spur der Urmenschen. Mit 44 Bildern u. 2 Tafeln. 182 S. 1926.

E. Litzelmann, Unsere heimische Tierwelt im Alltag, bei Spiel und Tod Mit 51 Bildern. 167 S. 1926.

Mathematisch-Physikalische Bibliothek, herausgeg. von W. Lietzmann und A. Witting. Leipzig, B. G. Teubner. Kart. RM 1.20.

Bd. 68. A. Herrmann, Das Delische Problem, die Verdoppelung des Würfels. 58 S. 1927.

Bd. 69. L. Balser, Sphärische Trigonometrie, Kugelgeometrie in konstruktiver Behandlung. 52 S. 1927.

Sammlung Göschen. Berlin, de Gruyter. Geb. RM 1.50.

Bd. 210. W. Bruhns, Kristallographie. 2. Aufl. Neubearbeitet von P. Ramdohr. 184 Abb. 114 S. 1926.

Schauen und Schildern. Erdkundliche Lesehefte von E. Hinrichs. Frankfurt a. M., Diesterweg.

2. Reihe, Heft 3. H. Schmitthenner, Süd- und Ostasien. 64 S. 1926 Geh. RM —.90.

3. Reihe, Heft 2. E. Hinrichs, Klimatypen und natürliche Pflanzenvereine 64 S 1926. Geh. RM —.80.

3. Reihe, Heft 11. H. Lautensach, Geopolitik. 80 S. 1925. Geh. RM 1.20.

Mathematische Wissenschaft.

L. Bieberbach, Lehrbuch der Funktionentheorie. Bd. II. Moderne Funktionentheorie. 366 S. Leipzig 1927, B. G. Teubner. Geb. RM 20.—.

W. Lietzmann, Über die Beurteilung der Leistungen in der Schule. (Mathematisches—Psychologisches—Pädagogisches.) Leipzig 1927, B. G. Teubner. Geb. RM 6.—.

F. Schuh, Het Getalbegrip, in het bijzonder het onmeetbare getal. (Noordhoffs Verzameling van Wiskundige Werken.) 286 S. Groningen 1927, Noordhoff.

P. Wijdenes, Lagere Algebra. Deel II: Vergelijkingen, Functies, Grafieken en Reeksen. II. Druk. 414 S. Groningen 1927, Noordhoff. Geb. f. 8.50.

Mathematischer Unterricht.

N. Czajkowsky, Algebra. II Teil. (In ukrainischer Sprache.) 300 S. Prag 1926.

Féaux, Lehrbuch der Planimetrie. 14. Aufl. von H. Maymann und W. Dieck. 269 S. Paderborn 1927, Schöningh. Geb. RM 4.60.

---

1) An dieser Stelle werden alle bei der Schriftleitung einlaufenden Bücher, soweit sie überhaupt den Stoffkreis der Zeitschrift berühren, angezeigt. Eine ausführliche Besprechung der unverlangt einlaufenden Bücher behält sich die Schriftleitung vor. Eine Rücksendung kann in keinem Falle erfolgen.

Die Schriftleitung.

W. Lietzmann, Mathematisches Unterrichtswerk für höhere Knaben- und Mädchenanstalten. Leipzig, B. G. Teubner:

K. Pilizotti, Ergebnisse zur geometrischen Aufgabensammlung. I. Teil: Unterstufe. (Ausgabe A, B, C und M.) 38 S. 1927, Geb. *RM* 2.—.

M. Hauptmann, Technische Aufgaben zur Mathematik. (Ergänzungsheft 2.) 111 S. 1927. Geb. *RM* 3.—.

W. Lietzmann, Mathematisches Unterrichtswerk für Mittelschulen. Ausg. B: für Mädchen. Leipzig, B. G. Teubner:

W. Lietzmann, O. Eckhardt und K. Hahn, Aufgabensammlung und Leitfaden der Geometrie. 172 S. 1926. Geb. *RM* 2.80.

——, H. Martens und K. Hahn, Aufgabensammlung und Leitfaden der Arithmetik und Algebra. 144 S. 1926. Geb. *RM* 2.60.

M. Zacharias und M. Ebner, Mathematisches Unterrichtswerk für höhere Lehranstalten. Geometrie I. (Unterstufe.) 252 S. Frankfurt a. M. 1927, Diesterweg.

Naturwissenschaften.

R. Emden, Thermodynamik der Himmelskörper. (Sonderausgabe aus der Encykl. d. math. Wissensch.) S. 373—532. Leipzig 1926, B. G. Teubner. Geh. *RM* 6.40.

W. Gerlach, Materie, Elektrizität, Energie. Grundlagen der Ergebnisse der experimentellen Atomforschung. 2. Aufl. 291 S. Dresden 1926, Theod. Steinkopff. Geh. *RM* 15.—.

Göhringer, Führer zur Bestimmung von wichtigen Gesteinen mit einfachsten Mitteln. 64 S. Karlsruhe, Boltze. *RM* 1.80.

M. de Haas, Thermodynamika. 399 S. Groningen 1927, Noordhoff.

E. Hoppe, Geschichte der Optik. 263 S. Leipzig 1926, J. J. Weber. Geb *RM* 7.—.

H. Kobold, Stellarastronomie. (Sonderausgabe aus der Encykl. d. math. Wissensch.) S. 181. Leipzig 1926, B. G. Teubner. Geh. *RM* 5.80.

Müller-Pouillets, Lehrbuch der Physik. 11. Aufl. II. Band: Lehre von der strahlenden Energie (Optik). Erste Hälfte. Unter Mitwirkung von H. Erggelet, Jena; F. Jüttner, Breslau; A. König, Jena; M. v Rohr, Jena; E. Schrödinger, Zürich, bearbeitet von O. Lummer. 928 S. Braunschweig 1926, Vieweg. Geb. *RM* 50.—.

——, Lehrbuch der Physik. 11. Aufl. III. Band, erste Hälfte: Physikalische, chemische und technische Thermodynamik (einschließlich Wärmeleitung). Unter Mitwirkung von U. Ebbecke, Bonn; M. Jakob, Charlottenburg; A. Magnus, Frankfurt a. M.; F. Pollitzer, München; F. Sauerwald, Breslau; R. Suhrmann, Breslau; G. Zerkowitz, München, bearbeitet von Arn. Eucken (Breslau). 1185 S. Braunschweig 1926, Vieweg. Geh. *RM* 63.—.

G. Wiegner und P. Stephan, Mechanik der festen, flüssigen und luftförmigen Körper, einschließlich Meßtechnik und Materialprüfung. Mit zahlreichen Musterbeispielen und Übungsaufgaben. 4. Aufl. Bd. I der Sammlung „Technische Physik" für technische Lehranstalten und zum Gebrauch in der Praxis. 322 S. Leipzig 1926, B. G. Teubner. Geb. *RM* 8.—.

R. Winderlich, Chemie und Kultur. 139 S. Leipzig 1927, Voß. Brosch. *RM* 3.30.

Naturwissenschaftlicher Unterricht.

Ebeling, Lehrbuch der Chemie und Mineralogie für höhere Lehranstalten. I. Teil: Unorganische Chemie von O. Curio. 6. Aufl. 384 S. Berlin 1926, Weidmann. Geb. *RM* 6.—.

Hahn-Rühle, Physik für Mittelschulen und Anstalten mit verwandten Zielen. Ausgabe B: Für Mädchenschulen und Knabenschulen mit verminderter Stundenzahl. 200 S. Leipzig 1926. B. G. Teubner. Geb. *RM* 3.60.

——, Physik für Mittelschulen und Anstalten mit verwandten Zielen. Ausg. A: Für Knabenschulen. 2. Aufl. 264 S. Leipzig 1926, B. G. Teubner. Geb. *RM* 4.40.

K. H. Henniger, Lehrbuch der Chemie in Verbindung mit Mineralogie. I. Teil: Für höhere Lehranstalten von M Heidrich und W. Franck. 14. Aufl. 130 S. Leipzig 1926, B. G. Teubner. Kart. *RM* 2.60.

——, Lehrbuch der Chemie und Mineralogie. II. Teil: Neubearbeitet von M. Heidrich und W. Franck. 16. Aufl. Ausgabe A mit „Grundzüge der Geologie" von Prof. Dr. Fr. Schöndorf 366 + 37 S. Leipzig 1927, B. G. Teubner. Geb. *RM* 6.20. Ausgabe B ohne Geologie. 366 S. Geb. *RM* 5.60.

A. Lipp, Lehrbuch der Chemie und Mineralogie. I. Teil: Für die Mittelstufe der höheren Lehranstalten von J. Reitinger. 10. Aufl. 113 S. Leipzig 1925, B. G. Teubner. Kart. RM 2.—.

——, Lehrbuch der Chemie und Mineralogie. II. Teil: (Anorganische Chemie). Für die Oberstufe der höheren Lehranstalten von J. Reitinger. 10. Aufl. 146 S. Leipzig 1926, B. G. Teubner. Kart. RM 2.80.

Löwenhardt-Prölss, Lehrbuch der Chemie für höhere Knabenschulen. II. Teil, Ausg. A: Mit Anhang: Mineralogie und Geologie. 3. Aufl. 371 + 46 S. Leipzig 1926, B. G. Teubner. Geb. RM 6.80. Ausgabe B ohne Anhang. 371 S. Geb. RM 6.—.

Löwenhardt, Lehrbuch der Chemie für höhere Knabenschulen. Teil I. 5. Aufl. 123 S. Leipzig 1926, B. G. Teubner. Kart. RM 2.20.

Löwenhardt-Thieme, Lehrbuch der Chemie für höhere Mädchenbildungsanstalten. II. Teil, bearbeitet von E. Thieme. Ausg. A: Mit Anhang: Mineralogie und Geologie. 294 + 46 S. Leipzig 1926, B. G. Teubner. Geb. RM 5.60. Ausgabe B ohne Anhang. 294 S. Geb. RM 4.80.

Löwenhardt, Lehrbuch der Chemie für höhere Mädchenbildungsanstalten. Unterstufe. 6. Aufl. 140 S. Leipzig 1926, B. G. Teubner. Geb. RM 2.60.

A. Möbusz und H. Lüthje, Lehrbuch der Chemie und Mineralogie. I. Teil: Unterstufe. Anorganische Chemie. 3. Aufl. 174 S. Meißen 1926, Schlimpert & Püschel, G. m. b. H. RM 3.60.

Riebesell, Die Relativitätstheorie im Unterricht. (Heft 5 der Beihefte der Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften, herausgegeben von G. Wolff.) 42 S. Berlin 1926, Otto Salle. RM 2.20.

K. Schütt, Das Gas in der Schule. 68 S. Hamburg 1926, Selbstverlag der Hamburger Gaswerke. Geb. RM 2.90.

Lustige Ecke.

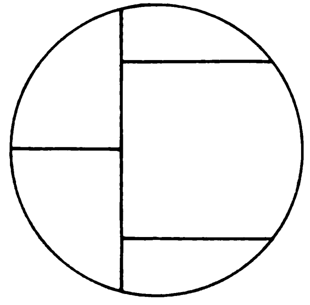
47. Die Liebeserklärung des Mathematikers. Ein Unterprimaner fand das graphische Bild der Funktion

$$y = -\frac{15}{2x^2+3} \pm \sqrt{36-x^2}$$

als passendes Symbol. He.

48. Scherzfrage. Es gibt einen Nordpol und einen Südpol; warum gibt es keinen Ostpol und Westpol? L.

49. Ein „mathematischer Stammtisch“ hat einer Zeitung (der „Welt am



Sonntag“) die Aufgabe vorgelegt, die Figur in drei Strichen auszulöschen, ohne einen Strich doppelt auszulöschen? Antwort? L.

Vermischtes. — Sprechsaal.

Zu „Ein Kugel-Restkörper“ (Jahrg. 57 (1926), S. 405). Dieser Restkörper, dessen Berechnung in technischen Lehranstalten wegen seiner Anwendung für die Praxis (Regulatorkugeln mit zentraler zylindrischer Bohrung u. a.) wohl allgemein geübt worden ist, findet sich auch verschiedentlich in der mathematischen Literatur vor, so z. B. in Holzmüller, „Elemente der Stereometrie“ II, Aufg. 438, Schurig-Riedel, „Stereometrie“, S. 158 (Kugelring).

Braunschweig. W. Jahns.

Neu ist dieser Satz *auch in der Schulbuchliteratur* nicht; er findet sich beispielsweise in „Schuster, Stereometrie“ (Teubner 1908) S. 66, Formel 12b, in Schülke II (Teubner 1910) S. 123, Nr. 8, und in Schulze-Pahl II (Reisland 1914) S. 213, Nr. 61a als Übungsaufgabe. Im übrigen wird im Unterricht die Berechnung der Kugelrinde als Differenz der Vollkugel und der Summe eines Zylinders und zweier Kugelabschnitte vorzuziehen sein, da diese Berechnungsart nicht die Kenntnis der Schwerpunktslage eines Kreisabschnittes voraussetzt. Richtiger erscheint vielmehr der umgekehrte Weg, wonach aus dem erhaltenen Rauminhalt mit Hilfe der Guldinschen Regel der Schwerpunkt des Kreisabschnittes gewonnen wird (Schülke, S. 125, Nr. 14).

Pforta. K. Bögel.

Zur Archimedischen Kreisberechnung. Die von mir in dieser Zeitschr., Jahrg. 51 (1920), S. 20ff. mitgeteilte Ungleichung zur Archimedischen Kreisberechnung gestattet folgende wesentlich einfachere Herleitung:

Da $b' < b$ und $b' - a > 0$ ist, so ist

$$b'(b' - a) < b(b' - a),$$

oder

$$b'^2 + ab < bb' + ab'$$

und

$$2b'^2 + ab < b'^2 + bb' + ab'.$$

Da $b'^2 = ba'$ ist, entsteht

$$2ba' + ab < b'^2 + b'(a + b).$$

Aus $a' = \frac{a+b}{2}$ folgt dann

$$b^2 + 2ab < b'^2 + 2a'b'.$$

Wiesbaden. O. Eckhardt.

Berichtigung. Herr Prof. Hamel (Techn. Hochsch. Berlin, Vors. des Reichsverb. Deutscher Math. Ges. u. Vereine) legt Wert auf eine etwas abgeänderte Fassung des Berichtes über eine Bemerkung von ihm auf der 28. Hauptvers. d. D. V. zur Förd. des math. u. naturw. Unterr. (s. d. Zeitschr. 57. Jahrg., 5. Heft, S. 226, 1926). Er soll lauten:

Hamel vermißt an den jungen Studenten genügende Ausdrucksfähigkeit in der Muttersprache. Eine Gabelung in den Oberklassen kann er nur befürworten, wenn sie maßvoll ist: Sicherlich müsse für das Reifezeugnis die gründliche Kenntnis einer fremden Sprache gefordert werden; mit einem Lehrziele in Mathematik, das auf irgendeiner Schulgattung der heutigen Obersekunda entspreche, könne er sich nicht einverstanden erklären — die Mathematik ist in Prima unentbehrlich —, als vierten Teil eines Quadriviums, d. h. eines notwendigen Kernes einer jeden wirklichen Bildung verlangt er die gründliche Pflege einer Naturwissenschaft.

Hamburg. W. Hillers.

ZEITSCHRIFT FÜR MATHEMATISCHEN UND NATURWISSENSCHAFTLICHEN UNTERRICHT ALLER SCHULGATTUNGEN

BEGRÜNDET 1869 VON J. C. V. HOFFMANN



HERAUSGEGEBEN VON
H. SCHOTTEN und W. LIETZMANN
in Halle a. S. in Göttingen
unter Mitarbeit von
W. HILLERS
in Hamburg

58. JAHRGANG. 1927 · 3. HEFT



LEIPZIG · B. G. TEUBNER · BERLIN

Inhaltsverzeichnis des 3. Heftes.

Fortsetzung auf der dritten Umschlagseite.



Typische Fehler in der mathematischen Lehrbuchliteratur.

Von H. WILLERS in Göttingen.[1])

Mit 4 Figuren im Text.

Im folgenden gebe ich eine Aufzählung einiger Unklarheiten und Fehler wieder, die ich in einer Reihe der neu erschienenen mathematischen Lehrbücher gefunden habe. Eine Nennung der Bücher unterlasse ich, um zu vermeiden, daß der *Wert* eines Lehrbuches lediglich nach einigen Fehlern beurteilt wird. Ich bemerke ausdrücklich, daß diese Sammlung keinen Anspruch auf Vollständigkeit macht, ich habe nur einige mir wesentlich erscheinende Punkte herausgegriffen. Bei der Besprechung wird die Grenze der Schulmathematik überschritten.

Wünschenswert wäre mehr Klarheit über das sogenannte *„Prinzip des Cavalieri"*. Man will mit dem Wort „Prinzip" andeuten, daß dieser Satz nicht unabhängig ist von den übrigen z. B. Hilbertschen Axiomen. Für die Mittelstufe kommt aber eine solche Unabhängigkeit gar nicht in Frage. Man sollte hier ruhig das Wort „Grundsatz" gebrauchen. Bei dem Schüler taucht sonst der Gedanke auf, daß es neben Grundbegriffen und Grundsätzen noch etwas Weiteres gibt, das zum Aufbau der Geometrie notwendig ist, nämlich ein Prinzip, welches nicht Grundsatz ist, sondern mehr ein Hilfsmittel zum Beweisverfahren, besonders wenn noch angegeben wird, daß das „Prinzip" kein Grundsatz ist, aber auch nicht streng bewiesen werden kann. Nach einer veranschaulichenden Einführung das „Prinzip" als *Lehrsatz* zu bezeichnen, halte ich nicht für angängig. Erst in der Oberstufe bei der Integralrechnung, ist der Platz auf diese Frage näher einzugehen. Hier sollte man einschalten, daß der Grenzprozeß das „Cavalierische Prinzip" ersetzt. Bekanntlich ist es nach den Arbeiten von Dehn[2]) nicht möglich, ohne Grenzprozeß das Cavalierische Prinzip zu vermeiden. Inhaltsgleiche Körper sind nicht immer zerlegungsgleich. Wollte man im Elementarunterricht das Prinzip durch eine Art von Grenzbetrachtung umgehen, wie es ja schon bei der Bestimmung z. B. von Kreisinhalt bzw. Kreisumfang und der Kugeloberfläche geschieht, so wäre die Ableitung der Summe von Quadratzahlen in einem geschlossenen Ausdruck erforderlich. Ein neues Lehrbuch geht in dieser Richtung vor. Ob damit aber die Bestimmung von Körperinhalten leichter und vor allem für die Mittelstufe anschaulicher wird, möchte ich bezweifeln. Man führe bei der elementaren Körperberechnung diesen Satz als neuen *Grundsatz* ein, ohne damit irgend etwas Geheimnisvolles zu verbinden.

---

1) Nach einem in der Ortsgruppe Göttingen des Förderungsvereins gehaltenen Vortrage.

2) M. Dehn, Über raumgleiche Polyeder. Nachr. v. d. Königl. Ges. der Wiss. zu Göttingen, Math.-phys. Klasse 1900, S. 345—354; Über den Rauminhalt, Math. Ann. 55 (1902), S. 465—478.

Die übliche *analytische Geometrie* der Schule bezeichnet Study[1]) als „konkrete (Euklidische) Koordinatengeometrie". Demgegenüber stellt er die „abstrakte (Euklidische) Koordinatengeometrie". Diese bedarf eines besonderen Axioms[2]), nämlich daß ein System von drei Zahlen ein Punkt **ist.** Die aus der herkömmlichen Geometrie bekannten Begriffe wie Senkrechte usw. sind hier nur *Bilder*, sie sind „eine Welt für sich". Aus der Formel folgt der Begriff. Ganz umgekehrt ist der Weg in der üblichen analytischen Geometrie. Hier wird vom Begriff ausgegangen. Die Zuordnung eines Zahlenpaares (Zahlentripels) zu einem Punkt ist hier nicht Axiom, sondern nur Definition, begründet auf der Längenmessung von Strecken. Viele bedeutende Lehrbücher der analytischen Geometrie beginnen daher auch mit dem Vektorbegriff.[3]) In einem Lehrbuch der Oberstufe scheint mir hier der Unterschied nicht ganz klar erfaßt zu sein, denn die Zuordnung wird zwar als Definition gegeben, bei der Frage der Eindeutigkeit dieser Definition wird aber gesagt, daß der Nachweis nicht geführt werden kann, womit also die Definition eine axiomatische Bedeutung erhält. Tatsächlich ist der Nachweis der Eindeutigkeit in der „konkreten Koordinatengeometrie" trivial, in der „abstrakten" ist die Eindeutigkeit Axiom.

Ich komme zu den *Parallelen* und damit auf die bekannte Streitfrage über die Berechtigung des Beweises von Thibaut vor Behandlung der Parallelen. Ich stehe auf dem Standpunkt, daß man im Anfangsunterricht noch soviel der reinen Anschauung, dem gesunden kindlichen Empfinden entlehnen kann, daß aber der Aufbau des Stoffes für ein Lehrbuch streng wissenschaftlich sein muß, schon aus dem Grunde, wenn in den oberen Klassen ein Rückblick über die Grundlagen des Systems gegeben wird. Den Winkelsummensatz ohne den primitiven Begriff der Bewegung mit seinen Axiomen[4]) oder ohne vorherige Behandlung der Parallelen zu „beweisen", halte ich auch methodisch nicht für richtig. Hieraus würde ja dann ohne gleichwertige Axiome das Parallelenaxiom als Satz *folgen.* Wie man auf dieser Grundlage die Geometrie auf der Kugel ableiten will, ist mir nicht klar. Etwas eigenartig berühren allerdings in einem Lehrbuch für die Untertertia beim Beweise von Thibaut kleine Zusätze, daß zwar die axiomatische Grundlage nicht einwandfrei ist, daß aber auf solche Dinge hier noch nicht eingegangen werden kann. Will man den Winkelsummensatz aus methodischen Gründen an die Spitze stellen, so braucht er nur zur Grundlage eines Systems gemacht zu werden.[5]) Das Thibautsche Beweisverfahren ist sodann reine Veranschaulichung. Auch die axiomatische Grundlage des Bewegungsbegriffes bleibt erhalten — wenn auch unter Verzicht auf die Einheit-

1) E. Study, Die realistische Weltansicht und die Lehre vom Raum. S. 86. Braunschweig 1914.

2) H. von Helmholtz, Über die Tatsachen, die der Geometrie zugrunde liegen. Gött. Nachr. 1868. S. 193. Axiom I. — Sonstige Literatur vgl. H. Willers, Die Spiegelung als primitiver Begriff im Unterricht. Zeitschr. f. d. math. u. naturw. Unterr. 53, 1922. S. 69 u 70. Ich füge noch hinzu H. Beck, Koordinatengeometrie. I. Band. Die Ebene. Berlin 1919. (Springer.) S. 1 ff. sowie S. 80 ff.

3) Z. B. C. Runge, Analytische Geometrie der Ebene. Leipzig 1908. G. Kowalewski, Einführung in die analytische Geometrie. Leipzig 1910.

4) Vgl. H. Willers, a. a. O. S. 109—118.

5) Allerdings folgt daraus erst die sogenannte Semi-Euklidische Geometrie. Erforderlich ist noch das Stetigkeitsaxiom. Vgl. M. Dehn, Die Legendreschen Sätze über die Winkelsumme im Dreieck. Inaug.-Diss. S. 35—37. Leipzig 1900.

lichkeit und das Hauptmerkmal der Bewegungen, nämlich den Gruppenbegriff — indem das Gruppenaxiom aus diesem und dem Stetigkeitsaxiom folgt.

Unter Verwendung des Bewegungsbegriffs kann man auf zwei Wegen zu den Parallelen gelangen, durch Translation einer Geraden und durch Rotation einer Geraden in einer Ebene um einen Punkt. Bei dem ersten Verfahren darf aber nicht — wie geschehen — unterlassen werden, den Nachweis zu führen, daß die Geraden sich nicht schneiden. Eine große Schwierigkeit in der Elementarmathematik bei diesem Wege liegt in der Ableitung des Parallelenaxioms aus dem Gruppen- und Stetigkeitsaxiom.[1]) Hier kann nur eine anschauungsgemäße Einführung in Betracht kommen. Bei dem zweiten Verfahren halte ich die Anführung des Parallelenaxioms, wie allgemein die Bezeichnung eines Axioms, das nur anschauungsgemäß entwickelt ist, als Lehrsatz für sehr bedenklich.

Ich komme zu *Definitionen.* Bevor der Begriff „Abstand" gebracht ist, zwei Parallelen als Geraden mit überall gleichem Abstand zu bezeichnen, ist natürlich nicht richtig.

In der Definition a^x für $x \leqq 0$ fehlt fast stets der Zusatz $a \neq 0$. (Auch in der Formel für die geometrische Reihe

$$s = a\frac{q^n - 1}{q - 1}$$

fehlt meist der Zusatz $q \neq 1$. Falsch ist in der Formel

$$s = \frac{a}{1 - q}$$

die Einschränkung $q < 1$, um so mehr, wenn durchaus — wie geschehen — negative q in Betracht gezogen werden.)

Ein sehr ernster Fehler ist allerdings, eine Definition als Satz auszusprechen: z. B.

$$a^0 = 1 \; (a \neq 0).$$

Wenn auch die formale Weiterentwicklung der Potenzen $a^x (a \neq 0)$ von positiven ganzen x zur Null und zu negativen Zahlen den Schülern bekanntlich Schwierigkeiten macht, so darf das aber niemals zu Beweiserschleichungen, d. h. zur Anwendung von Rechenregeln für Werte führen, für die sie nicht bewiesen sind.

Als Beispiel einer *nicht erschöpfenden Definition* führe ich die Exponentialfunktion $y = a^x$, $a \neq 0$ an. Es wird gezeigt, was unter a^x zu verstehen ist für rationale $x \gtrless 0$, aber nicht für irrationale x. Die Definition

$$a^x = e^{x \ln a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x \cdot \ln a)^n}{n!}$$

ist natürlich für die Schule nicht brauchbar; hier muß die Funktion durch Annäherungswerte an rationale x (also nach der Methode der Zahlenfolgen von Weierstraß) mit Hilfe der Exponentialkurve definiert werden.[2])

---

1) Siehe H. Willers, a. a. O. S. 117.

2) Siehe z. B. G. Kowalewski, Grundzüge der Differential- und Integralrechnung. 3. Aufl. S. 38 u. 39. Leipzig 1923.

Unstatthaft ist folgende Schreibweise bei der Ableitung des Differentialquotienten von $y = \lg x$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{\lg \frac{x_1}{x_0}}{x_1 - x_0} = \lg \sqrt[x_1 - x_0]{\frac{x_1}{x_0}}$$

oder in $\lim\limits_{n=\infty} \sqrt[n]{E} = 1 \quad (E \neq 0$ beliebig reell),

da vorher nicht definiert ist, was für alle x z. B. $x = \pi$ der Ausdruck $\sqrt[\pi]{x}$ bedeutet.

In einem Lehrbuche der Mittelstufe, wo von Anfang an ebene und räumliche Betrachtungen erfolgen, darf natürlich nicht in der üblichen Parallelendefinition der Zusatz fehlen, daß die Geraden in einer Ebene liegen.

Bei der Festlegung der Regularität von Körpern in einem Buche der Oberstufe wird gefordert, daß die Kanten sämtlich gleich und daß die Flächen reguläre Vielecke sind, „die in gleicher Zahl alle Ecken bilden". Ein solches Polyeder könnte auch einspringende Ecken haben. Der Nachdruck muß eben auf die Kongruenz der regulären Polygone und der Ecken gelegt werden.

Definitionen dürfen selbstverständlich nicht in Widerspruch zu dem bisherigen Lehrgebäude stehen. So heißt es in einem Lehrbuche der Oberstufe: „Es besteht die Berechtigung, irgendwelche klar definierten Gebilde als Zahlen zu bezeichnen, wenn es möglich ist, eine widerspruchsfreie Aussage über größer (und kleiner) je zweier von ihnen zu treffen, d. h. sie anzuordnen". Der fehlende Nachweis dieser Berechtigung dürfte schwer fallen, denn entweder lege ich den Zermeloschen Wohlordnungssatz zugrunde, dann sind alle Mengen auch Zahlen, oder aber man zieht die Mengen nicht heran, dann sind z. B. die komplexen Zahlen keine Zahlen.

Gleich ernste Fehler finden sich auch in den Definitionen beim Aufbau des Zahlenbereichs. — „Das Ergebnis des Wurzelziehens heißt irrationale Zahl, wenn der Radikand keine $n$te Potenz ist." „Die Gesamtheit der rationalen und irrationalen Zahlen bildet den Bereich der reellen Zahlen." „Die ihm zugeordneten Rechenoperationen sind die vier Grundrechnungsarten und das Potenzieren." (Potenzieren ist an sich wegen des Multiplizierens überflüssig.) Zunächst ist nicht einzusehen, warum nach dieser Definition das Radizieren ausgeschlossen bleibt. Ferner sind hiernach e und π *keine* reellen Zahlen. Zu welchen Zahlen rechnet übrigens $\sqrt{2} + \sqrt{3}$? Manche Verfasser wollen für die Schule die Begriffe der algebraischen und transzendenten Zahlen vermeiden. Das ist nach meiner Ansicht aber unmöglich, wenn man einen lückenlosen Aufbau des Zahlenbereichs geben will.[1]) — Es wird dann weiter definiert: „Das Ergebnis des Wurzelziehens heißt imaginäre Zahl, wenn der Radikand bei geraden Wurzelexponenten negativ ist." „Die Gesamtheit der reellen und imaginären Zahlen bilden einen Zahlbereich, dem Potenzieren und Radizieren, Multiplizieren und Dividieren, *nicht* aber Addieren und Subtrahieren zugeordnet sind." Es sollen also nur die reellen und rein imaginären Zahlen umgrenzt werden. Wie ist es aber mit $\sqrt{i} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{2}(1 + i)$? — Falsch ist die Definition: „Einen Zahlbereich, dem

1) Vgl. hierzu H. Wieleitner, Der Begriff der Zahl. Math.-Phys. Bibliothek. Nr. 2. 2. Aufl. Leipzig 1918.



die vier Grundrechnungsarten, Potenzieren und Radizieren zugeordnet sind, nennt man *Zahlkörper*." Die rationalen Zahlen wären demnach kein Zahlkörper, und es ist doch der einfachste![1])

Man findet stets die Behauptung, daß $\sqrt{2}$ eine irrationale Zahl ist, den Beweis aber seltener. Wenigstens müßte die Existenz von irrationalen Zahlen bewiesen werden, was auf der Mittelstufe ganz leicht geschehen kann, während der Nachweis von transzendenten Zahlen wohl höchstens in Arbeitsgemeinschaften möglich ist, wo Mengenlehre getrieben wird.[2])

Bei der formalen Einführung der Winkelfunktionen in einem Lehrbuche der Oberstufe wird vom Einheitskreise ausgegangen. Der Sinus wird dann als die Senkrechte definiert, später aber ohne nähere Erläuterung als relative Zahl behandelt.

Sehr häufig fehlt die *Eindeutigkeit* einer Definition. Der Neigungswinkel z. B. zweier Ebenen wird festgelegt als der Winkel zwischen den Senkrechten, die auf der Schnittgeraden der beiden Ebenen in jeder Ebene errichtet werden. Der grundlegende Satz, daß im Raum Winkel mit parallelen und gleichgerichteten Schenkeln gleich sind, ist aber nicht gebracht. — Als Entfernung zweier windschiefen Geraden wird die Entfernung zweier durch sie gelegten parallelen Ebenen verstanden. Der Nachweis, daß es ein und nur ein Paar solcher Ebenen gibt, fehlt.

Gelegentlich findet man auch *doppelte* Definitionen für den gleichen Begriff, so z. B. $\ln x$ als eine Umkehroperation des Potenzierens *und* als Flächeninhalt des von der Hyperbel $f(x) = \frac{1}{x}$, der x Achse, den Ordinaten $f(1)$ und $f(x)$ umschlossenen Stückes. An sich ist gegen eine solche zweifache Definition nichts einzuwenden, wenn sie in einem Schulbuch auch unerwünscht ist. Werden aber beide Definitionen gebracht, so muß auch gezeigt werden, daß sie identisch sind, und ferner, wenn $\ln x$ im Kleinschen Sinne definiert wird, daß dann die Rechenregeln der Logarithmen auch hieraus folgen.[3])

Beim *limes-Begriff* handelt es sich um zwei Punkte, Nachweis der Existenz des limes und Berechnung seines Wertes. Meist wird der erste Punkt nicht beachtet und zur Berechnung nur eine bestimmte Zahlenfolge herangezogen. Man muß sich klar sein, daß die Berechnung von π nach dem üblichen Archimedischen Verfahren eine große Lücke enthält. Erst wenn man die Existenz des limes bewiesen hätte, wäre das übliche Verfahren berechtigt. Ich ziehe daher die Abzählmethode auf Koordinatenpapier vor, da diese zu recht brauchbaren, von den Schülern selbst zu findenden Ergebnissen führt, während man bei den

---

1) Zum näheren Studium für algebraische Zahlen und Zahlkörper siehe z. B. E. Landau, Einführung in die elementare und analytische Theorie der algebraischen Zahlen und der Ideale. Leipzig 1918, insbesondere § 1 bis § 9.

2) K. Grelling, Mengenlehre. Math.-Phys. Bibl. Nr. 58. Leipzig 1924, bringt diesen Beweis nicht. Vgl. dazu A. Fraenkel, Einleitung in die Mengenlehre. 2. Aufl. S. 27—42. Berlin 1923.

3) Vgl. z. B. F. Klein, Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus. 3. Aufl. 1. Bd. Arithmetik, Algebra, Analysis. Ausgearbeitet von E. Hellinger, für den Druck fertiggemacht Fr. Seyfarth. S. 155 ff. Berlin 1924. — Siehe außerdem die Abhandlungen in der Zeitschr. f. math. u. naturw. Unterr., Bd. 44 (1913), S. 1 u. 463, Bd. 47 (1917), S. 168 und Bd. 57 (1926), S. 301 (Frenzel, Funk, Rieder und Fladt).

Exhaustionsverfahren auf Zahlenwerte der Quadratwurzeln in Büchern mehr oder weniger angewiesen ist. Den obigen Fehler macht man ebenfalls z. B. bei der Berechnung von e. Daß in $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ein *stetiger* Übergang von n zu ∞ erfolgen muß, wird übersehen. Im Unterricht wird man natürlich auf solche Existenzbeweise meist verzichten müssen, man darf aber nicht stillschweigend darüber hinweggehen. Warnen möchte ich bei der limes-Definition vor der ε-Sprache. Es genügt eine klare Veranschaulichung durch graphische Darstellung. Aus dieser muß insbesondere hervorgehen, daß der lim nur ein und nur ein Wert sein kann, was durchaus nicht überall geschieht. Fehler wie z. B. der, daß zur Differenzierung einer Funktion nur die Stetigkeit erforderlich wäre, könnten sonst nicht vorkommen.[1]) Ich erinnere nur an die folgende Figur.

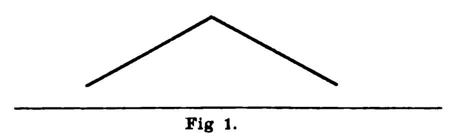


Fig 1.

Wahrscheinlich entsteht diese Unklarheit dadurch, daß meist zur Bildung der Differenzenquotienten nur *positive* Δx betrachtet werden. Umgekehrt sind auch Redewendungen in Voraussetzungen, wie $f(x)$ sei differenzierbar und stetig, nicht genau. Die Differenzierbarkeit bedingt die Stetigkeit.

Große Unklarheit herrscht weiter bei dem *Begriff der Funktion.* Die Definition lautet: „y heißt eine Funktion von x in einem Intervall, wenn zu jedem Zahlenwerte x des Intervalls ein und nur ein wohldefinierter Zahlenwert y zugehört".[2])

Die Kreisdarstellung $\quad y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$

sind danach zwei Funktionen $\quad y = +\sqrt{r^2 - x^2}$

und $\quad y = -\sqrt{r^2 - x^2}.$

Bilden wir nun die Umkehrung einer Funktion $y = f(x)$, so kann dies nur in einem Intervall von x geschehen, wo die Funktion $f(x)$ keinen Wert mehr als einmal annimmt, da sonst zu jedem Wert von y mehrere Werte von x gehören würden, d. h. z. B. stetige umkehrbare Funktionen müssen monoton steigend oder fallend sein.

Die Umkehrfunktion von $y = \sin x$, nämlich $x = \arcsin y$, ist also nur möglich im Intervall $-\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$, die von $y = \cos x$, nämlich $x = \arccos y$, im Intervall $0 \leqq x \leqq \pi$.

1) Bekanntlich gibt es sogar stetige Funktionen, die in keinem Punkte differenzierbar sind. Vgl. z. B. F. Klein, Anwendungen der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie. Autogr. Vorlesung. Neuer Abdruck. S. 83ff. Leipzig 1907. Für eingehendere Beschäftigung mit diesem Problem verweise ich auf K. Knopp, Ein einfaches Verfahren zur Bildung stetiger nirgends differenzierbarer Funktionen. Math. Zeitschr. 2. S. 1—26. (1918.)

2) Ich führe hier nur die für die Schule in Betracht kommende Definition von P. G. Lejeune-Dirichlet an. Vgl. auch A. Pringsheim, Allgemeine Funktionentheorie. Encyklop. d. math. Wissensch. Bd. 2, S. 1 ff.

Wollte man, wie es in einem neuen Buche der Oberstufe geschieht, jedem x ein oder mehrere getrennte Werte von y zuordnen, so ergeben sich bei den üblichen Definitionen von Ableitung, Integral usw. ganz unhaltbare Folgerungen. Wie ist es z. B. mit der Differenzierbarkeit im Punkte x folgender Funktion?

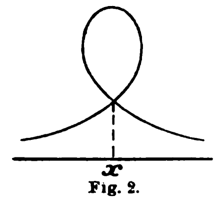


Fig. 2.

Im allgemeinen wird man die *Stetigkeit* entweder rein anschauungsgemäß oder auf Grund der Zahlenfolgen einführen. Es findet sich aber auch folgende Definition: „Eine Funktion ist an den Stellen stetig, wo es möglich ist, zu jeder noch so geringen vorgeschriebenen Differenz δ der Funktionswerte zwei Abszissenwerte anzugeben, die sich um einen Betrag $\varepsilon = f(\delta)$ unterscheiden und zu denen Funktionswerte mit der kleinen Differenz δ gehören". Hiernach wäre die Funktion

$$y = 1 \quad \text{für } x \text{ rational und } x = 0,$$

$$y = 0 \quad \text{für } x \text{ irrational}$$

in allen Punkten stetig. Es wird eben übersehen, daß nicht *Einzelwerte* genügen, sondern daß die Bedingung für *alle* Werte in einem bestimmten Intervall erfüllt sein muß.

Unbestimmte und *bestimmte Integrale* sind zwei ganz verschiedene Begriffe. Der erste ist die Umkehrung der Differentiation, der zweite der Grenzwert einer bestimmten Summe. Die Existenz des einen Integrals bedingt nicht die Existenz des anderen. Bekanntlich braucht eine Funktion, die für ein Intervall bestimmt integrierbar ist, in diesem Intervall nicht unbestimmt integrierbar zu sein. (Ich spreche nur vom Integral im Riemannschen Sinne.) Beispiel

Fig. 3.

Aber es kann auch das unbestimmte Integral einer sogar beschränkten Funktion existieren, ohne daß das bestimmte vorhanden ist.[1]) Die Verbindung zwischen beiden gibt erst der Satz: Wenn $\int_a^b f(x)dx$ existiert und eine Funktion $F(x)$ vorhanden ist, wo im ganzen Intervall $a \leqq x \leqq b$ $F'(x) = f(x)$ ist, so ist

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

In den Darstellungen der Bücher trifft man häufig den Standpunkt an, daß beide Definitionen identisch sind. Dabei kann die Schule doch nicht so ganz über diese Fragen hinweggehen.

Ein sehr oft auftretender Fehler ist die *unberechtigte Annahme von Voraus-*

1) Ein Beispiel einer solchen Funktion hat Volterra (Giorn. di Battoglini, Bd. XIX, 1881) angegeben. Vgl. E. W. Hobson, The theory of functions of a real variable. Bd. 1. 2. Aufl. S. 461. Cambridge 1921.

setzungen aus einer Definition, die nicht darin enthalten ist. So wird aus der Definition der Konvergenz einer unendlichen Reihe geschlossen, daß die einzelnen Glieder (absolut) monoton abnehmen müssen. Ich nenne nur das triviale Beispiel $1 + 0 + \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{4} + 0 + \cdots$. Natürlich ergeben sich hieraus falsche Sätze, z. B.: „In jeder konvergenten unendlichen Reihe ist

$$q_n = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leqq 1$$

von einem bestimmten Werte von n an".

Die *Fassung* von Lehrsätzen und Regeln ist häufig recht mangelhaft. Ich gebe einige Beispiele:

„Gleichnamige Brüche werden addiert, indem man die Zähler addiert", es fehlt „und den gemeinsamen Nenner beibehält".

„Potenzen mit gleicher Basis werden multipliziert, indem man die Exponenten addiert", statt „indem man die gemeinsame Basis mit der Summe der Exponenten potenziert".

„Durch eine Gerade und einen Punkt ist stets eine Ebene möglich", statt „durch eine Gerade und einen Punkt *außerhalb der Geraden* ist stets eine *und nur eine* Ebene möglich".

„Eine Gerade steht senkrecht auf einer Ebene, wenn sie auf zwei durch ihren Spurpunkt gezogenen Strahlen der Ebene senkrecht steht", statt „... *verschiedener* Strahlen, die *nicht eine Gerade bilden* ...".

Folgende Behauptung findet sich in einem Lehrbuch der OII bis OI: Der Mantel eines geraden Zylinders ergibt, in eine Ebene ausgebreitet, ein Rechteck, der eines schiefen Zylinders ein *Parallelogramm.* Ein Lehrbuch bezeichnet die Koeffizienten von x in der Gleichung $ax + b = c$ als ganzzahlig.

Auch *falsche Auffassungen in der graphischen Darstellung* möchte ich hierher setzen. Zunächst werden bei zeichnerischer Veranschaulichung von Zahlenwerten durch räumliche Gegenstände insofern Unterlassungen begangen, als nicht genügend die räumlichen Größenverhältnisse besonders der Tiefe bei der perspektivischen Verkürzung zur Geltung kommen, dann aber auch Fehler, indem Zahlenwerte zwar durch Körper dargestellt werden, die Größe jedoch nur durch die vordere Fläche veranschaulicht wird, die Tiefe des Körpers aber bei den wachsenden Zahlen ebenfalls entsprechend zunimmt. Häufig wird stillschweigend so verfahren, daß jeder Funktion „eine y-Linie", d. h. eine zusammenhängende Kurve entspricht. Gegenbeispiel wieder

$$y = 0 \text{ für rationales } x \text{ und } x = 0,$$
$$y = 1 \text{ für irrationales } x.$$

Außerdem verweise ich auf die Treppenkurven.[1])

Sehr häufig kommt eine *Verwechselung von notwendigen und hinreichenden Bedingungen* vor. Als Beispiel führe ich an: Wenn für einen Punkt x

$$f''(x) = 0$$

ist, so hat die Funktion an dieser Stelle einen Wendepunkt. Gegenbeispiel $y = x^4$ für $x = 0$. Bekanntlich müssen hier die höheren Ableitungen heran-

1) Vgl. z. B. W. Lietzmann, Funktion und graphische Darstellung. Breslau 1925.

gezogen werden. Erwähnen möchte ich auch, daß das Kriterium für Maximum und Minimum nur *hinreichend*, aber nicht notwendig ist. In der Funktion

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$$

verschwinden sämtliche Ableitungen für $x = 0$, trotzdem hat die Funktion ein Minimum im Punkte $x = 0$.[1])

Sehr ernste Fehler werden dadurch gemacht, daß man *Spezialfälle* verallgemeinert. Als Beispiel führe ich aus einem Lehrbuch der Oberstufe (O II bis O I) die Ableitung des Pyramideninhaltes an. Ein Würfel wird durch die Raumdiagonalen in sechs inhaltsgleiche Pyramiden zerlegt. Der Inhalt einer solchen Pyramide ist

$$J = \frac{1}{6} a^3 = \frac{1}{3} a^2 \cdot \frac{a}{2} = \frac{1}{3} g \cdot h,$$

womit die Inhaltsformel *allgemein* bewiesen sein soll.

Bei der Ableitung von $\sin(\alpha + \beta)$ wird gelegentlich die Formel nur für $\alpha + \beta < 90^0$ abgeleitet, angewendet wird sie dann auch für $\alpha + \beta \geqq 90^0$. Die gleiche Lücke findet sich bei der Formel für den Kugelabschnitt, wo die Formel $h < r$ bewiesen, aber auch für $h \geqq r$ angewendet wird. Bei den Winkelfunktionen $\sin(\alpha + \beta)$ usw. fand ich noch folgenden Fehler: „Die Winkelfunktion der Summe zweier Winkel ist niemals gleich der Summe der Winkelfunktionen der Einzelwinkel". Einfachstes Gegenbeispiel für $\sin(\alpha + \beta)$ ist $\alpha = 0$, $\beta = 0$, aber auch für $\cos(\alpha + \beta)$ z. B. $\alpha = 45^0$, $\beta = 225^0$.

Bei der *Entwicklung einer Funktion* in eine Taylorreihe wird häufig angenommen, daß die Funktion durch die Reihe im Konvergenzgebiet auch dargestellt wird.[2]) Als Gegenbeispiel nenne ich $y = e^{-\frac{1}{x^2}}$ wieder, wo jeder Koeffizient verschwindet.

Würde man, wie es geschieht, die Taylorreihe nach der Methode der unbestimmten Koeffizienten bestimmen, so müßte auch $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ entwickelbar sein. Die Taylorentwicklung ist eben keine unendliche Reihe, sondern besitzt ein Restglied $R_n(x)$. Die Bedingungen für die Entwickelbarkeit einer Funktion in einer Taylorreihe sind folgende:

1. $f(x)$ muß für einen bestimmten Bereich $a \leqq x \leqq b$ definiert sein.
2. $f(x)$ muß beliebig oft differenzierbar sein.
3. Die Ableitungen müssen im ganzen Bereich $a \leqq x \leqq b$ definiert sein.
4. $\lim R_n(x) = 0$ für jedes x im Intervall $a \leqq x \leqq b$.

Dann wird die Funktion $f(x)$ durch die Potenzreihe dargestellt in einem Intervall $a \leqq A \leqq x \leqq B \leqq b$, wo die Reihe konvergiert. Im obigen Beispiel ist die vierte Bedingung nicht erfüllt.

In vielen Büchern fehlt die *Eindeutigkeit der Potenzentwicklung*. Aber auch beim Nachweise dieser Eindeutigkeit findet sich ein Fehler: Es sei für einen bestimmten Bereich $|x| < x_0$

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots.$$

1) Siehe G. **Kowalewski**, a. a. O. S. 107—108.

2) K. **Fladt**, Unendliche Reihen. Math.-phys. Bibl. Nr. 61, Leipzig 1926, führt genau den Unterschied zwischen Konvergenz und Gültigkeit einer Taylorreihe an.

Daraus folgt

$$(a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)x + (a_2 - b_2)x^2 + \cdots = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots \equiv 0.$$

Für $x = 0$ ergibt sich $c_0 = 0.$

Nach Division durch x $(0 < |x| < x_0)$ ist

$$c_1 + c_2 x + \cdots \equiv 0.$$

Nun darf man nicht, wie es meist geschieht, $x = 0$ setzen. Aber die Funktion ist stetig und identisch 0, also muß sie für $x \to 0$ auch gegen 0 streben, d. h.

$$c_1 = 0 \quad \text{usw.}$$

Aus der *Reihenlehre* führe ich einige Fehler an. Beim Beweise über den Satz von der alternierenden Reihe wird geschlossen, wenn s_n die Teilsumme bis zum $n$ten Gliede bedeutet und s die Summe der Reihe, daß

$$s_{2n} < s < s_{2n+1}.$$

Da $\lim\limits_{n=\infty} a_n = 0$, müssen s_{2n} und s_{2n+1} gegen den gleichen $\lim s$ streben. Der Fehler liegt darin, daß beim Beweise die Existenz der Summe s, die doch erst *bewiesen werden soll,* benutzt wird. Der Beweis erledigt sich einfach durch den Häufungsstellensatz von Weierstraß, da die Werte s_n nach den Voraussetzungen nur *einen* Häufungspunkt s haben.

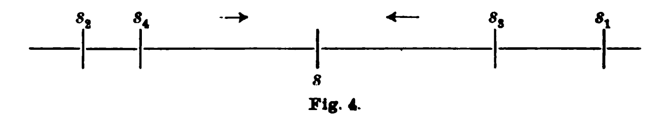


Fig. 4.

Auf folgenden ganz besonders schweren Fehler weise ich noch hin, wo lediglich als Voraussetzung für die Konvergenz einer alternierenden Reihe $\lim\limits_{n=\infty} a_n = 0$ angenommen wird: „Diese bei Reihen mit lauter positiven Gliedern nur notwendige Bedingung ist also bei alternierenden Reihen schon hinreichend für die Konvergenz". Einfachstes Gegenbeispiel:

$$1 - 1 + \frac{2}{2} - \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} + \frac{2}{4} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{2}{n} - \frac{1}{n} + \cdots.$$

Ein weiterer Fehler bei den konvergenten unendlichen Reihen findet sich im Nachweis von $\lim\limits_{n=\infty} a_n = 0$. Hier wird klassifiziert: erstens der lim ist gleich 0, oder zweitens der lim ist gleich $\gamma \neq 0$, wobei der Widerspruch sich sofort ergibt. Der dritte Fall, daß ein lim gar nicht vorhanden zu sein braucht, wird übersehen. Dabei erledigt sich der Beweis in wenigen Worten.

$$a_n = s_n - s_{n-1}.$$

Da die Reihe konvergiert, streben sowohl s_n wie s_{n-1} gegen s, d. h. die rechte Seite gegen 0. Der lim a_n ist also vorhanden und gleich Null.

Beim Beweise des Satzes: „Eine unendliche Reihe mit positiven Gliedern ist konvergent, wenn

$$q_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} \to \varepsilon$$

für $n \to \infty$, wo $0 < \varepsilon < 1$" wird ein „nach der Voraussetzung existierendes" δ zwischen 1 und ε angenommen, so daß

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \delta.$$

Es wird also einfach vorausgesetzt, daß der limes stets von rechts kommen müßte. Daß er auch von links kommen kann, zeigt folgendes Beispiel:

$$1 + \frac{3}{4} + \frac{2}{1} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3 + \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^4 + \cdots + \frac{n}{n-1}\left(\frac{3}{4}\right)^n + \cdots,$$

wo

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^2 - 1}{n^2} \cdot \frac{3}{4}.$$

Es gibt also kein δ zwischen $\varepsilon = \frac{3}{4}$ und 1.

Bei der Bildung des *Differentialquotienten* von $y = f(g(x)) = f(z)$ wird

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta z} \cdot \frac{\Delta z}{\Delta x}$$

gebildet und dann zur Grenze übergegangen. Das Verfahren ist richtig, solange $\Delta z \neq 0$. Ist im Intervall Δz endlich oft 0, so bleibt das Verfahren richtig, wenn man diese Punkte ausschließt (was gestattet ist, da $\lim \frac{\Delta y}{\Delta z}$ ja vorausgesetzt ist und ich dann endlich viele Punkte fortlassen darf).

Ist $\Delta y \equiv 0$ für ein x-Intervall, so ist $g'(x) = 0$, also

$$\frac{dy}{dx} = 0.$$

Ist $\Delta z = 0$ für unendlich viele Werte im x-Intervall, so ist, da $g(x)$ differenzierbar, $g'(x) = 0$, d. h. ebenfalls

$$\frac{dy}{dx} = 0.$$

Will man den *Lehrsatz von Bolzano* ausdrücklich anführen, so genügt für die Schule die Anschauung. Den Satz aber als einfache Folge der Stetigkeit hinzustellen, halte ich für zu weit gehend. So elementar ist der Beweis denn doch nicht.[1])

Nun noch ein beliebter Fehler aus der Zahlentheorie. Beim Euklidischen Beweis für die unendliche Anzahl von Primzahlen wird angenommen, daß es nur endlich viele Primzahlen $p_1, p_2 \ldots p_n$ gäbe. Dann bilde ich die Zahl $m = p_1 \cdot p_2 \cdots p_n + 1$, die nicht durch die endlich vielen p_ν teilbar ist. Es wird nun häufig geschlossen, daß m auch Primzahl sein müßte. Gegenbeispiel

$$m = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1 = 30031 = 59 \cdot 509.$$ [2])

„Gleichungen von höheren als 4. Grades sind nicht durch algebraische Operationen lösbar." Ich will gar nicht die Galoissche Theorie heranziehen, wo die

---

1) Vgl. B. Bolzano, Rein analytischer Beweis ... Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften. Nr. 153.

2) Allerdings kommt es auf die Formulierung der Annahme an. So ist der Schluß in P. Bachmann, Niedere Zahlentheorie. I. Teil. S. 43. Leipzig 1902, richtig.

notwendigen und hinreichenden Bedingungen der Auflösung durch Wurzeln erläutert werden, sondern nur auf die Gleichung verweisen

$$x^5 = 32.$$

Ausdrücke wie „Abmessungen der Halbkugel", „Endpunkt eines freien Schenkels" sind zum mindesten unklar. Asymptoten „berühren" die Hyperbeläste usw. nicht, auch nicht im Unendlichen.

Bei der Zusammenfassung der Lösungen quadratischer Gleichungen mit zwei Unbekannten darf es nicht einfach heißen: „Sie haben zwei oder vier reelle Lösungen". Wenigstens muß die Möglichkeit von Doppelwurzeln angegeben werden.

Eine Funktion dreier Variablen ist eine Fläche, nicht eine Kurve im Raum.

Bei der Beschreibung und Verwendung von Apparaten finden sich ebenfalls Fehler: Der Sextant dient zur Winkelmessung entfernter Punkte (nicht naheliegender), das Winkelprisma und der Winkelspiegel werden nicht zur Messung von Winkeln benutzt, sondern zum Festlegen konstanter Winkel, Theodolit und Meßtisch sind nicht identisch. Auch in der perspektivischen Zeichnung von Kugel und Kugelkreisen finden sich immer noch die alten Fehler.

Verallgemeinerung einiger Sätze der neueren Geometrie.

Von Joh. Salachowski in Danzig-Langfuhr.

Mit 3 Figuren im Text.

Verallgemeinerungen von Lehrsätzen sind im Geometrieunterrichte nicht unbekannt. Die des Sehnenvierecksatzes (von Carnot) und des Tangentenviereckssatzes (von Pitot) stellen willkommene Übungsbeispiele dar. Nicht so oft ausgeführt wird vielleicht die Carnotsche Erweiterung des Menelaussatzes, die mit Hilfe des Schlusses von n auf $n+1$ möglich ist. Duale Überlegungen würden dann zum verallgemeinerten Ceva überleiten. Soweit mir bekannt, bleiben die Sätze von Pascal und Brianchon auf das Sehnen- bzw. Tangentensechseck beschränkt. Nachstehenden Zeilen sei es vergönnt, die sinngemäße Übertragung der vier letztgenannten Sätze auf beliebige Vielecke aufzudecken, wobei für Menelaus nur weitere Beweise erwähnt, die andern drei Sätze aber, wie ich anzunehmen wage, erstmalig bewiesen werden.

I. Der Satz von Menelaus.

Carnot[1]) liefert den Beweis für die Erweiterung des Menelaussatzes derart, daß das Vieleck durch Diagonalen von einer Ecke aus in Dreiecke zerfällt wird, auf die dann einzeln der Original-Menelaus anzuwenden ist. Hier folgen nun zwei weitere Beweise.

In Fig. 1 (Fünfeck $ABCDE$ mit der Schneidenden $T_1 T_5$) ist vorausgesetzt: $EP \parallel AB$, $DQ \parallel BC$, $BR \parallel DE$.

Aus $$\Delta EPT_2 \sim \Delta AT_2T_4$$

1) Carnot, Geometrie der Stellung, übers. v. Schumacher, II. S. 326 ff., Altona, Hammerich 1810.



folgt $$ET_2 : EP = AT_2 : AT_4 \tag{1}$$

oder $$EP = \frac{AT_4 \cdot ET_2}{AT_2}.$$

Aus $$\Delta DQT_1 \sim \Delta CT_1T_5$$

folgt $$DT_1 : DQ = CT_1 : CT_5 \tag{2}$$

oder $$DQ = \frac{CT_5 \cdot DT_1}{CT_1}.$$

Aus $$\Delta DQT_3 \sim \Delta BRT_5$$

folgt $$DT_3 : DQ = BR : BT_5. \tag{3}$$

Ersetzt man hierin DQ durch den in (2) dafür gefundenen Wert, so wird

$$BR = \frac{BT_5 \cdot CT_1 \cdot DT_3}{CT_5 \cdot DT_1}.$$

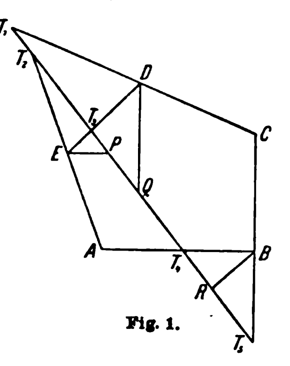


Fig. 1.

Aus $$\Delta EPT_3 \sim \Delta BRT_4$$

folgt $$ET_3 : EP = BR : BT_4. \tag{4}$$

Setzt man hier für EP den aus (1) und für BR den aus (3) sich ergebenden Wert ein, so gewinnt man auch

$$AT_4 \cdot BT_5 \cdot CT_1 \cdot DT_3 \cdot ET_2$$
$$= BT_4 \cdot CT_5 \cdot DT_1 \cdot ET_3 \cdot AT_2.$$

Analog dürfte der Beweis für jedes Vieleck verlaufen.[1])

Der analytische Beweis ist folgendermaßen zu geben.

In Fig. 1 sind durch die Teilverhältnisse $\frac{AT_4}{BT_4}$ und $\frac{ET_2}{AT_2}$ die Transversale und folglich auch T_1, T_3 und T_5 eindeutig bestimmt. Es muß also zwischen $\frac{AT_4}{BT_4}$, $\frac{BT_5}{CT_5}$, $\frac{CT_1}{DT_1}$, $\frac{DT_3}{ET_3}$ und $\frac{ET_2}{AT_2}$ eine Relation bestehen. Um diese zu finden, sei in Fig. 1 AB zur X-Achse und AE zur Y-Achse eines schiefwinkligen Koordinatensystems gewählt. Darin haben dann die Punkte A, B, E die Koordinaten $(0, 0)$, $(a, 0)$ und $(0, e)$; ferner seien diejenigen von C und D mit (p, q) und (r, s) bezeichnet. Schreibt man nun die Gleichung der Schneidenden in der Form: $Lx + My + N = 0$, so erhält man für die fraglichen Teilverhältnisse die Ausdrücke:

$$\frac{AT_4}{BT_4} = -\frac{N}{La + N}, \quad \frac{BT_5}{CT_5} = -\frac{La + N}{Lp + Mq + N}, \quad \frac{CT_1}{DT_1} = -\frac{Lp + Mq + N}{Lr + Ms + N},$$
$$\frac{DT_3}{ET_3} = -\frac{Lr + Ms + N}{Me + N}, \quad \frac{ET_2}{AT_2} = -\frac{Me + N}{N}.$$

---

1) Übersichtlicher gibt man den Beweis wohl so, daß man auf die Schneidende die Senkrechten AA', BB', ..., EE' fällt und das Produkt $\frac{AA'}{BB'} \cdot \frac{BB'}{CC'}, \dots, \frac{EE'}{AA'}$, das den Wert 1 hat, durch die Seitenabschnitte ausdrückt.

Die Schriftleitung.

Daraus ergibt sich aber

$$\frac{AT_4}{BT_4} \cdot \frac{BT_5}{CT_5} \cdot \frac{CT_1}{DT_1} \cdot \frac{DT_3}{ET_3} \cdot \frac{ET_2}{AT_2} = -1\,. \tag{5}$$

Diese Relation entspricht dem verallgemeinerten Satz von **Menelaus** und gilt sowohl bei Außenlage der Schneidenden als auch für jede konvexe, überschlagene und eingebuchtete Figur.

Dieser Satz kann umgekehrt werden (Beweis indirekt) und lautet dann: *Sind die Seiten eines n-Ecks so geteilt, daß die Produkte aus je n getrennten Teilstrecken gleich sind, und liegen entweder alle Teilungspunkte oder n — 2 von ihnen auf den Verlängerungen der Seiten, so liegen alle Teilungspunkte in einer Geraden.*

Bekanntlich gilt der verallgemeinerte Menelaus ebenfalls in der Sphärik.

II. Der Satz von Ceva.

Verbindet man in Fig. 2 (Fünfeck $ABCDE$) einen beliebigen Punkt S mit den Ecken A, B, C, D, E, so treffen diese Verbindungslinien die gegenüberliegenden Seiten in Punkten T_3, T_4, T_5, T_1, T_2, denen die Teilverhältnisse $\frac{CT_3}{DT_3}$, $\frac{DT_4}{ET_4}$, $\frac{ET_5}{AT_5}$, $\frac{AT_1}{BT_1}$, $\frac{BT_2}{CT_2}$ zukommen mögen. Da $\frac{AT_1}{BT_1}$ und $\frac{ET_5}{AT_5}$ den Punkt S und folglich auch T_2, T_3, T_4 eindeutig bestimmen, so muß es möglich sein, aus diesen zwei gegebenen Teilverhältnissen die drei weiteren zu berechnen. Bedient man sich hierbei ebenfalls des unter I fixierten Koordinatensystems, und werden dazu noch die Koordinaten von S mit u, v bezeichnet, so erhält man als Gleichungen der fünf Geraden AS, BS, CS, DS, ES:

Fig. 2.

$$vx - uy = 0, \tag{1}$$

$$vx + (a - u)y - av = 0, \tag{2}$$

$$(q - v)x - (p - u)y + pv - qu = 0, \tag{3}$$

$$(s - v)x - (r - u)y + rv - su = 0, \tag{4}$$

$$(e - v)x + uy - eu = 0. \tag{5}$$

Berechnet man nun die Teilverhältnisse der Schnittpunkte dieser Geraden mit den Fünfecksseiten, so findet man:

$$\frac{AT_1}{BT_1} = -\frac{rv - su}{rv + (a-u)s - av}, \qquad \frac{BT_2}{CT_2} = -\frac{e(a-u) - av}{p(e-v) + u(q-e)},$$

$$\frac{CT_3}{DT_3} = -\frac{pv - qu}{rv - su}, \qquad \frac{DT_4}{ET_4} = -\frac{rv + (a-u)s - av}{e(a-u) - av},$$

$$\frac{ET_5}{AT_5} = \frac{p(e-v) + u(q-e)}{pv - qu}.$$

Daraus folgt aber
$$\frac{AT_1}{BT_1} \cdot \frac{BT_2}{CT_2} \cdot \frac{CT_3}{DT_3} \cdot \frac{DT_4}{ET_4} \cdot \frac{ET_5}{AT_5} = 1\,. \tag{6}$$

Diese Relation kann man als den verallgemeinerten Cevaschen Satz dahin aussprechen: *n durch einen Punkt gehende Ecklinien eines n-Ecks teilen seine Seiten so, daß die Produkte aus je n getrennten Teilstrecken gleich sind.*

Der duale Zusammenhang, in dem Menelaus und Ceva stehen, verbürgt auch in der Sphärik den generellen Ceva.

Die durch de Oppel für die Winkelstücke des Dreiecks gegebene Erweiterung des Cevaschen Satzes ($\sin \alpha_1 \cdot \sin \beta_1 \cdot \sin \gamma_1 = \sin \alpha_2 \cdot \sin \beta_2 \cdot \sin \gamma_2$) läßt sich entsprechenderweise auf beliebige Vielecke also verallgemeinern:

$$\sin \alpha_1 \cdot \sin \beta_1 \ldots \sin \varphi_1 = \sin \alpha_2 \cdot \sin \beta_2 \ldots \sin \varphi_2,$$

wenn $\sphericalangle \alpha_1 = \sphericalangle SAB$, $\sphericalangle \beta_2 = \sphericalangle SBA$ usw. in Fig. 2 entspricht.

Die Anwendung des Sinussatzes liefert die Proportionen

$$\sin \alpha_1 : \sin \beta_2 = BS : AS,$$
$$\sin \beta_1 : \sin \gamma_2 = CS : BS,$$
$$\sin \gamma_1 : \sin \delta_2 = DS : CS,$$
$$\sin \delta_1 : \sin \varepsilon_2 = ES : DS,$$
$$\sin \varepsilon_1 : \sin \alpha_2 = AS : ES,$$

woraus nach Multiplikation das Gesagte ersichtlich.

Bezeichnet man ferner in Fig. 2 den Flächeninhalt des Dreiecks SAT_1 mit F_{α_1}, den des Dreiecks SBT_1 mit F_{β_2} und analog den der andern Teildreiecke, so ergibt sich die neue Erweiterung

$$F_{\alpha_1} \cdot F_{\beta_1} \cdot F_{\gamma_1} \cdot F_{\delta_1} \cdot F_{\varepsilon_1} = F_{\alpha_2} \cdot F_{\beta_2} \cdot F_{\gamma_2} \cdot F_{\delta_2} \cdot F_{\varepsilon_2}.$$

Setzt man nämlich $F_{\alpha_1} = \frac{1}{2} AT_1 \cdot AS \cdot \sin \alpha_1$, $F_{\alpha_2} = \frac{1}{2} AT_5 \cdot AS \cdot \sin \alpha_2$, so folgt

$$F_{\alpha_1} : F_{\alpha_2} = AT_1 \cdot \sin \alpha_1 : AT_5 \cdot \sin \alpha_2 .$$

Bildet man die analogen Gleichungen hierzu, so entspringt leicht obige Erweiterung.

Die beiden genannten Erweiterungen lassen sich in den Satz zusammenschweißen:

n durch einen Punkt gehende Ecklinien eines n-Ecks teilen seine Winkel (Fläche) so, daß die Produkte aus dem Sinus von je n getrennten Winkelstücken (Flächenstücken) gleich sind.

Die Erweiterung für Flächenstücke erscheint nur gültig, wenn alle Teilungspunkte zwischen den Ecken liegen.

III. Der Satz von Pascal.

Die gebotene Verallgemeinerung läßt sich zunächst für den in der Schulmathematik behandelten Spezialfall beweisen, daß der Kegelschnitt ein Kreis ist. Angenommen, P, Q, R, S wären die Schnittpunkte der Gegenseiten des Sehnenachtecks der Fig. 3 derart, daß sich AB und EF in P, BC und FG in Q, CD und GH in R, DE und HA in S schnitten. Zieht man nun die Diagonalen AE und BF, deren Schnittpunkt O ist, so folgt laut I für das Viereck $BPEO$

$$AP \cdot BF \cdot AO \cdot EF = AB \cdot FO \cdot AE \cdot FP \tag{1}$$

und für das eingebuchtete Viereck $APFO$

$$EP \cdot BF \cdot EO \cdot AB = EF \cdot BO \cdot AE \cdot BP. \tag{2}$$

Nach Multiplikation von 1 und 2 erwächst

$$AP \cdot EP : BP \cdot FP = \overline{AE}^2 : \overline{BF}^2. \tag{3}$$

Analog folgt

$$BQ \cdot FQ : CQ \cdot GQ = \overline{BF}^2 : \overline{CG}^2, \tag{4}$$

$$CR \cdot GR : DR \cdot HR = \overline{CG}^2 : \overline{DH}^2, \tag{5}$$

$$DS \cdot HS : ES \cdot AS = \overline{DH}^2 : \overline{AE}^2. \tag{6}$$

Verbindet man die Gleichungen 3 bis 6 multiplikativ, so erhellt

$$AP \cdot BQ \cdot CR \cdot DS \cdot EP \cdot FQ \cdot GR \cdot HS = BP \cdot CQ \cdot DR \cdot ES \cdot FP \cdot GQ \cdot HR \cdot AS. \tag{7}$$

Da (7) die Voraussetzung der unter I ausgesprochenen Umkehrung verbürgt, so folgt, daß die Gegenseiten des Sehnenachtecks sich auf einer Geraden schneiden. Analog läßt sich der Beweis für jedes Sehnenvieleck mit der Seitenzahl $2n$ führen.

Die Anwendung des Sekantensatzes auf die in Fig. 3 von P, Q, R, S ausgehenden Sekanten liefert nach entsprechender Multiplikation

$$AP \cdot BQ \cdot CR \cdot DS \cdot BP \cdot CQ \cdot DR \cdot ES = EP \cdot FQ \cdot GR \cdot HS \cdot FP \cdot GQ \cdot HR \cdot AS. \tag{8}$$

Aus (7) und (8) folgt aber nach Multiplikation bzw. Division

$$\frac{AP \cdot BQ \cdot CR \cdot DS}{FP \cdot GQ \cdot HR \cdot AS} = 1 = \frac{BP \cdot CQ \cdot DR \cdot ES}{EP \cdot FQ \cdot GR \cdot HS}. \tag{9}$$

Gleichung 9 ist analog für jedes entsprechende $2n$-Eck ableitbar. Demnach kann daraus u. a. der Satz repräsentiert werden:

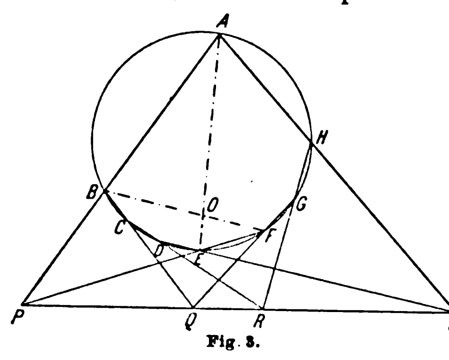


Fig. 3.

Bringt man bei einem Kreissehnenvieleck mit der Seitenzahl $2n$ die Gegenseitenpaare zum Schnitt, so verhält sich das Produkt aus den n ersten Sekanten zu dem der n letzten wie die entsprechenden Produkte ihrer äußeren Abschnitte.

Dieser Satz, der (7) nur in anderer Lesart darstellt, läßt sich auch direkt aus (7) durch Zusammenfassung diesbezüglicher Produktengruppen gewinnen. Man kann also jetzt beim Beweis des verallgemeinerten Pascal sofort von Satz 9 ausgehen, dessen Benutzung den Beweisgang vereinfacht (keine Hilfslinien nötig) und verkürzt (Satz 9 wird einmal angewendet).

Um den analytischen Beweis zu geben, erfahre die obige Voraussetzung die Erweiterung, daß Fig. 3 ein Sehnenachteck irgendeines Kegelschnittes zeige. Die Multiplikation von 1 und 2 ergibt dann

$$\frac{AO \cdot EO \cdot AP \cdot EP}{BO \cdot FO \cdot BP \cdot FP} = \overline{AE}^2 : \overline{BF}^2. \tag{3a}$$

Nach dem Potenzsatz hat das Rechteck aus den Abschnitten aller durch O gehenden Sehnen s die Form $\varphi\ (O)\ f\ (s)$, wo die Funktion φ allein vom Punkt O, die Funktion f allein von der Sehne als Geraden abhängt.

Danach folgt $$\frac{AO \cdot EO}{BO \cdot FO} = \frac{f(AE)}{f(BF)}$$

und somit $$\frac{f(AE) \cdot AP \cdot EP}{f(BF) \cdot BP \cdot FP} = \overline{AE}^2 : \overline{BF}^2 \tag{3a}$$

und analog $$\frac{f(BF) \cdot BQ \cdot FQ}{f(CG) \cdot CQ \cdot GQ} = \overline{BF}^2 : \overline{CG}^2, \tag{4a}$$

$$\frac{f(CG) \cdot CR \cdot GR}{f(DH) \cdot DR \cdot HR} = \overline{CG}^2 : \overline{DH}^2. \tag{5a}$$

$$\frac{f(DH) \cdot DS \cdot HS}{f(AE) \cdot ES \cdot AS} = \overline{DH}^2 : \overline{AE}^2. \tag{6a}$$

Aus der multiplikativen Verbindung der Gleichungrn (3a) bis (6a) ersprießt wiederum Gleichung 7. Nach deren Umkehrung erfährt der Pascalsche Satz die Umprägung:

Die Schnittpunkte der Gegenseiten jedes einem Kegelschnitte eingeschriebenen 2n-Ecks liegen in einer Geraden.

An Stelle der analytischen Überlegung könnte auch folgende treten: Nach Desargues ist es angängig, Kreissätze, die nur Lagebeziehungen enthalten, sofort durch Zentralperspektive auf beliebige Kegelschnitte zu übertragen. Somit erhielt man dann schließlich den allgemeinen Pascal.

Entsprechend den Folgerungen, die aus dem Originalsatz ersprießen, können aus dem generellen Pascal ähnliche gezogen werden. Entartet der Kegelschnitt insbesondere in ein Geradenpaar, so entsteht die Verallgemeinerung eines schon im Altertum bekannten Satzes.[1])

Das Pendant zum Pascalschen Satz bildet

IV. Der Satz von Brianchon.

Kraft des Dualitätsprinzips in der Ebene, wonach jedem Satz über Punkte und Geraden dual ein zweiter durch Vertauschung der Elemente Gerade und Punkt beigesellt werden kann, ist die Gültigkeit des verallgemeinerten Satzes von Brianchon *eo ipso* verbürgt. Im übrigen stützt sich der Beweis auf die bekannten Sätze von Pol und Polare und dazu auf den unter III gegebenen generellen Pascal. Er ist also unschwer in üblicher Weise zu führen. Bezeichnet man nun in Ermangelung eines besseren Ausdrucks der Kürze halber die Verbindungslinien der Gegenecken als Gegendiagonalen, so läßt sich Brianchons Satz allgemeinen dahin formulieren:

Die Gegendiagonalen jedes einem Kegelschnitte umgeschriebenen 2n-Ecks gehen durch einen Punkt.

Die sich hierbei ergebenden Sonderfälle entsprechen denen des verallgemeinerten Pascal.

---

1) J. Tropfke, Geschichte der Elementarmathematik, 4. Bd., S. 174, 2. Aufl., 1923, Vereinigung wiss. Verleger, Berlin und Leipzig.

Die Erarbeitung der quantitativen Magnetfeldgesetze für Gleichstrom.

Von H. Hermann in Tübingen.

Mit 2 Figuren im Text.

1. Methoden und Abmessungen.

Mit Ausnahme von Bahrdt, welcher sich vom Erdfeld unabhängig macht und mit Schwerkraft vergleicht[1]), benutzen alle Bearbeiter der Aufgabe, die Gleichstromfeldgesetze festzustellen, den Vergleich mit dem, häufig durch Dauermagnete am Vergleichsort schon abgeschwächten Erdfeld. Der Vergleich kann vorgenommen werden 1. durch gekreuzte Überlagerung unter Messung der Ablenkung, 2. durch beliebige, gewöhnlich gleichsinnige, allenfalls gegensinnige Überlagerung unter Intensitätsvergleich (Nadelschwingungszeitmessung), 3. durch Aufhebung des zu messenden Feldes, wobei es zunächst genügt, wenn die Stärke des Gegenfeldes in willkürlichem Maß leicht berechenbar ist. (Einpoliges Gegenfeld nach Ruoss; zweipoliges zwischen den Enden eines magnetisierten Stahlbandes nach dem Verfasser; elektromagnetisches z. B. mittels Multiplikator mit einzeln schaltbaren Windungen, wie in in einigen Firmenlisten zu finden.) Die Entdecker Biot und Savart selbst, deren Arbeitsgang im Biotschen Lehrbuch der Physik (4. Aufl., deutsch von Fechner, 1828) ausführlich mitgeteilt ist, waren wegen ihrer unbeständigen Stromquelle — es war noch die erste Form der Voltaschen Säule — zu einer Verbindung von zweien dieser Methoden genötigt.

Wird bei irgendeiner dieser Versuchsanordnungen jede Abmessung des zur Messung benutzten Stromleiters linear ver-n-facht und die Stromdichte in den Leitungsdrähten beibehalten, so werden Stromstärke und quadrierte Aufpunktsabstände n^2 mal so groß, es wirkt aber die $n$fache Leiterlänge; folglich wird die Feldstärke ebenfalls das $n$fache.

2. Vorgeschlagener Lehrgang.

A. Nullfeld der engen Doppelleitung (zuerst von Ampère besonders betont).

B. Multiplikatorprinzipnachweis: Algebraische Überlagerung der Felder unmittelbar benachbarter, gleicher Windungen beliebiger Gestalt.[2])

C. Geometrische Überlagerungseigenschaft der Stromfelder (vektorieller Charakter der Stromfeldstärke). Zum Nachweis geeignet ist der Obachsche Ring (Schulkonstruktion nach Kolbe).[3]) Der Nachweis ist wünschenswert, seitdem die Physik die Möglichkeit nichteuklidischer Geometrie in der Natur ernst zu nehmen begonnen hat. (Er liegt auch in der Übereinstimmung von Stromfeldmessungen untereinander bei verschiedenen Überlagerungswinkeln mit dem Vergleichsfeld.)

D. Nenner des Feldstärkenausdrucks, Entfernungsgesetz. Die Erstableitung des reziproken Entfernungsquadrats aus dem von Biot und

1) Sonderband II der Zeitschr. f. phys. u. chem. Unterr.
2) Grimsehl, Phys. Zeitschr. 3, 462.
3) Zeitschr. f. phys. u. chem. Unterr. 7, 123.

Savart zuerst gefundenen Entfernungsgesetz für den langen geraden Leiter durch Laplace scheint nicht veröffentlicht worden zu sein. Biot weist (am eingangs angeführten Ort) nur kurz auf Laplaces Verdienst in diesem Punkt hin; eine Laplacesche in Betracht kommende Veröffentlichung scheint es nach den Quellenangaben in der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften (Reiff und Sommerfeld, V 2 D, Artikel 13, S. 8) nicht zu geben. Sie läßt sich wiederherstellen, wie folgt. Nennt man p den Abstand des Feldpunkts von der stromdurchflossenen Geraden, φ den Winkel eines Fahrstrahls vom Feldpunkt nach einem Geradenpunkt gegen die Gerade, so ist das Längenelement des Drahtes $p \sin^{-2} \varphi \, d\varphi$. Nimmt man also auf Grund von B an, daß über die Längenelemente zu summieren sei, so kann, einerlei welche Abhängigkeit von φ sonst noch besteht, p nur dann Nenner des Ergebnisses werden, wenn es im Nenner des Elementarfeldgesetzes quadratisch steht.

Wo höhere Analysis zu Gebote steht, kann man also auf Laplace zurückgehen und dabei den Maxwellschen Nullversuch[1]) statt der zeitraubenden Wiederholung der Biot-Savartschen Untersuchung (die sich übrigens als Schülerlesestoff eignet) ausführen. Immerhin bleibt dabei für den Schüler, der von vornherein angeleitet worden ist, in den älteren Feldgesetzen nur Resultanteneigenschaften von Nahewirkungskräften zu sehen, die Frage offen, ob sich die Feldbeiträge der Längenelemente der Geraden, deren Kraftröhren sich freier gestalten können, ebenso summieren wie die der Windungen des Multiplikators. Darum und für Lehrgänge, welche keine Integralrechnung benutzen wollen, sei eine andere Ermittlung des Nenners vorgeschlagen.

Sie besteht in der Messung des Verlaufs der Feldstärke in der Figurenachse

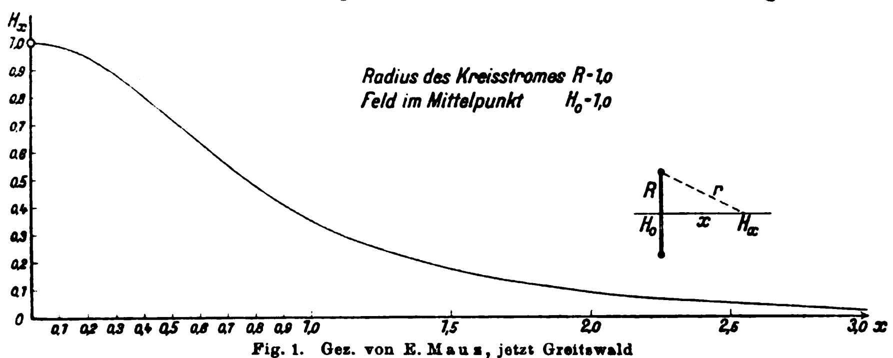


Fig. 1. Gez. von E. Maus, jetzt Greifswald

eines Kreisstroms. Hierbei ändert sich nicht nur die Entfernung, sondern auch die Richtung des Fahrstrahls zum Aufpunkt. Allein auf Grund von C ist man berechtigt, aus der geometrischen Summe mittels Division mit dem Sinus der Neigung der Fahrstrahlen gegen die Figurenachse die Absolutsumme der Feldstärkenbeiträge zu errechnen. Für Schauversuchszwecke kann man dabei unter Verwendung des Reifenhalbmessers 60 (Doppelmillimeter oder Halbzentimeter) rationale Sinus bei folgenden Fahrstrahllängen und Achsenabschnitten erhalten:

Fahrstrahllängen:	60	65	75	100	152
Achsenabschnitte:	0	25	45	80	144.

1) Grimsehl, Sonderband II der Zeitschr. f. phys. u. chem. Unterr., Heft 9, S. 8.

Die Frage nach einem etwaigen Einfluß der Krümmung des Leiters auf die Form des Abstandsgesetzes (die besonders bei der Anwendung der Ergebnisse auf geknickte Leiter, welche an den Ecken die Kraftröhren einengen, auftaucht) läßt sich mit dieser Anordnung entscheiden, indem sehr verschiedene Reifenhalbmesser benutzt werden; es ergibt sich stets dieselbe Form.

E. Zähler des Feldstärkenausdrucks für den Kreismittelpunkt: Nullversuche mit je zwei konzentrischen, aus m und n Windungen bestehenden mehrfachen Kreisleitern in derselben Ebene, deren Halbmesser sich wie $n:m$ verhalten und deren Felder sich bei gegensinniger Hintereinanderschaltung im Mittelpunkt aufheben. (Verallgemeinerung der von Müller und Grimsehl[1]) angegebenen Nullversuche.)

F. Zähler allgemein. Das Biot-Savartsche Verfahren zur Ermittlung des Zählers aus dem, auf der Winkelhalbierenden nur vom Winkel abhängigen Verhältnis der Feldstärken eines >förmigen Drahtes und eines senkrechten, der am Scheitel des ersteren vorbeiführt, eignet sich nur in der Umkehrung als Schüleraufgabe, die mit Hilfe des Müllerschen Integrals (s. Schlußbemerkung) zu lösen ist.

Statt dessen sei ein neues Verfahren vorgeschlagen. Es bedarf keiner größeren Hilfsmittel als der für die vorhergehenden Absätze benutzten; insbesondere nur bescheidener Strom- und Drahtstärken.

Zur Vorbereitung ist folgende Aufgabe über Abstandsmittelung zu lösen. Sie kann auch bei anderen der behandelten Versuche nötig werden, wenn etwa vorhandene etwas breitere Spulen benutzt werden; so in der älteren Gestalt auch bei der Müllerschen Rechteckspule.

Ein Fahrstrahl werde von einer Folge unmittelbar benachbarter, gleicher Leiterelemente oder konzentrischer Leiterkreise gekreuzt, so daß der dem Aufpunkt nächste den Abstand r_1, der fernste den Abstand r_2 habe. Der Strom zwischen r_1 und r_2 bestehe im ersten Fall aus gleichlangen, gleichabständigen Fäden, so daß, wenn er durch einen einzigen im Abstand x ersetzt wird, die Stromstärke mit $r_2 - r_1$ proportional zu setzen sei. Dann ist die Bedingung für gleiche Feldstärke im Ausgangspunkt des Fahrstrahls

$$\int_{r_2}^{r_1} \frac{dr}{r^2} = \frac{r_2 - r_1}{x^2}.$$

Hieraus folgt $$\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} = \frac{r_2 - r_1}{x^2}; \quad x = \sqrt{r_1 r_2}.$$

Im zweiten Fall dagegen, wo die Fadenlänge mit r proportional wird, gilt für den ersetzenden einfachen Faden vom Halbmesser x

$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \frac{r_2 - r_1}{x}.$$

Hieraus folgt $$\log\text{nat}\frac{r_2}{r_1} = \frac{r_2 - r_1}{x}; \quad x = \frac{0{,}4343\,(r_2 - r_1)}{\log\text{brigg}\, r_2 - \log\text{brigg}\, r_1}.$$

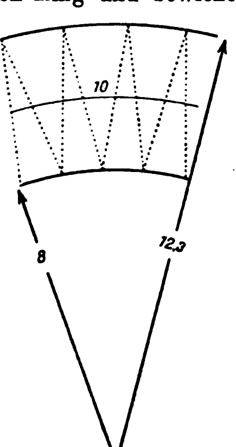
(Es empfiehlt sich nicht, $\log\frac{r_2}{r_1} = \log\left(1 + \frac{r_2 - r_1}{r_1}\right)$ in eine Reihe zu entwickeln, da das Ergebnis zu langsam konvergiert.)

1) Müller, Zeitschr. f. phys. u. chem. Unterr. 8, 34; Grimsehl, a. a. O. und Lehrb. d. Physik § 84, Abb. 244.

Beispielsweise gehört zu $r_2 = 12{,}5$, $r_1 = 8$ im ersten Fall $x = 10$; im zweiten $x = 10{,}08$; in beiden Fällen meßbar weniger als das arithmetische Mittel. Mit $r_2 = 12{,}3$; $r_1 = 8$ erhält man im zweiten Falle 10,00. Bei näherliegenden Wertepaaren $r_{1,2}$ wird die Abweichung vom arithmetischen Mittel unmerklich; für $r_2 = 10{,}23$; $r_1 = 9{,}77$ erhält man $x = 10{,}00$.

Man konstruiere einen *ebenen Leiter in Gestalt eines regelmäßigen Sternvielecks*, die Ecken auf den Kreisen vom Halbmesser r_1 und r_2 gelegen, mit kleinen Zentriwinkeln (bei großen Zentriwinkeln würde die Verteilung der tangentialen Stromkomponente zwischen r_1 und r_2 ungleichförmig werden, also eine andere Abstandsmittelung verlangen).

Die *Figuren* zeigen Ausschnitte zweier solcher Leiter für den Mittelabstand 10. Am einfachsten schneidet man aus dünner Pappe oder aus Zellhorn einen Ring und bewickelt ihn nach Figur wie einen Transformatorkern. Das Feld im Mittelpunkt eines solchen Vielecks wird verglichen mit dem eines Kreis-



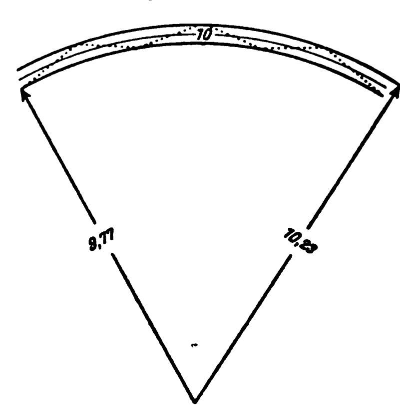


Fig. 2.

leiters vom Halbmesser x; es zeigt sich gleich. Verzichtet man auf heuristisches Vorgehen, so wird diese Tatsache am einfachsten durch Gegenschalten wie bei E als Nullversuch gezeigt.

Hieraus folgt, daß im Zähler die *scheinbare* Größe des Leiterelements steht.

Der Übergang zur wahren Bedeutung des so gefundenen Gesetzes: Magnetfeld um das gleichförmig bewegte Elektron in dem Bereich, in welchem die Ausbreitungszeit nach keine Rolle spielt (vgl Abraham-Föppl, Theorie der Elektrizität I, § 79, Gl. 213a und Text), wurde vom Verfasser an anderer Stelle behandelt.[1]) Den Übergang zum Durchflutungsgesetz gab Weiss.[2]) Die der Schule zugänglichen Integrationen: Gerade, Ebene, exzentrischer Kreispunkt sind von Müller, Speiermann und dem Verfasser ausgearbeitet.[3])

1) Lehrproben und Lehrgänge 1925, S. 60.

2) Zeitschr. f. phys. u. chem. Unterr. 33, 208. Siehe auch Hermann, Unterrbl. 32, 358.

3) Zeitschr. f. phys. u. chem. Unterr. 22, 145; 24, 226; 26, 273; 34, 49; Zeitschr. f. Instr.-Kunde 43, 351.

Der physikalische Lehrfilm.[1])

Von Karl Gentil in Elberfeld.

Während der mathematische und vor allem biologische Lehrfilm schon allenthalben Eingang in die Schule gefunden hat, sei es in der einfachen Form der geometrischen Kinohefte[2]) oder als Filmband[3]), kennt die junge Lehrfilmindustrie nur wenige Lehrfilme aus dem Gebiet der Physik. Die Lehrfilmverzeichnisse der Bildstelle des Zentralinstituts für Erziehung und Unterricht nennen:

1. Die Wetterlage vom 27. bis 31. Juli 1897. Herst. Imperator. Verf. Kassner.
2. Wie unser Auge getäuscht wird. Herst. Ufa. Verf. Gentil.
3. Hochspannungslichtbogen und Blitzableiterentladung. Herst. Siemens-Schuckert-Werke.
4. Zeitmikroskop. Herst. Deutsche Lichtbild-Gesellschaft. Deulig.
5. Funkenstation Nauen im Weltverkehr. Herst. Ufa.
6. Röntgenstrahlen. Herst. Deulig.
7. Bewegung der Planeten. Herst. Deulig.
8. Die Grundlagen der Einsteinschen Relativitätstheorie. Herst. Colonna-Film.
9. Zweitakt-Motor, Viertakt-Motor, Saug- und Druckpumpe } Schleifenfilme[4]) von 2—5 m Länge. Herst. Fachfilm.
   und zahlreiche weitere Kurzfilme.
10. Wunder der Schöpfung. Herst. Colonna-Film.

Wenn nun schon die mathematischen Filme von seiten der Lehrerschaft zum Teil eine wohlbegründete Ablehnung erfahren haben[5]), so wird das in noch größerem Maße bei Lehrfilmen, die physikalische Vorgänge darstellen, der Fall sein. Man wird mit Recht statt des Laufbildes das Experiment, das Modell verlangen. So ohne weiteres wird man aber doch nicht von vornherein jeden Lehrfilm ablehnen können, ist doch z. B. die Wundertrommel mit den Quinckeschen stroboskopischen Streifen[6]) zur Darstellung von Schwingungen im Prinzip

---

1) M. Ebner, Mathematische Lehrfilme. Diese Zeitschrift, 53. Jahrg. 1922. S. 193. K. Gentil, Der mathematische Lehrfilm. Unterrbl. f. Math. u. Naturwiss. 27. Jahrg. 1921. S. 55. W. Lietzmann, Methodik des mathematischen Unterrichts I². S. 289.

2) H. Detlefs, Geometrische Kinohefte. Berlin, Otto Salle.

3) L. Münch, Mathematische Lehrfilme. Frankfurter Union A. G. (nicht im Handel). H. Pander, Der Lehrfilm des Pythagoras. Berlin, Universum-Film-A.-G. F. Kornblum, Der Lehrfilm des Pythagoras. Berlin, Deutsche Lichtbildgesellschaft. P. Röseler und H. Schwerdt, Verschiedene mathematische Lehrfilme. Berlin, Lichte & Co.

4) Schleifenfilme sind 2—5 m lange Bildstreifen, die mit den Enden zusammengeklebt, fortlaufend vorgeführt werden können. Sie eignen sich nur zur Darstellung periodischer Vorgänge. Siehe W. Weber, Rücklaufvorrichtung und Kurzfilme. Diese Zeitschrift, 56. Jahrg. 1925. S. 238.

5) H. Pander, Brauchen wir mathematische Lehrfilme? Der Lehrfilm 1921, S. 8.

6) G. Quincke, Darstellung von Schwingungen für physikalische Vorlesungen mittels eines stroboskopischen Zylinders. Berlin, Winckelmann & Söhne.

nichts anderes als ein Film. Und welcher Physiker möchte diesen Apparat in seiner Sammlung missen? Mit der Einfachheit des stroboskopischen Zylinders sind selbstverständlich auch Nachteile aller Art verbunden, die der Film beseitigen kann. Die objektive Darstellung der Lissajouschen Schwingungsfiguren erfordert einen teueren Apparat, den sich nicht jede Schule beschaffen kann. Könnte hier nicht das Laufbild von Vorteil sein? Allerdings kann sich nicht jede Schule einen kinematographischen Vorführungsapparat leisten, wenn auch heute die Kosten für ein einfaches Schlägerwerk nicht gerade unerschwinglich sind. Für diese Fälle kann der Spirograph[1]) und das Mutoskop[2]) oder das Kinoheft in Verbindung mit einem Epidiaskop einen gewissen Ersatz bieten.

Der Gedanke, das Laufbild im physikalischen Unterricht zu verwerten, ist nicht neu. So schlägt Schopper[3]) vor, die Gesetze über Reflexion des Lichtes an ebenen und gekrümmten Spiegeln durch Trickzeichnungsfilme zu veranschaulichen, die wichtigen Vorgänge im Innern von Maschinen aller Arten, — gedacht ist hauptsächlich an Dampfmaschine und Motor, — die sonst durch Modelle oder Zeichnungen erläutert werden, durch das Laufbild darzustellen. Wenn man hierzu mutoskopische Kinohefte oder das größere Mutoskop in Verbindung mit dem Epidiaskop benutzt, ist wohl nichts einzuwenden. Sobald aber der teuere Bildstreifen zur Verwirklichung der Gedanken dienen soll, muß doch eine strenge Kritik einsetzen, die die Berechtigung sachgemäß prüft. So glaube ich, daß ein Laufbild, das die Vorgänge im Innern einer Maschine zeigt, gute Dienste leisten kann, da Modelle in der gleichen Größe wie das projizierte Laufbild nicht hergestellt werden. Dazu kommt, daß solche Filme in der einfachen, zweckmäßigen und billigen Form von sogenannten Schleifen- oder Ringfilmen zum Preise von etwa *RM* 2.50 hergestellt werden können, sofern periodische Vorgänge dargestellt werden sollen. Dagegen ist wohl ein Lehrfilm über die Reflexion des Lichtes überflüssig, da es billige einfache Apparate zur Demonstration dieser Gesetze gibt. Das gleiche scheint der Fall zu sein bei einem Lehrfilm über Röntgenstrahlen. Die hierzu notwendigen Apparate sind doch wohl in jeder halbwegs großen physikalischen Sammlung vorhanden. Andere physikalische Filme könnten mit Hilfe von Trickzeichnungen zur Erläuterung physikalischer Vorgänge beitragen. Aber auch hier ist Vorsicht angebracht, da die dargestellten Vorgänge oft nicht im geringsten den wirklichen Verhältnissen entsprechen können und eigentliche Bewegungsvorgänge darstellen. Auch der Bildstreifen „Wie unser Auge getäuscht wird"[4]) stellt keine eigentlichen Bewegungsvorgänge dar, doch erspart hier der Film eine Prüfung der tatsächlichen Verhältnisse, die an großen Lichtbildern unmöglich ist.

Es wäre sehr zu wünschen, daß von der Bildstelle des Zentralinstituts für die Herstellung von physikalischen, wie auch mathematischen Lehrfilmen An-

---

1) Film zu Hause. Umschau 1921, S. 21.

2) K. Gentil, Das Mutoskop als Kinematograph und das Problem des räumlichen Laufbildes. Aus der Natur 1921, S. 124. K. Gentil, Ist das Filmband das einzige Mittel zur Verwirklichung des Laufbildes? Deutsche Optische Wochenschrift 1921, S. 215 und Zeitschr. f. d. phys. u. chem. Unterr. 35. Jahrg. 1922, S. 34.

3) Th. Schopper, Neue Vorschläge für den Anschauungsunterricht unter Verwendung kinematographischer Bilderserien. Unterrichtsblätter f. Math. u. Naturwiss. 1913, S. 113.

4) K. Gentil, „Wie unser Auge getäuscht wird." Lehrfilm in 2 Teilen. Berlin, Kulturabteilung der Universum-Film-A.-G.

regungen gegeben werden. Dann kann es wohl auch nicht mehr vorkommen, daß Lehrfilme von seiten der Lehrerschaft abgelehnt werden, die in der besten Absicht entstanden sind und sehr viel Zeit und Geld gekostet haben. Man sollte die teuren Bildstreifen nur zur Darstellung von solchen physikalischen Versuchen benutzen, die einen großen Aufwand an Zeit und Geld erfordern, dabei aber nicht außer acht lassen, daß es sich um eigentliche Bewegungsvorgänge handeln muß. In bestimmten Fällen kann der Trickzeichnungsfilm zum besseren Verständnis von theoretischen Betrachtungen herangezogen werden, unter der Bedingung, daß durch die schematischen Figuren den wirklichen Verhältnissen kein allzu großer Zwang angetan wird. Endlich ist überall da, wo ein kinematographischer Vorführungsapparat[1]) fehlt, auf die einfacheren Darstellungsmittel, wie kinematographische Hefte und Mutoskop zurückzugreifen

Aufgaben-Repertorium.

Redigiert von Studienrat M. Brettar in Viersen (Burgstr. 2c).

Alle das Aufgaben-Repertorium betreffenden Zusendungen und Anfragen sind an die Adresse dieses Herrn zu richten.)

A. Auflösungen.

886. Laufen die Seiten eines veränderlichen Parallelogramms durch vier feste Punkte einer Geraden, so laufen auch seine Diagonalen durch feste Punkte dieser Geraden. (1925, Heft 4, Stengel-München.)

Lösung. Es laufe die Seite MP des Parallelogramms $MPNQ$ durch den festen Punkt A der Geraden g, QN durch B, PN durch C und MQ durch D. Es ist dann: $EB : EC = BA : CB$, d. h. der Schnittpunkt E der Diagonalen MN bleibt fest. Ferner ist $FB : FD = BA : DC$, d. h. auch der Schnittpunkt F der Diagonalen PQ bleibt fest, wie man auch die Parallelogrammseiten durch die festen Punkte A, B, C, D ziehen mag. — Auch analytisch läßt sich der Beweis auf einfache Art durchführen.

Clauss. Conrad. Diez Hoffmann. Janzen. Kapphan. Kasper. Lindemann. Mahrenholz. Mertens. Münst. Stengel. Stiegler. Stucke.

887. Zwei windschiefe Geraden g_1 und g_2 werden senkrecht projiziert auf drei beliebige, zueinander rechtwinklige Tafelebenen π_1, π_2, π_3. Der Schnittpunkt U' der in π_1 liegenden Projektionen g_1' und g_2' ist Projektion zweier Punkte U_1 auf g_1 und U_2 auf g_2. Entsprechendes gilt von V'' in π_2 und W''' in π_3. Welche Beziehungen gelten für die Punkte $U_1, V_1, W_1, U_2, V_2, W_2$, und wie ändert sich ihre Lage, wenn das Tafelsystem irgendwie gedreht wird? (1925, Heft 4, Kerst-Zwickau.)

Lösung. Ist $U_1 U_2 = a$ usw. $U_1 V_1 = d$, $U_2 V_2 = e$, der Winkel der windschiefen Geraden ϑ, so ist $a^2 + b^2 = d^2 + e^2 + 2de \cdot \cos\vartheta$. Setzt man $d^2 + e^2 + 2de \cos\vartheta = x^2$ usw., so ergibt sich $a^2 + b^2 + c^2 = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$. Zieht man zu $g_1, g_2, U_1 U_2$ gleichgerichtete Parallelen durch einen Punkt und ist

1) Einfache, aber gute Schlägerwerke mit Handantrieb, wie sie für Kurz- und Schleifenfilme ja nur in Frage kommen, sind heute zu einem Preis von etwa *RM* 250.— zu haben.

A der Sinus der gebildeten Ecke, so ist $A \cdot a = B \cdot b = C \cdot c$, und zwar gleich dem Moment von g_1 und g_2 (nämlich $= n \cdot \sin \vartheta$, wo n die kürzeste Entfernung bedeutet. Es ist ferner $A^2 + B^2 + C^2 = \sin^2 \vartheta$ oder $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{n^2}$. Dies dürfte wohl die einfachste (invariante) Beziehung sein.

BREHM. MAHRENHOLZ. STUCKE.

888. Von einem Tetraeder sei die Summe $3s$ der Seitenkanten gegeben. Man bestimme das Maximum seines Rauminhaltes, je nachdem die von jenen Kanten gebildeten Winkel λ, μ, ν — a) auch gegeben, b) nicht gegeben sind. (1925, Heft 5, Emmerich-Mülheim/Ruhr.)

Lösung. a) Sind x, y, z die Seitenkanten, so ist $J = \frac{1}{3} Rxyz$, wo $R = \sqrt{\sin\sigma \cdot \sin(\sigma - \lambda)\sin(\sigma - \mu)\sin(\sigma - \nu)}$, $\sigma = \frac{1}{2}(\lambda + \mu + \nu)$ ist. Da $x + y + z = 3s$ gegeben ist, so wird $x \cdot y \cdot z$ und folglich J am größten, für $x = y = z = s$. Das größte Tetraeder mit beliebig gegebenen Zwischenwinkeln hat den Inhalt $\frac{1}{3} R \cdot s^3$. b) Es ist $\sin\sigma \cdot \sin(\sigma - \lambda) = \frac{1}{2}[\cos\lambda - \cos(\mu + \nu)]$, $\sin(\sigma - \mu) \cdot \sin(\sigma - \nu) = \frac{1}{2}[\cos(\mu - \nu) - \cos\lambda]$. Wird λ zunächst festgehalten, so werden diese Ausdrücke unabhängig voneinander am größten, wenn $\cos(\mu + \nu) = -1$, $\cos(\mu - \nu) = +1$, d. h. $\mu = \nu = 90^0$ ist. Aus $R^2 = \frac{1}{4}\sin^2\lambda$ folgt $\lambda = 90^0$.

CONRAD. DIEZ. EMMERICH. HOFFMANN. KASPER. MAHRENHOLZ. MÜNST. NITSCHE.

M. Simon, Über die Entwicklung der Elementargeometrie im 19. Jahrh., gibt auf S. 204 an: Th. Scheerer, Journal für die reine und angewandte Mathematik 6, S. 98, Maximaltetraeder aus drei in einer Ecke zusammenstoßenden Kanten ist das rechtwinklige.

MAHRENHOLZ.

889. In einem Dreieck mit den Seiten $a = 15$, $b = 13$, $c = 12$ schneiden sich die Höhe h_a, die Winkelhalbierende w_β und die Mittellinie m_c in einem Punkte. Wie lauten die Beziehungen zwischen den Seiten von Dreiecken mit der gleichen Eigenschaft? Wie lauten die allgemeinen Formeln für ganzzahlige Seiten? Gibt es heronische Dreiecke, in denen sich die drei Geraden in einem Punkte schneiden? (1925, Heft 5, Mahrenholz-Kottbus.)

Lösung. Aus der Gleichung $\sin\alpha = \operatorname{tg}\beta \cdot \cos\gamma$ fließt die gesuchte Beziehung zwischen den Seiten: $a^3 - a^2c + ac^2 + c^3 - b^2c - ab^2 = 0$. „Allgemeine Formeln“ für ganzzahlige Seiten existieren nicht, obwohl unendlich viele ganzzahlige Lösungen vorhanden sind. Die Seiten a, b und c lassen sich durch die Weierstraßschen elliptischen Funktionen *rational* darstellen: $a = 2\lambda\wp(u)$, $b = 2\lambda\wp'(u)$, $c = \lambda(1 - 2\wp(u))$, wo $\wp'(u) = 4\wp(u)^3 - \wp(u) + \frac{1}{4}$ ist. Es ist zu beachten, daß die Seiten nicht rationale Funktionen von u selbst sind. Ganzzahlige Lösungen sind z. B. $a = b = c = 1$; $a = 15$, $b = 13$, $c = 12$; $a = 308$, $b = 277$, $c = 35$; $a = 482143$, $b = 587783$, $c = 610584$.

CONRAD. MAHRENHOLZ. MICHNIK. NITSCHE.

Literatur. Diese Zeitschr. XXI, S. 197, Aufg. 437. — Nyt Tidskrift for Math., Afd. A, Jahrg. VIII, S. 82, Aufg. 264. — Mathesis IX, S. 229; XXXVI, S. 330; XXXIX, S. 310. — Neuberg, Bibliographie des triangles spéciaux, S. 41.

MAHRENHOLZ.

890. Eine Schar allgemeiner Kreisevolventen sei durch die Gleichungen $x = (r + t)\cos\varphi + r\varphi\sin\varphi$, $y = (r + t)\sin\varphi - r\varphi\cos\varphi$ gegeben, wo r den

Radius des Grundkreises, t den Abstand des erzeugenden Punktes von der sich wälzenden Kreistangente und φ den Wälzungswinkel bedeutet. Es soll der Ort der (reellen) Wendepunkte festgestellt werden. (1925, Heft 5, Hoffmann-Ravensburg.)

Lösung. Als Bedingung für die Wendepunkte erhält man: $y''x' - y'x'' = r^2\varphi^2 - t(r-t) = 0$, $\varphi = \frac{1}{r}\sqrt{t(r-t)}$, reell für $0 < t < r$. Die Gleichung des Ortes der Wendepunkte ergibt sich durch Elimination von t aus der letzten und den gegebenen Gleichungen zu $x^2 + y^2 + 2r^2 - 3r\left(x\cos\frac{W}{3r^2} + y\sin\frac{W}{3r^2}\right) = 0$, worin $W = \sqrt{(x^2+y^2-r^2)(4r^2-x^2-y^2)}$ ist. Führt man Polarkoordinaten ϱ, θ ein: $x = \varrho\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, so erhält man die Gleichung in der Form $\varrho^2 - 3r\varrho\cos\left(\theta - \frac{1}{3r^2}\sqrt{(\varrho^2-r^2)(4r^2-\varrho^2)}\right) + 2r^2 = 0$; es ist also $r \leqq \varrho \leqq 2r$. In expliziter Form lautet die letzte Gleichung: $\theta = \frac{1}{3r^2}\sqrt{(\varrho^2-r^2)(4r^2-\varrho^2)} + \arccos\frac{1}{3r\varrho}(\varrho^2+2r^2)$. Die weitere Untersuchung ergibt, daß der Ort in $(r; 0)$ einen singulären Punkt (Spitze, wie die Kreisevolvente für $t = 0$) und in $(2r; 0)$ einen Scheitel hat.

Brehm. Bücking. Conrad. Diez. Hoffmann. Klobasa. Mahrenholz. Münst. Nitsche. Stiegler.

891. Zieht man in den drei äußeren Berührungskreisen eines Dreiecks die Halbmesser nach den Berührungspunkten der zugehörigen Seiten und verlängert sie über den Berührungspunkt bis sie den Umfang *des* Kreises schneiden, welcher durch die Endpunkte jener Seite und den Mittelpunkt des einbeschriebenen Kreises geht, so ist die Verlängerung gleich dem Halbmesser des einbeschriebenen Kreises. (1925, Heft 5, Ruff-Wien.)

Lösung. Der Kreis durch B, C und O geht auch durch O_1. Bezeichnet man die Verlängerung des Radius ϱ_a mit x, so ergibt sich sofort (z. B. nach dem Sehnensatz) $x \cdot \varrho_a = (s-b)(s-c)$, demnach $x = \varrho$.

Brehm. Bücking. Conrad. Diez. Götze. Hoffmann. Janzen. Kasper. Klobasa. Lohnes. Mahrenholz. Mertens. Müller. Münst. Rall.

Man vgl. van Swinden-Jacobi, Elemente der Geometrie. Satz 539, S. 238 im Anhange zum 5., 6. und 7. Buche. Ruff.

B. Neue Aufgaben.

945. In welchem Abstand sind die Endpunkte einer Kette von gegebener Länge $2b$ auf einer horizontalen Geraden anzubringen, wenn die von der Kettenlinie und der Geraden begrenzte Fläche ein Maximum sein soll?

Michnik-Beuthen.

946. Ein schwerer Punkt fällt infolge der Erdanziehung eine gekrümmte Bahn hinab. Für seine Geschwindigkeit $\left(\frac{ds}{dt}\right)$ und den zurückgelegten Weg (s) wird unterwegs überall die Beziehung gefunden: $b\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + gs^2 - 2bgs = 0$, wo g die Maßzahl der Erdbeschleunigung, b eine beliebige positive Konstante ist. Was für eine Kurve ist die Bahn?

Jonas-Altenessen.

947. Es ist $s = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \cdots \frac{1}{(m-1)(m+1)} = \frac{m(3m-1)-2}{4m(m+1)}$.
Für $m = \infty$ ist $s = \frac{3}{4}$.

JACOB-Elsterwerda.

948. Ein Punkt bewegt sich so, daß die drei Mittel seiner Koordinaten pythagoräische Zahlen sind. Welche Kurve beschreibt der Punkt?

RUFF-Wien.

Briefkasten zum Aufgaben-Repertorium.

Bis zum 8. März gingen an Lösungen ein: Brehm-Tilsit 911. 919—921. 939. 940. Conrad-Moers 904—909. 914. 916. 917. 919—923. 930. Fix-Berlin/Schöneberg 944. Lohnes-Offenbach 928. Mahrenholz-Kottbus 937—940. Michnik-Beuthen 924. 933. Münst-Ebingen 925—929. 931. 933. 934. 936. 938. Rall-Mergentheim 911. 929—931. 938—940. Ruff-Wien 928. 931. Sassmannshausen-Gernsheim 931. Schick-Riedlingen 929. 931. 932. Sós-Budapest 936. 944. O. Wangerin-Rostock 925. 927. 928. Weimershaus-Tönning 939—942. 944.

Neue Aufgaben sandten ein: a) mit Lösung: Böger-Hamburg (8), Epstein-Frankfurt a. M. (2), Klobasa-Troppau (2), Mahrenholz-Kottbus (2), Münst-Ebingen (1), Rall-Mergentheim (1); b) ohne Lösung: Michnik-Beuthen (1).

Herrn S. in G. Die Formel für $\operatorname{tg}(n\alpha)$ findet sich z. B. in Hammer, Trigonometrie, 4. Aufl., S. 225, (Stuttgart, Metzler). — Herrn S. in R. Lösungen 920—924 sind nicht eingegangen.

Ich bitte, die Manuskripte nur *einseitig* zu beschreiben.

Berichte.

Aus der Forschung.

Atomarer Magnetismus. (Mit 5 Figuren im Text.) Das Verhalten eines Körpers gegen magnetische Kräfte muß durch besondere Eigenschaften seiner Atome bedingt sein. Die Ampèresche Theorie des Magnetismus übertrug die magnetischen Eigenschaften einer von einem elektrischen Strom durchflossenen Drahtschleife auf die Moleküle mit der Annahme, daß innerhalb derselben elektrische Kreisströme vorhanden seien. Solche Molekularströme bilden aber auch heute die Grundlage der modernen Theorie der Atome. Innerhalb des Atoms sollen sich Elektronen auf geschlossenen Bahnen um einen positiven Kern bewegen. Wie sich die Wirkung eines Stabmagnetes auf einen entfernten magnetischen Einheitspol durch die Größe des magnetischen Moments (d. i. Polstärke des Magnetes mal Abstand seiner beiden Pole) darstellen läßt, so muß man einem geschlossenen ebenen Strom i (elektromagnetisch gemessen), welcher eine Fläche f umfließt, für die gleiche Wirkung das äquivalente magnetische Moment $m = i \cdot f$ zuordnen. Entsprechend muß man dann auch den einzelnen Elektronenbahnen des Atoms ein magnetisches Moment zuschreiben. Ein äußeres Magnetfeld wird auf die Bahnen der Elektronen eine Deformation ausüben. Darauf beruht der Diamagnetismus. Wenn nämlich die Elektronenbahnen so angeordnet sind, daß ihre einzelnen magnetischen Momente in der Gesamtwirkung sich aufheben, so wird das Atom an sich unmagnetisch sein und nur diamagnetisch auf das äußere Feld reagieren. Nun können sich aber auch die einzelnen Momente zu einem Gesamtmoment des Atoms zusammensetzen; dann ist das Atom paramagnetisch und das äußere Feld wird richtende Kräfte auf das ganze Atom ausüben. Als letzte Möglichkeit kann eine Deformation der Elektronenbahnen durch das äußere Magnetfeld eintreten, so daß die ursprüngliche Kompensation der Einzel-

momente vernichtet und das Atom magnetisch wird. Dann bekommt das Atom ein induziertes magnetisches Moment.

Betrachten wir zunächst als einfachsten Fall ein freies Wasserstoffatom. Es besteht aus einem Massenkern mit einer positiven elektrischen Ladung und einem im Abstande a um denselben rotierenden Elektron. Mechanisch stellt dieses Atom einen Rotator dar, dessen Impulsmoment J (d. i. das Moment der Bewegungsgröße in bezug auf den Mittelpunkt des Kreises) sich aus der Masse des umlaufenden Elektrons μ, dem Bahnradius a und der Winkelgeschwindigkeit ω berechnet zu

$$J = \mu \omega a^2. \tag{1}$$

Das rotierende Elektron erzeugt einen Kreisstrom, dessen magnetisches Moment sich als Produkt aus der elektromagnetisch gemessenen Elektronenmenge ε mal Umlaufszahl pro Sekunde mal umflossener Fläche ergibt zu

$$m = \varepsilon \cdot \frac{\omega}{2\pi} \cdot \pi a^2 = \frac{1}{2} \varepsilon \omega a^2. \tag{2}$$

Zwischen beiden Größen besteht also die Beziehung

$$m = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon}{\mu} J. \tag{3}$$

Nun fordert die Quantentheorie für das mechanische Impulsmoment ganzzahlige Vielfache von $\frac{h}{2\pi}$, also die Werte $\frac{h}{2\pi}, \frac{2h}{2\pi}, \cdots, \frac{k \cdot h}{2\pi}$, wo h die Planksche Konstante des Wirkungsquantums ist. Ein „einquantiges“ Atom mit $J = \frac{h}{2\pi}$ hat daher das magnetische Elementarmoment oder das „*Bohrsche Magneton*“ vom Betrage

$$m = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon}{\mu} \frac{h}{2\pi} = 9{,}21 \cdot 10^{-21} \text{ Gauß} \cdot \text{cm}^3, \tag{4}$$

wenn man $\frac{\varepsilon}{\mu} = 1{,}77 \cdot 10^{+7}$ und $h = 6{,}53 \cdot 10^{-27}$ einsetzt. In diesem Ausdruck kommen nur universelle Größen vor, er ist unabhängig von der Kernladung und dem Bahnradius des Elektrons. Das Wasserstoffatom ist der einfachste Fall eines einquantigen Atoms. Hier steht der Vektor des Impulsmomentes senkrecht zur Bahnebene des Elektrons und ebenso der des magnetischen Moments. Höhere Atome enthalten mehr Elektronen und jedem einzelnen kommt ein gleiches magnetisches Moment zu. Da aber der Umlaufssinn in den Bahnen entgegengesetzt sein kann, außerdem diese Bahnen gegeneinander geneigt sein können, so braucht das höhere Atom insgesamt doch nicht mehr als ein Magneton zu enthalten, das dem Vektor des Gesamtimpulsmomentes parallel ist. Atome mit gerader Elektronenzahl zeigen nach Versuchen nach außen kein magnetisches Moment; bei ihnen scheinen also die Elektronen stets paarweise in entgegengesetztem Sinne umzulaufen. Kommt weiter einem Atom kein Magneton zu, so muß zugleich sein Impulsmoment Null sein. Unverständlich bleibt in dieser Erklärung des atomaren Magnetismus die Existenzmöglichkeit der Kreisströme; dieser Mangel muß aber mit der modernen Quantentheorie hingenommen werden.

Es ist ganz interessant noch kurz die Stärke des atomaren magnetischen Kraftfeldes zu betrachten. Da es nur auf eine Abschätzung der Größenordnung ankommt, soll mit den vereinfachten Annahmen von Kreisbahnen gerechnet werden.

Für das Wasserstoffatom beträgt die Feldstärke H im Mittelpunkt der Kreisbahn nach dem Biot-Savartschen Gesetz

$$H = \frac{2\pi i}{r} = \frac{2\pi \varepsilon \cdot \frac{\omega}{2\pi}}{a_H}.$$

Da nach Gleichung (2) $\varepsilon \cdot \omega = \frac{2m}{a_H^2}$ und nach (4) $m = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon}{\mu}\frac{h}{2\pi}$, ist

$$H = \frac{2m}{a_H^3} = \frac{\varepsilon h}{2\pi\mu} \cdot \frac{1}{a_H^3}, \tag{5}$$

wo $a_H = 0{,}53 \cdot 10^{-8}$ cm ist.

Ganz allgemein gilt für ein Element mit der Ordnungszahl z und für die Bahn mit der Hauptquantenzahl n und der azimutalen Quantenzahl k

$$H = \frac{\varepsilon h}{2\pi\mu a_H^3} \cdot \frac{z^3}{n^3 k^2} = 1{,}23 \cdot 10^5 \cdot \frac{z^3}{n^3 k^2} \text{ Gauß.} \tag{6}$$

Danach ist im Mittelpunkt der (1,1) Bahn, der sogenannten k-Schale, für das Wasseratom die Feldstärke von der Größenordnung 10^5 Gauß, für Neon ($z = 10$) etwa 10^8 und für Uran ($z = 92$) nahezu 10^{11} Gauß!

Der Abfall des atomaren Magnetfeldes längs einer Senkrechten zur Bahnebene im Mittelpunkt berechnet sich aus

$$H = \frac{2m}{r^3} = \frac{2 \cdot 9{,}21 \cdot 10^3}{r^3} \text{ Gauß,}$$

wenn r in Å. E. gemessen wird. Für die k-Schale des Wasserstoffatoms hat dann in einem Abstand von 2 Å. E. die Feldstärke nur noch den Betrag von 2000 Gauß. Die Feldstärke fällt also von innen nach außen mit der Entfernung sehr schnell ab.

Betrachten wir nun das Verhalten eines freien Atoms in einem äußeren homogenen magnetischen Felde. Die Quantentheorie nach Sommerfeld zeigt, daß nur ganz bestimmte räumliche Lagen in bezug auf die Richtung des äußeren Magnetfeldes für den Vektor des magnetischen Moments möglich sind. Für das einquantige Atom kann sich das magnetische Moment nur in die Richtung der Kraftlinien parallel oder antiparallel einstellen. Ein n-quantiges Atom, d. i. ein Atom mit n Magnetonen, kann $2n$ Lagen einnehmen. Solche Atome stellen sich so ein, daß die in die Feldrichtung fallende Momentkomponente stets ein ganzzahliges Vielfaches eines Magnetons ist. Ihre Achsen haben daher mit der Feldrichtung die Neigungen $\cos\varphi = \pm \frac{n'}{n}$ $(n' = 1, 2, 3, \ldots, n)$ und die Bewegung des Atommagneten besteht in einer gleichförmigen Präzession der Momentenachse um die Feldrichtung als Achse. Bei einem Atom mit $n = 3$ würden sich (Fig. 1) die nebenstehenden Möglichkeiten ergeben. Außer der parallelen und antiparallelen Lage mit der Achse $\pm 3m$ in der Feldrichtung treten noch zwei Lagen unter $\cos\varphi = \frac{2}{3}$ und $\cos\varphi = \frac{1}{3}$ auf, so daß die in die Feldrichtung fallende Komponente $\pm 2m$

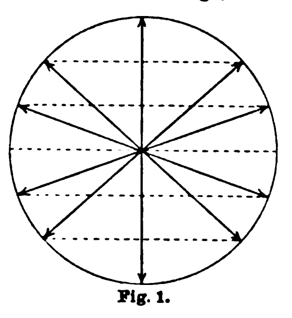


Fig. 1.

und $\pm 1m$ beträgt. Nach der klassischen Theorie dagegen wären unendlich viele Lagen gegen die Richtung des Feldes möglich. Ein eingeschaltetes äußeres Feld würde auch eine Präzessionsbewegung der Atommagneten um die Feldrichtung hervorrufen, *ohne* aber dabei den ursprünglichen Winkel gegen die Feldrichtung für das einzelne Atom zu ändern.

Bringt man das freie Atom in ein inhomogenes Feld, so tritt außer der richtenden Wirkung noch eine bewegende Kraft auf. Auf einen einquantigen Atommagneten mit dem Moment m beträgt die Kraft

$$K = m \frac{\partial H}{\partial s}, \tag{7}$$

wenn $\frac{\partial H}{\partial s}$ die Inhomogenität des Feldes bedeutet, deren Richtung mit der Feldrichtung übereinstimmen soll. (Für die höherquantigen Atome tritt noch der Faktor $\cos \varphi = \cos (m, H)$ hinzu.) Läßt man einen Strahl von einquantigen

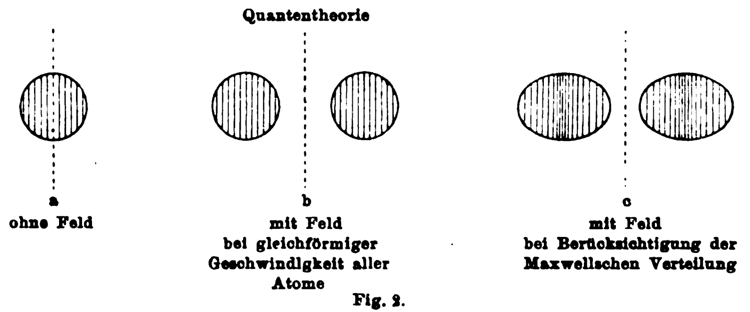


Fig. 2.

Atomen durch ein solches inhomogenes Magnetfeld gehen, so muß dieser entsprechend der nur möglichen parallelen und antiparallelen Einstellung der Atome nach der Quantentheorie in zwei Strahlen, in einen angezogenen und einen abgestoßenen, aufgespaltet werden, deren Abstand gegen die ursprüngliche Lage gleich groß sein muß (Fig. 2, a u. b).

In einem realisierbaren Atomstrahl kommen aber die Atome mit allen möglichen Geschwindigkeiten nach dem Maxwellschen Verteilungsgesetz vor, daher

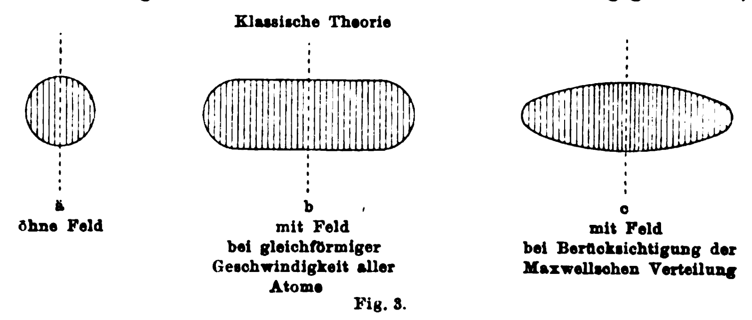


Fig. 3.

wird außer der Ablenkung noch eine Verbreiterung der beiden aufgespaltenen Strahlen eintreten (Fig. 2c). Nach der klassischen Theorie würde ein solcher Atomstrahl entsprechend allen möglichen Einstellungsrichtungen bei gleicher Geschwindigkeit aller Atome nur eine Verbreiterung erfahren (Fig. 3).

Infolge der Maxwellschen Geschwindigkeitsverteilung würde sich in der Mitte eine größere Dichte zeigen.

Zur Prüfung dieser Überlegungen haben O. Stern und W. Gerlach[1]) grundlegende und bedeutsame Versuche angestellt.

In einem kleinen Ofen O (Fig. 4) wird durch elektrische Heizung das Metall, dessen Atome untersucht werden sollen, geschmolzen und verdampft. Der aus der Ofenöffnung O' austretende Atomstrahl wird durch die Blendenspalte S_1 und S_2 begrenzt, läuft durch das Magnetfeld zwischen den Polschuhen S und M und wird

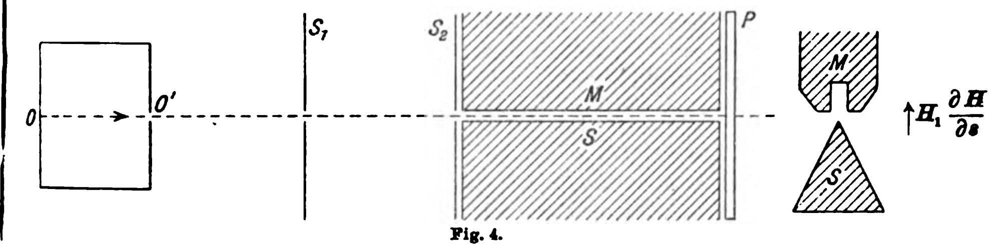


Fig. 4.

von der gekühlten Platte P aufgefangen. Die ganze Anordnung sitzt in einem hochevakuierten Gefäß. Das inhomogene Magnetfeld wird durch eine einige Zentimeter lange Schneide S eines Elektromagneten und durch den gegenüberliegenden Pol M mit einer Furche von der in der Figur im Querschnitt gezeichneten Gestalt gebildet. Der Atomstrahl verläuft also senkrecht zur Richtung der Kraftlinien und parallel der Schneide S.

Nach Gleichung (7) wirkt auf das Atom mit dem Moment m und der Masse μ die Kraft k, durch welche das Atom die Beschleunigung

$$b = \frac{k}{\mu} = \frac{m}{\mu} \cdot \frac{\partial H}{\partial s} \tag{8}$$

erfährt. Die Geschwindigkeit des Atoms beträgt $v = \frac{l}{t}$, wo l die Entfernung zwischen der Blende S_2 und der Auffangplatte P ist. Dann erfährt das Atom auf seinem Fluge durch das inhomogene Magnetfeld eine Ablenkung von seiner Bahn im Betrage von

$$s = \frac{1}{2} b t^2 = \frac{1}{2} b \frac{l^2}{v^2} = \frac{1}{2} \frac{m}{\mu} \frac{\partial H}{\partial s} \cdot \frac{l^2}{v^2}. \tag{9}$$

Aus dieser Gleichung läßt sich der Wert m berechnen, sobald die Inhomogenität des Feldes und die Fluggeschwindigkeit bekannt sind. Die Inhomogenität wurde durch die elektrische Widerstandsänderung eines kleinen Wismutdrahtes ermittelt. Die Geschwindigkeit kann aus der kinetischen Gastheorie nach der Beziehung

$$\frac{1}{2} \mu v^2 = \frac{3}{2} k T,$$

wo k die Boltzmannsche Konstante und T die absolute Temperatur des Ofens O ist, zu

$$v = \sqrt{\frac{3kT}{\mu}}$$

1) O. Stern und W. Gerlach, Ann. d. Phys. 74, 673. 1924. W. Gerlach, Ann. d. Phys. 76, 163. 1925.

berechnet werden. Diese Formel der Geschwindigkeit hat aber O. Stern[1]) nach einer ähnlichen Methode wie sie für fliegende Geschosse angewandt wird, auch experimentell geprüft und dabei den Zahlenfaktor unter der Wurzel zu 4 gefunden. Setzt man den Mittelwert zwischen Theorie und Experiment ein, so ist

$$s = \frac{1}{2} m \frac{\partial H}{\partial s} \cdot \frac{l^2}{3{,}5\, k\, T}. \tag{10}$$

Im allgemeinen Fall sind unter m die möglichen magnetischen Komponenten des Atoms in der Feldrichtung zu verstehen.

Die ersten Versuche wurden an Silberatomen ausgeführt. Das Ergebnis war eine Ablenkung des Strahles und eine Aufspaltung in zwei Teile (Fig. 5), welche in entgegengesetzter Richtung abgelenkt waren. Die unsymmetrische Form der Niederschläge ist durch die zur Schneide zunehmende Stärke der Inhomogenität bedingt; an der Schneide kommen die langsamen, angezogenen Atome bis zu dieser selbst hin. Die verwendete Feldstärke betrug etwa 10000 Gauß und die Inhomogenität $\frac{\partial H}{\partial s}$ etwa 100000—200000 Gauß pro cm. Die Größe der Ablenkung war 0,1—0,25 mm. Daraus berechnet sich das magnetische Moment des einzelnen Silberatoms zu $9{,}2 \cdot 10^{-21}$ mit einer Unsicherheit von $5\,^0/_0$, also zu dem Wert des oben angegebenen Bohrschen Magnetons. *Das Experiment entscheidet also eindeutig für die Quantentheorie des Atommagnetismus.* Die Aufspaltung in zwei Strahlen gibt den Nachweis, daß im Magnetfeld für Ag nur die parallele und antiparallele Einstellung der Atomachsen vorkommt.

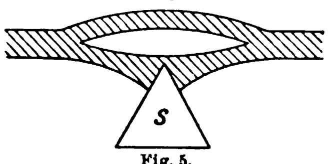


Fig. 5.

Weitere Untersuchungen ergaben: Die Atome der ersten Reihe im periodischen System K, Cu, Ag, Au haben das gleiche magnetische Moment von *einem* Bohrschen Magneton. Aus der zweiten Reihe zeigen Zn, Cd, Hg das Moment Null, wie auch aus der vierten Reihe Sn und Pb. In der dritten Reihe weist Thallium den Wert von $\frac{1}{3}$ Magneton auf. Beim Nickel tritt außer den beiden abgelenkten Strahlen noch ein unabgelenkter auf, so daß außer der parallelen und antiparallelen Einstellung noch eine solche senkrecht zur Feldrichtung vorhanden sein muß, auf welche das äußere Feld keinen Einfluß ausübt, das Nickelatom enthält nach den Messungen zwei Magnetone.

Bei der weiteren Entwicklung der Quantentheorie hat sich jedoch herausgestellt, daß die oben gegebene Modelldarstellung und Theorie nach Sommerfeld nicht alle Erscheinungen auf andern Gebieten erfaßt. Besonders die Bestimmung der atomaren magnetischen Momente aus dem Zeemanneffekt zeigte, daß man aus den spektroskopischen Messungen nur die Momentkomponente des Atoms in Richtung des Feldes ermitteln kann, welche allein bestimmend für die Größe der Termaufspaltung ist. Um die Ergebnisse der Atomstrahlversuche mit denjenigen des Zeemanneffekts in Einklang zu bringen, muß man die Stern-Gerlachschen Werte auch als Momentkomponenten deuten. So hat z. B. Silber, wie alle Alkalien, als optischen Grundzustand den s_1-Term der Dubletts, welchem als magnetische Momentkomponente der Wert ± 1 Magneton in Über-

1) O. Stern, Zeitschr. f. Phys. 2, 49. (1920.)

einstimmung mit den Atomstrahlergebnissen zukommt. Für Thallium ist der Grundzustand ein p_1-Term des Dublettsystems, dem der Landésche Termaufspaltungsfaktor $g = \pm \frac{1}{3}$ zugehört und damit eine magnetische Komponente von $\pm \frac{1}{3}$ Magneton wie bei Stern-Gerlach. Die moderne Quantentheorie hat aus theoretischen Erwägungen die anschauliche Modellvorstellung verlassen, außerdem schreibt sie nach Uhlenbek und Goudsmit[1]) dem Elektron neben seiner konstanten elektrischen Ladung auch ein konstantes magnetisches Moment durch die Annahme zu, daß das Elektron mit konstanter Geschwindigkeit in sich selbst rotiert; dem Atomkern soll vielleicht auch ein magnetisches Moment zukommen. Die endgültige Fassung der Probleme ist bis heute noch nicht gelungen. — Wie auch die Erklärungen sich im einzelnen gestalten mögen, *die Stern-Gerlachschen Versuche haben die grundlegende experimentelle Entscheidung zugunsten der Quantentheorie gegeben.*

Die Atomstrahlmethode dürfte, wie O. Stern[2]) kürzlich dargelegt hat, zur Lösung einer großen Zahl von Problemen geeignet sein. Die Methode ist jetzt auf das gründlichste verfeinert und verbessert worden. Haben doch F. Knauer und O. Stern[3]) am Wassermolekül ein magnetisches Moment vom Betrage $\frac{1}{1845}$ Bohrsches Magneton nachweisen können und dieses als das Moment der um das Sauerstoffion umlaufenden Wasserstoffkerne gedeutet. Von derselben Größenordnung muß auch das theoretisch angenommene magnetische Moment der Atomkerne sein; darüber sind aber noch keine Versuche mit Erfolg gelungen.

Ganz kurz sei zum Schluß noch auf die ältere, 1913 zusammenfassend dargestellte Methode von P. Weiß hingewiesen. Er übertrug die Langevinsche Theorie für paramagnetische Gase auf ferromagnetische und paramagnetische feste und flüssige Körper. Aus den experimentell gefundenen Werten für die Suszeptibilität (definiert als Magnetisierung der Volumeinheit = magnetisches Moment geteilt durch magnetisierende Feldstärke) zeigte er, daß sich die magnetischen Momente aller Stoffe pro 1 Mol gerechnet mit Annäherung als ganzzahlige Vielfache einer Einheit von 1123 darstellen lassen. Dieser Wert heißt das *Weißsche Magneton.* Berechnet man durch Multiplikation mit der Avogadroschen Zahl $6{,}06 \cdot 10^{23}$ den Wert für das Bohrsche Magneton pro Mol, so erhält man 5593 absolute Einheiten. Das Weißsche Magneton ist also bis auf $1\,^0/_0$ genau gleich dem fünften Teil des Bohrschen Magnetons. Allerlei Annahmen sind von Pauli, Epstein, Sommerfeld u. a. gemacht worden, um eine theoretische Begründung für diesen Zusammenhang zu geben. Aber auch hier wartet noch vieles auf endgültige Lösung.

Hamburg. LUDWIG MÜLLER.

Organisation, Verfügungen.

Vom mathematischen Unterricht in England. Im Herbst 1926 hatte ich mit einigen Kollegen meiner Anstalt Gelegenheit, auf einer pädagogischen Studienreise eine größere Anzahl englischer Schulen zu besuchen. Dem Entgegenkommen des *Board of Education* und des *London County Council* verdankten wir die Erlaubnis zum Besuch einer größeren Anzahl von höheren

1) Uhlenbek und Goudsmit, Naturwissenschaften 1925. S. 954.
2) O. Stern, Zeitschr. f. Phys. 39, 751. 1926.
3) F. Knauer und Stern, Zeitschr. f. Phys. 39, 780 1926.

Schulen in London, der Liebenswürdigkeit einiger Kollegen auch die Möglichkeit zum Besuche einiger der großen *Public Schools*, die dem Board nicht unterstehen. Sehr dankbar müssen wir für die ausführlichen Besprechungen sein, die wir mit Herren der Unterrichtsbehörden, ich nenne ganz besonders die Herren Fletcher, Carson, Nunn, mit den Leitern und zahlreichen Lehrern der von uns besuchten Schulen hatten; auch der vielen kleinen Gespräche mit den *boys*, die gar nicht selten in deutscher Sprache möglich waren, möchte ich gedenken. Das gewonnene Bild wurde durch einen Besuch in Cambridge abgerundet, wo die überaus freundliche Aufnahme in *Peterhouse College* in unser aller dankbarster Erinnerung bleiben wird. Fügen wir noch hinzu, daß die gastliche Unterkunft in der *Teachers Guild* nicht nur unser wohnliches Standquartier in London war, sondern mit ihrer Bücherei uns auch manchen pädagogischen Ratschlag gab. So müssen wir vielen Stellen dankbar sein, daß es uns möglich war, die kurze Dauer unseres Aufenthaltes ganz für unsere Zwecke auszuwerten.

Es war natürlich trotz größter Zeitausnützung keineswegs erreichbar, ein einigermaßen abgerundetes Bild von dem höheren Schulwesen Englands zu erhalten. Es konnte sich nur darum handeln, einen allgemeinen Eindruck zu gewinnen, Einzelzüge aufzunehmen, ohne Anspruch auf Allgemeingültigkeit oder gar Vollständigkeit. Den Leser der nachfolgenden Zeilen, der einen umfassenden Überblick — allerdings aus der Vorkriegszeit — haben will, bitte ich, den als drittes Beiheft dieser Zeitschrift erschienen IMUK-Bericht: G. Wolff, Der mathematische Unterricht an den höheren Schulen Englands (Leipzig 1915, B. G. Teubner), zu rate zu ziehen.

Der erste allgemeine Eindruck, den man beim Besuche englischer höherer Schulen empfängt, ist der, daß alles, aber auch alles ganz anders ist als bei uns. Die Schüler treten im allgemeinen mit 12 bis 14 Jahren in die höhere Schule ein, gebrauchen dann etwa 4 Jahre bis zur Ablegung des Universitätseintrittsexamens (*Senior School Examination*), das danach, ganz roh betrachtet, zeitlich (aber keineswegs dem Unterrichtsstoff nach) etwa unserer Obersekundareife entspricht. Dann erfolgt eine starke Spezialisierung in *advanced courses*, in denen sich die Schüler, freilich nur ganz wenige, die noch auf der Schule geblieben sind, etwa bis zum Ende des 18. Lebensjahres auf irgendeine *Scholarship Examination* vorbereiten, nach deren Erledigung sie dann auf die Universität gehen, in irgendeines der *Colleges* von Cambridge oder Oxford oder etwa auf die Universität London.

Wir dürfen nun keineswegs erwarten, einen dem unseren ähnlichen stufenweisen Aufbau von Klassen oder wohl gar einen für die englischen höheren Schulen verbindlichen, nach Klassen fortschreitenden Lehrplan und eine allgemeine Stundentafel anzutreffen. Wir haben vielmehr ein Nebeneinander von Kursen, in denen zwar noch die Jahresklassen als Kern erkennbar sind, bei denen aber ganze Fächergruppen ganz unabhängig voneinander fortschreiten. Am ehesten dürfte ein Vergleich mit dem System von Kern und Kursen einen Begriff von den Verhältnissen geben. Nun ist aber obendrein dieser Kursaufbau an den verschiedenen Schulen ganz verschieden. Zwei ungefähr gleich alte *public schools*, Rugby, das 1567 gegründet wurde, und Harrow, daß 1571 entstand, haben ganz verschiedene Organisation und beide so verwickelt, daß es außerordentlich schwer hält, sie auch nur einigermaßen zu durchschauen.

Übrigens sind die Verhältnisse in den Londoner *County Council*-Schulen einfacher als in diesen sehr selbständigen großen *public schools*. Also Zerfaserung des Klassensystems in Kurse, Verzahnung zwischen höherer Schule und Hochschule durch die Spezialistenabteilungen nach abgelegtem Universitätsexamen.

Auch in dem Schulgebäude tritt die Klassengemeinschaft zurück (dafür überwiegen „Haus“gemeinschaften, Sportgemeinschaften u. dgl.). Die Schüler gehen zum Unterricht fast durchweg zum Lehrer, der zumeist seinen eigenen Unterrichtsraum hat; es geht also nicht, wie bei uns, der Lehrer zu den Schülern in deren Klasse. So hat der Mathematiklehrer Gelegenheit, in seinem Unterrichtsraum alle ihm nötig erscheinenden Hilfsmittel, die Zeichengeräte, Modelle, aber auch die Literatur, die Schulbücher usf., bereit zu halten. Manchmal schmücken, wie ich es in Harrow sah, Bilder der Mathematiker die Wände, am schwarzen Brett werden allerlei Hinweise auf aktuelle mathematische Dinge gegeben usf.

Der Stundenplan — übrigens ein Kunstwerk bei diesem Nebeneinander verschiedener Kurse — ist so eingerichtet, daß in den großen Städten die Externatschulen erst um 9 oder (in London) $^1/_2$10 Uhr beginnen. Der Lunch wird zwischen 1 und 2 Uhr von fast allen Schülern in der Schule eingenommen (wir haben uns des öfteren selbst überzeugen können, daß die großen Kücheneinrichtungen der Schulen für reichliches, gutes und preiswertes Essen Sorge tragen), dann geht der Unterricht bis 4 oder 5 Uhr weiter. Sonnabend ist ganz, Mittwoch nachmittags unterrichtsfrei bzw. für körperliche Übungen auf den weiten Sportflächen, die jeder Schule zur Verfügung stehen, frei gehalten. In den Internaten beginnt der Unterricht schon etwa um $^1/_2$8 Uhr, so daß der Nachmittag vom eigentlichen Unterricht frei bleiben kann. Die Disziplin der Jungen ist vielleicht ein wenig lockerer als bei uns — wie ein *Harrow-boy* mit einem Finger zum Gruß an seinen breiten, flachen, mit einem Gummiband am Kopfe gehaltenen Strohhut oder ein *Eton-boy* an seinen Zylinder tippt, wirkt für uns etwas komisch — aber doch nicht so wesensverschieden, wie manche Berichte besagen, zumal in den Londoner Schulen.

Über die Unterrichtsmethode zu urteilen, ist ganz außerordentlich schwer. Ich habe wohl 20 verschiedene Mathematiklehrer in ihrem Unterricht gesehen, möchte aber keinesfalls meine Beobachtungen verallgemeinert wissen. Es gibt eben hier gar keine Einheitlichkeit. Das liegt einmal an der Lehrerausbildung, in der, von Ansätzen, wie im *Day Training College* der Londoner Universität, abgesehen, die pädagogische Note fast ganz fehlt. Es liegt weiter an der großen Freiheit, die man dem Lehrer läßt, wenn er nur sein Ziel erreicht, d. h. die genügend große Anzahl von Schülern durch die Prüfung bringt. Ein Kollege fragte mich einmal, warum wir denn in Deutschland nicht die gleiche Freiheit in Stoff und Methode hätten. Ich erzählte ihm vom Einfluß des Direktors, des Oberschulrats, des Ministerialrats und der „Richtlinien“. Ja, sagte er lächelnd, „die Pyramide!“ Die haben wir, fuhr er fort, auch bei uns; aber sie dürfen nur berichten, zu bestimmen haben sie nichts! In der Tat hat die oberste Unterrichtsbehörde, das *Board of Education*, von unserm Standpunkt aus gesprochen, außerordentlich geringen Einfluß auf die ganze Organisation und die Methode der Schulen. Wenn sie trotzdem etwas erreichen will und seit ihrem kurzen Bestehen bereits erreicht hat, so ist das nur in sehr zurückhaltender, in überaus taktvoller Weise vorgehender Art möglich.

Die alte Doziermethode ist noch immer, wenn auch selten, anzutreffen. Ich habe eine Mathematikstunde mit angehört, in der der Lehrer nur dozierte und von den Schülern kein einziger auch nur ein Wort sprach. Sehr häufig ist die stille Beschäftigung — wie wir es nennen. Die Schüler lösen Aufgaben in geteilter Front; der Lehrer geht von Schüler zu Schüler. Die Aufgaben sind dem Lehrbuch entnommen oder hektographiert vom Lehrer ausgeteilt. Solche stille Beschäftigung ist besonders dann üblich, wenn gleichzeitig mehrere Gruppen Unterricht haben. Diese sechs Schüler lösen eine Aufgabe im Anschluß an den Ptolemäischen Lehrsatz, jene sind mit Anwendungen der Trigonometrie auf Nautik beschäftigt, andere treiben Infinitesimalrechnung. Jene zwei arbeiten nach einem Buch über analytische Geometrie. Der Lehrer setzt sich bald zu dieser, bald zu jener Gruppe. Dieses Verfahren hängt eng mit dem *Daltonsystem* zusammen, bei dem der Schüler eine größere, mehrere Wochen erfordernde Lehraufgabe erhält und sich nun nur dann an den Lehrer wendet, wenn er ihn nötig hat. Dieses Daltonsystem, das man gern in England zu studieren pflegt — ich habe schon seinerzeit in Holland begeisternde Lobsprüche darüber gehört — ist allerdings, wie man mir sagte, zur Zeit an keiner englischen Schule ganz rein durchgeführt; aber eine starke Hinneigung dazu ist an verschiedenen Stellen deutlich erkennbar.

Auch der Frage-Antwort-Methode begegnet man in England, wenn auch, wie mir scheint, in der bis vor kurzem bei uns beherrschend ausgebildeten Weise recht selten.

Der Arbeitsunterricht im Gaudigschen Sinne in der Form des Schülerwechselgespräches ist wenig oder gar nicht in den höheren Schulen Englands bekannt. Mir will auch scheinen, daß die Methode der stillen Selbstbeschäftigung, die ja auch unter unseren Begriff der Arbeitsschule fällt, fruchtbarer ist, freilich nicht als alleinseligmachende Methode und in allen Fällen. Natürlich spricht auch die Klassenfrequenz mit, die in England erheblich geringer ist als bei uns.

Das Interesse an didaktischen Fragen scheint noch immer recht gering in England zu sein. Die Bücher von Brandford (*A Study of Mathematical Education*, 2. Ed. Oxford, Clarendon Press, 1921; von der ersten Auflage haben R. Schimmack und H. Weinreich eine bei B. G. Teubner erschienene deutsche Bearbeitung herausgegeben) und G. St. L. Carson (*Essays on Mathematical Education*, London, Ginn, 1913) sind nicht systematisch und übrigens mehr auf die allgemeine Methode als auf die spezielle Didaktik gerichtet. Den ersten, und soviel ich sehe, vereinzelt gebliebenen Vorstoß machte der jetzige verdienstvolle Leiter des *Daily Training College*, P. Percy Nunn, mit seinem Buche *The Teaching of Algebra*, London, Longmans, 1914. Man darf aber wohl nicht außer acht lassen, daß die umfangreiche didaktische Literatur der Vereinigten Staaten auch in England greifbar ist.

Bei der Behandlung des Stoffes fällt in der Geometrie noch immer die starke Anlehnung an Euklid auf. Man weiß offenbar in allen englischen höheren Schulen sofort, welcher Satz bei I, 43 im Euklid steht, während es in Deutschland wahrscheinlich keiner unserer Tertianer wissen würde. Dabei kommen allerdings für das erste Universitätsexamen als für alle verbindlich nur recht geringe Kenntnisse in Betracht, etwa die ersten drei Bücher von Euklid, also die Planimetrie unter Ausschluß der Ähnlichkeitslehre. Auf der anderen Seite

sieht man die Schüler in den Spezialistenkursen, die dann vielleicht 15 Wochenstunden Mathematik haben, Dinge treiben, an die man bei uns erst in den ersten Studiensemestern denkt: Infinitesimalrechnung bis hin zu den Differentialgleichungen, analytische Geometrie bis hin zu den homogenen Koordinaten, dazu recht tüchtig theoretische Mechanik, Statik ebenso wie Dynamik. Die Aufgaben, die z. B. *Trinity College* und *King's College* in Cambridge für eine *Scholarship Examination* stellen, sind in der reinen wie in der angewandten Mathematik so, daß sie einem unserer Mathematikstudenten im dritten Semester noch arges Kopfzerbrechen machen können.

Bei der Art der Examensorganisation (schriftliche Prüfung durch Komissionen der Hochschulen und Beurteilung der Schüler ohne Heranziehung der Schule und ihrer Lehrer) ist es nur zu sehr begreiflich, daß der mathematische Unterricht sehr stark auf Aufgabendrill eingestellt ist. Im Aufgabenlösen übt sich die Klasse in der für alle gemeinsamen Vorbereitung auf das erste Universitätsexamen, Aufgabe nach Aufgabe löst der vorgeschrittene Schüler. „Ich will eine *scholarship* von *Johns College* haben", sagte mir ein *boy*. „Sie lösen ja da die Aufgaben vom letzten Examen für *Trinity College?*" „Ja, die sind schwerer als die von *Johns College;* aber wenn ich die von *Trinity* lösen kann, hoffe ich die von *Johns* erst recht lösen zu können."

In der Aufgabenwahl überwiegt durchaus die theoretische und abstrakte Einstellung. Praktische Anwendungen, Wirklichkeitsaufgaben, wie wir sie jetzt in großer Zahl bei uns pflegen, treten ganz zurück. Allerdings befreundet man sich mehr und mehr mit einem anschaulichen propädeutischen Kurs der Geometrie und andererseits kommt in andern Fächern die Anwendung zu ihrem Recht.

Sphärische Trigonometrie, die doch bei uns an allen Schulen verbindlich ist, trifft man allerdings sehr selten an. Darstellende Geometrie tritt gleichfalls zurück; nur an mehr technischen Schulen habe ich sie gefunden, dann aber ganz in praktischer Einstellung auf Werkzeichnungen. Mit zum Bereich der Mathematik wird die Mechanik gerechnet, allerdings eine theoretisch aufgemachte, nicht empirisch begründete Wissenschaft.

Ich möchte aber doch ausdrücklich der Meinung entgegentreten, als käme neben der Theorie die praktische Seite in England zu kurz. Überall beobachtet man eine kräftige Betonung der praktischen Schülerübungen in Physik, Chemie und übrigens auch Biologie, daneben oft Handfertigkeitsunterricht, zumindest für Holzarbeiten, oft auch für Metallarbeit. Und daß bei solchem praktischen Arbeiten auch für die rechnerischen und zeichnerischen Methoden der angewandten Mathematik dies und das abfällt, ist sicher.

In der stofflichen Kleinarbeit des Mathematikunterrichts fällt dieses und jenes auf. Zunächst die Bezeichnungsweise: Eine Nachwirkung der zahlreichen, immer wieder methodisch durchgearbeiteten Euklidausgaben ist die Verfeinerung der symbolischen Schreibweise. Man sollte z. B. auch bei uns an die in England allgemeine Benutzung des Zeichens $\therefore$ für folglich denken. Als Multiplikationszeichnen ist noch immer das alte, von Ougthred eingeführte gebräuchlich, das bei uns auf die Volksschulen beschränkt ist, das Andreaskreuz. Das Divisionszeichen ist $\div$, eine Proportion pflegt man in der Form $a:b::c:d$ zu schreiben.

Als Winkelmesser sieht man neben dem rechteckigen Protraktor mehr und

mehr auch Halbkreise, zumeist mit dem Mittelpunkt am unteren Rande des Instrumentes. Im übrigen ist bei Schüler wie bei Lehrer die Faustskizze überwiegend. Manch ein Lehrer greift erst zum Lederhandschuh, ehe er die Kreide in die Hand nimmt. Auch der allgemein getragene Talar, selbst wenn er noch so zerfetzt ist, tut zur Schonung der Kleidung vor Kreide und Staub das seine.

Ein Wort noch über die Schulbücher. Die Schule ist in ihrer Wahl vollkommen frei. Im allgemeinen stellt die Schule selbst die Bücher den Schülern zur Verfügung. Die Zahl der Werke und ihrer Ausgaben ist unübersehbar. Wenn man, das ist das einfachste, in eines der Antiquariate von *Charing Cross Road* in London geht, kann man Riesenstapel mathematischer Schulbücher durchsehen. Der zu Anfang erwähnte Bericht von Wolff gibt eine große Anzahl von Titeln an. Im *Board of Education* nannte mir Herr Carson als besonders stark verbreitet (doch mit der Bemerkung: *These are books used in many schools. The fact that we name them does not, therefore, mean that we think them the best books*):

Für Arithmetik und Algebra: Godfrey and Siddons (*Elementary Algebra*, 2 Vol. Cambridge, University Press), Borchardt (London, Rivingtons), Hall and Knights *School Algebra* (Macmillan & Co, London).

Für Geometrie: Godfrey and Siddons (Cambridge, University Press), Borchardt (London, Bell & Sons), Hall and Stevens (London, Macmillan & Co.), Durell, *Concise Geometry („a new book, which is being more and more used")*.

Für Rechnen: Palmer, Durell und Loney. *(„These represent the three main types, of which Loney is the oldest and Durell the newest.")*

Elementare Infinitesimalrechnung: Brewster (Oxford Press), Fawdry and Durell. Auch der zweite Band von Godfrey and Siddons enthält die Infinitesimalrechnung.

Ich füge noch einige Bücher hinzu, die ich in dem mathematischen Unterricht, den ich besuchte, außer bereits genannten im Gebrauch sah: S. Bernard and I. M. Child, *Elements of Geometrie*, London, Macmillan & Co.; Ch. Davison, *Plane Trigonometry for secondary schools*, Cambridge, University Press; T. Thomas, *Outlines of the Calculus*, London, Mills & Boon; J. W. Mercer, *The Calculus for beginners*, Cambridge, University Press; G. W. Caunt, *Introductions to infinitesimal Calculus;* R. C. Fawdry, *Statics*, und ders., *Dynamics*, Part I, London, Bell & Co.

Ich fragte einmal, als ich vor nunmehr 14 Jahren zum erstenmal in England war, einen englischen Ministerialrat nach der Organisation des höheren Schulwesens in England. Er erwiderte mir: „Die Organisation unseres höheren Schulwesen ist die, daß keine Organisation existiert." Dieses Wort ist mir beim Besuche englischer Schulen immer und immer wieder in den Sinn gekommen. Wir dürfen keinesfalls drüben jenseits des Kanals den bei uns gebräuchlichen Maßstab anlegen. Gewiß, dieses Fehlen einer einheitlichen Schulorganisation bedeutet für die Allgemeinheit und für die Allseitigkeit der Bildung (wobei wir gar nicht den übertriebenen Maßstab von Johannes Schulze anzulegen brauchen) eine Minderung des wissenschaftlichen Niveaus, aber sie bedeutet eine Stärkung der individuellen und spezialisierten Leistung des Einzelnen. Und dieses Fehlen allgemeinverbindlicher „Richtlinien" für die Methode, wie sie geschriebene Verfügungen ebensogut geben können wie festgefügte pädagogische

Ausbildungsnormen mit nachfolgenden Prüfungen bedeutet, zwar ein offensichtliches Defizit in der allgemeinen methodischen Durchbildung der Lehrerschaft, daneben aber doch auch die Möglichkeit einer kraftvollen Wirksamkeit starker, in voller Freiheit handelnder Lehrerpersönlichkeiten.

Göttingen. W. LIETZMANN.

Bücherbesprechungen.

Die Preise der besprochenen Bücher sind nach den Mitteilungen der Verlagsanstalten im Erscheinungsmonat angegeben. Da die Buchhandlungen sich Änderungen vorbehalten, kann keine Sicherheit dafür geboten werden, daß die angegebenen Preise auch heute noch gelten.

B. Bavink, Oberstufe der Physik. Nach A. Höflers Naturlehre für die höheren Lehranstalten in fünf Auflagen bearbeitet von Friedr. Poske †. In sechster, vollständig neu bearbeiteter Ausgabe. Mit einem Anhang über Astronomie und mathematische Erdkunde. 434 S. Mit 440 Abbildungen und 6 Tafeln. Braunschweig 1926, Friedr. Vieweg & Sohn A.-G. Geb. *RM* 5.20.

Schon rein äußerlich ist die neue Form des Lehrbuches gekennzeichnet: der Umfang hat sich um 75 Seiten vermehrt. In einem längeren Vorwort begründet der neue Bearbeiter, warum er eine gründliche Umgestaltung für notwendig hielt. Wir lesen da u. a. folgende, den Geist des neuen Buches wohl charakterisierende Äußerungen: „Die Unterrichtsreform einerseits, der Fortschritt der Wissenschaft andererseits haben eine so gänzlich neue Lage geschaffen, daß nur eine völlige Neubearbeitung zum Ziele führen konnte. Die erstere hat zunächst allen Anstalten die längst ersehnte Infinitesimalrechnung gebracht ... Dieses Lehrbuch stellt wohl zum ersten Male konsequent auch die Schulphysik auf den Boden der Infinitesimalrechnung ... Die infinitesimale Methode erleichtert in Wahrheit das Eindringen auch in die physikalischen Zusammenhänge außerordentlich ... Ganz besonders auffällig zeigt sich das bei dem Kapitel ‚Harmonische Bewegungen‘. Der an sich denkbar einfache Zusammenhang der Sinusformel mit dem Hookeschen Elastizitätsgesetz wird in der ‚elementaren‘ Darstellung mit dem gänzlich überflüssigen und durchaus nicht zur Sache gehörenden Umweg über das Kugelpendel belastet ... Die Unterrichtsreform hat aber auch in anderen Hinsichten auf dieses Buch bestimmend eingewirkt. Sie hat in dankenswerter Weise dem physikalischen Unterricht zwei große Ziele gesteckt: die Einsicht in die Wege, auf denen die Forschung voranschreitet, und in das physikalische Weltbild, das sie erarbeitet hat. Wenn sie uns die Zeit noch dazu beschert hätte, die nötig ist, um dieses Ziel zu erreichen, so wäre sie noch mehr zu loben (vom Ref. gesperrt)... An einen ausgiebigen Arbeitsunterricht (Schülerübungen) ... wird außer an den Oberrealschulen nur an wenigen Anstalten zu denken sein ... Die Mehrzahl der Fachkollegen wird es doch wohl mit mir vorziehen, lieber auf die Schülerübungen zu verzichten, als das wesentliche Ziel, das Verständnis des physikalischen Weltbildes von heute, zu gefährden ... Da insonderheit unsere Jungen sowieso dazu neigen, in der Physik weiter nichts als eine Anleitung zum Experimentieren oder ein Mittel zum Zwecke der Technik zu sehen, so sollte das Lehrbuch sie darin nicht noch bestärken, sondern ihnen zu Gemüte führen, daß Physik Wissenschaft, d. h. gedankliche Beherrschung der Wirklichkeit ist, und daß das Bewundernswerteste an der heutigen Physik eben nicht der Rundfunk oder der Dieselmotor, aber auch nicht die Methode der einzelnen Experimentaluntersuchung, sondern jene tiefsten Erkenntnisse und Problemstellungen sind, welche sich an die Namen Maxwell, Lorentz, Einstein, Rutherford, Planck, Bohr usw. anknüpfen ... Daß der Lehrer überhaupt eine Auswahl treffen muß und nicht alles hier Gebotene erledigen kann, ist selbstverständlich ... Ausführlich berücksichtigt ist insbesondere alles, was für den Aufbau des heutigen Systems der physikalischen Erkenntnis grundlegende Bedeutung besitzt ... Der Schwerpunkt des Buches liegt, wie man leicht sehen wird, in den letzten Kapiteln. Ich hoffe, sie werden zeigen, daß diese Dinge dem Schulunterricht keineswegs unzugänglich sind ... Daß die Elektrizitätslehre eine völlige Neugestaltung erfahren müsse, war auch Poskes mir ausdrücklich ausgesprochene Ansicht ...“

Unverkennbar hat das Buch den großen Vorzug, aus einem Gusse heraus dargestellt zu sein. Man fühlt überall die lange und kritische Gedankenarbeit hindurch, welche der Verfasser aufgewandt hat, Begriffe und Zusammenhänge in rechter Klarheit zu erfassen und wiederzugeben. Die eingestreuten historischen Bemerkungen legen in gleicher Richtung Zeugnis ab; um die Erfolge und Aufklärungen, welche die neue Physik gebracht hat, recht zu würdigen, sind Rückblicke in die geschichtliche Entwicklung unumgänglich. Auf der ganzen Linie ist der Inhalt des Buches dabei auf den neuesten Stand der Wissenschaft gebracht; schon in der allgemeinen Mechanik tritt uns das z. B. in der Definition der Beschleunigung als eines Zusatzvektors entgegen. Modernen Anschauungen Rechnung tragend, ist auch das Lehrbuch in zwei Bücher: „Physik der Materie" und „Physik des Äthers" unterteilt. Überall, wo Gesetze, die man bisher im allgemeinen in Schullehrbüchern nicht besonders zu betonen pflegte, bei modernen wissenschaftlichen Erfolgen und Weiterführungen der Physik eine Anwendung haben oder sonstwie von Bedeutung sind, werden diese schon im systematischen Lehrgang nachdrücklich hervorgehoben; das gilt z. B. für den Impulssatz, das klassische Relativitätsprinzip der Mechanik, das Dopplersche Prinzip u. a. m. Wie der Verfasser selbst sagt, will er den Schwerpunkt des Buches gerade in der Darstellung dieser neuesten Arbeitsgebiete der Physik sehen. In der Tat finden wir hier den Inhalt so weit an die modernsten Untersuchungen der Wissenschaft herangeführt, wie wohl bisher noch in überhaupt keinem Lehrbuche. Werden neben Perrinschen Zählungen, der Polarfronttheorie von Bjerknes, dem Wienerschen Versuch, der Radioaktivität in vollem Umfange u. a. m., doch sogar auch der Compton-Effekt und die durchdringende Raumstrahlung behandelt. Der Relativitätstheorie ist eine eingehendere Darstellung gewidmet. — Kann sich an gewissen Stellen der Mechanik auch das Gefühl aufdrängen, daß die Gefahr der Mathematisierung mindestens gestreift wird, so tritt diese in den späteren Kapiteln erfreulich zurück. Im übrigen scheut sich der Verfasser nicht, die Differentialgleichungen für die gedämpfte Schwingung und die Planetenbewegung anzusetzen, ohne allerdings letztere zu integrieren. Sogar partielle Differentialquotienten werden nicht vermieden, die Maxwellschen Grundgleichungen in dieser Form angeschrieben.

So bietet das Buch in gedrängter Form eine ungeheure Stoffmenge. Würde eine spätere Zeit einmal den Versuch machen, nach dem Inhalte dieser „Oberstufe der Physik" auf die Lage des Physikunterrichtes nach der Schulreform Schlüsse zu ziehen, so könnte das Urteil nur sein — im ausgesprochenen Gegensatz zur Wahrheit —, daß dieser Unterricht einen außerordentlich hohen Stand eingenommen haben müsse. Ich habe für den Verfasser nach der Richtung hin volles Verständnis, ihm nachzufühlen, wie freudig, sein Innerstes tief aufwühlend, die kühnen und erfolgreichen Vorstöße der modernen Physik in unentschleierte Gebiete der Natur ihn bewegt haben, und wie er nun den Drang hat, auch seine Schüler an diesen Erlebnissen seines Erkenntnisdranges teilnehmen zu lassen. Aber wenn ich mir die auch schon zahlreichen Jahrgänge meiner Schüler vorstelle, denen ich die Elemente der Physik vermittelt habe, so muß ich doch fragen: Ist es im Schulunterricht überhaupt möglich, die Schüler bis zum einsichtsvollen Verständnis und zum inneren Miterleben der meisten der modernen Probleme zu führen? Gewiß wird das hin und wieder bei dem einen oder anderen ungewöhnlich begabten und zugleich physikalisch interessierten Schüler der Fall sein; aber ebenso gewiß ist es meiner Überzeugung nach verlorene Liebesmüh, an die Allgemeinheit unserer Primen etwa das Problem des Compton-Effektes herantragen zu wollen. Ich bezweifle auch, daß es möglich ist — und halte es aus diesem Grunde auch für geradezu schädlich —, im normalen Unterricht z. B. die Einsteinsche Relativitätstheorie behandeln zu wollen. Habe ich doch sogar bei einer ganzen Reihe sogenannter allgemeinverständlicher Darstellungen dieser Lehre die Überzeugung gehabt, daß nicht einmal deren Verfasser die Einsteinschen Gedankengänge richtig erfaßt hatten. Meiner Meinung nach sollen wir im Physikunterricht auf der Schule alles vermeiden, was nicht durchaus verstanden wird, d. h. was vom Schüler, sei es durch Anleitung des Vortragsunterrichtes oder durch den praktischen Übungsunterricht innerlich völlig verarbeitet wird. Alles andere muß nur verwirrend wirken. Dabei kann es sich stets im wesentlichen nur um konkrete Anschauungen handeln; der Schüler, auch der Primen, pflegt mathematisch noch keineswegs so weit durch-

gebildet und erfahren zu sein, daß mathematische Formeln von ihm in ihren Konsequenzen genügend übersehen werden und für ihn daher einen tieferen Erkenntniswert haben. Die Schüler gerade hierzu anzuleiten, halte ich für eine wesentliche Aufgabe der Schule; deshalb sollte die mathematische Betrachtung im Physikunterricht auch nicht vermieden, aber stets doch nur mit Vorsicht gehandhabt werden. Den Problemen der modernsten Physik, z. B. der Quantenlehre und der Relativitätstheorie, fehlt aber zugestandenermaßen die Anschaulichkeit in weitgehendem Maße; sie sind wesentlich mathematisch-formaler Natur und gehören deshalb nicht auf die Schule. Werden sie aber doch behandelt, so kann sich der Unterricht auf kaum mehr als dogmatische Mitteilungen beschränken; und dann sind wir wieder im alten „Lernunterricht“, den wir doch wohl alle möglichst vermeiden möchten. Ich meine auch, daß erfolgreiche Lehrer der Physik — ich denke dabei z. B. an Grimsehl — die Schüler nicht dadurch zu fesseln wußten, daß sie die „Wissenschaftlichkeit“ der Physik betonten, sondern daß sie gerade an den unseren Knaben angeborenen Spiel-, Forschungs- und Tätigkeitstrieb anknüpften und sie von da aus durch langsam gesteigerte Anforderungen in der Problemstellung allmählich in das Gebiet strengerer Wissenschaftlichkeit einführten, dabei aber niemals den Boden der Anschaulichkeit verließen. Und Grimsehl hätte meiner Meinung nach niemals versucht, einer Klasse die Gesetze der Quantenlehre und den Compton-Effekt vorzutragen. Nach meiner Auffassung gehören diese Dinge daher auch in ein Lehrbuch für die Schule nicht hinein. Ein solches sollte überhaupt nicht wesentlich mehr enthalten, als im Unterricht durchgenommen werden kann; je enger der Schüler im Lehrbuche das wiederfindet, was er im Unterricht gehört hat, desto eher überwindet er die — schon durch den Zeitmangel bestimmte — Scheu, das Lehrbuch in die Hand zu nehmen und es zur Wiederholung und Einprägung des Stoffes zu verwenden. Und das ist doch eigentlich die Aufgabe eines Lehrbuches. Schon früher hörte ich die bezeichnende Klage, daß im „Poske“ viel zu viel darin stände und daß er schwer verständlich sei. Eine Beschränkung an Stoff, dafür aber vielleicht eine breitere Ausführung, hätte ich daher an Stelle der gegenwärtigen Stoffvermehrung lieber gesehen.

Alles in allem: der neue Bavink-Poske ist zweifellos ein gutes Lehrbuch der Physik und wohl das modernste, das gegenwärtig existiert; daß es bei unserer beschränkten Unterrichtszeit das geeignete Buch für den Schulunterricht ist, bezweifele ich.

Einige Kleinigkeiten: R. J. Strutt (seit 1919 Lord Rayleigh) ist meines Wissens kein „Geologe“, sondern, wie sein Vater, Physiker; die ältesten Formationen sind nach der radioaktiven Methode (der zuverlässigen Bleimethode) nicht $^1/_2$ Milliarde, sondern 1,6 Milliarden Jahre alt; H. A. Compton ist kein englischer Physiker, sondern nordamerikanischer; die Farblehre Ostwalds, mit ihrem Schwarz-Weiß-Gehalt, wird von Fachphysikern mit gutem Grunde heftig angegriffen.

Hamburg. W. Hillers.

K. Grelling, Mengenlehre. 48 S. Math.-Phys. Bibl. Nr. 58, Leipzig 1924, B. G. Teubner. Kart. *RM* 1.20.

Eine Einführung in die Mengenlehre zu schreiben, die auf 48 Seiten einen wirklichen Einblick in das Wesen, die Ergebnisse und die Methoden dieses heute grundlegenden Teiles der Mathematik geben soll, ist ein ganz besonders schwieriges Unternehmen. Denn sie setzt nach den Worten des Verfassers zwar keinerlei besondere mathematische Kenntnisse voraus, stellt aber um so höhere Anforderungen an das Abstraktionsvermögen des Lesers. Das gilt insbesondere für die vielleicht doch nicht immer ganz glücklich gewählten Beweisbeispiele, die dieser ganz gründlich durchdenken muß. Andererseits zeigt das Bändchen in seinen übrigen Teilen, daß man sehr wohl auch einem Primaner etwas von der Mengenlehre erzählen kann.

Vaihingen a. F. K. Fladt.

A. Schülke, Vierstellige Logarithmentafeln nebst Hilfstafeln für das praktische Rechnen. 15. verb. Aufl. (130.—149. Tausend). Ausgabe B mit Anhang: mathematische Formeln. Leipzig 1926, B. G. Teubner. *RM* 2.—.

Tafeln für den Schulgebrauch sollen notwendige und hinreichende Genauigkeit haben, scharf und übersichtlich angeordnet sein, so daß rasch gerechnet werden kann. Beide Bedingungen hat der erfolgreiche Vorkämpfer der vierstelligen Tafeln in immer steigendem Maße verwirklicht. Kommt dazu wie im vorliegenden Falle die Reichhaltigkeit des Tafelinhalts, die der wirklichkeitsnahe Unterricht der Gegenwart erfordert, und wie in Ausgabe B die notwendige und hinreichende Formelsammlung, die der Schüler mit dankbarem Schmunzeln begrüßt, so umfaßt so eine Tafel wirklich alle Machtmittel, mit denen die Mathematik das Leben beherrscht.

Vaihingen a. F. K. Fladt.

P. Kirchberger, Einstellbare Sternkarte für die Beobachtung von Fixsternen und Wandelsternen. *RM* 7.50. Dazu Erläuterungen und Tafeln für das Jahr 1926. *RM* —.50. Lehrmittelverlag Federn, Berlin 1926.

Es gibt eine große Anzahl von Sternkarten, die mit einem beweglichen Ausschnitt den Sternenhimmel für Tag und Stunde einzustellen gestatten. Die vorliegende Karte geht darüber hinaus, indem sie auch die Stellung von Sonne, Mond, Venus, Mars, Jupiter und Saturn angibt. Das Prinzip ist überraschend einfach. Die Sternkarte trägt aus Zelluloid den Ekliptikkreis, der mit einer Gradeinteilung und einer Datumseinteilung versehen ist. Die Sonne kann man nun dem Zelluloidstreifen einfach aufsetzen. Die Planeten sind verschiebbar auf kleinen Klämmerchen angebracht; für ihre Stellung an jedem Tage des Jahres geben die Erläuterungen die Gradzahl auf der Ekliptik und den Abstand von der Ekliptik nach innen oder außen an — diesem Abstand entsprechend werden die Planeten auf ihren Klämmerchen verschoben.

Man kann — ganz abgesehen von der Orientierung am Himmel — gerade über die Planetenbewegung außerordentlich viel aus dieser Karte lernen. Zunächst wird schon überraschen, wie wenig sich doch die Planeten von der Ekliptik entfernen. Das Pendeln der Venus um den Stand der Sonne wird etwa das nächste sein, dann das Studium der Rückläufigkeit der Planeten, die Gestalt der Knoten usf.

Ein paar Ratschläge für die Ausführung: Die Planeten sind zu klein, nicht beweglich genug. Man sollte die verschiedenen Planetenscheibchen voneinander deutlicher unterscheiden. Und dann gebe man ein paar Planeten zur Reserve mit — was macht man sonst, wenn man einen verliert?

Ich möchte die Karte für den Unterricht in der Himmelskunde aufs wärmste empfehlen; sie kann den Schülern die Augen öffnen für die Planetenbewegungen — und darin versagten, soweit mir bekannt, die bisher üblichen Sternkarten.

Göttingen. W. Lietzmann.

L. Pallat, Werkarbeit für Schule und Leben. 228 S. Breslau 1926, Hirt. Geb. *RM* 7.50.

Der mit 28 Bildtafeln geschmückte Band vereinigt die auf einer „Pädagogischen Woche“ in Nürnberg gehaltenen Vorträge. Der Stoff umfaßt die Schulgattungen vom Kindergarten bis zur höheren Schule und zur Berufsschule, berücksichtigt auch die Ausbildung der Werklehrer; sie berührt die Mehrzahl der Unterrichtsfächer, so aus der uns hier angehenden Fachgruppe Mathematik, Physik, Biologie, Erdkunde, und gibt so einen recht guten Gesamtüberblick über das weite Gebiet. Der Vortrag über die Beziehungen zwischen Werkarbeit und Mathematik hat J. Sauer-Köln, der über physikalische Werkarbeit in der höheren Schule P. Johannesson zum Verfasser. Beider Ausführungen sind anregend, die des ersten etwas optimistischer, die des zweiten etwas pessimistischer gefärbt. Ich hätte gewünscht, daß auf die Angabe weitergehender Literatur Wert gelegt würde; Sauer bringt nur einige, Johannesson keine Zitate. Ein Hauptzweck solcher in erster Linie erste An-

regung gebender Arbeiten ist doch der Hinweis auf Stellen, die der Weiterarbeit dienstbar gemacht werden können.

Wieviel für unsere Fächer die Werkarbeit leisten kann, hat die überaus reichhaltige Ausstellung in Dresden, Ostern 1926, anläßlich der Hauptversammlung des „Förderungsvereins" gezeigt; wie bedeutsam die für die Ausbildung der Lehrer an höheren Schulen sich ergebenden Probleme sind, haben die Verhandlungen des gleichen Vereins auf seiner Hauptversammlung Ostern 1925 in Hannover gezeigt.

Göttingen. W. Lietzmann.

J. Franck und P. Jordan, Anregung von Quantensprüngen durch Stöße. Bd. III der Sammlung: Struktur der Materie in Einzeldarstellungen, herausgegeben von M. Born-Göttingen und J. Franck-Göttingen. 312 S. Mit 51 Abbildungen. Berlin 1926, Julius Springer. Geh. *RM* 19.50, geb. *RM* 21.—.

Kaum eine andere experimentelle Tatsache ist für die Grundvorstellung der Bohrschen Theorie, daß ein Atom in verschiedenen Zuständen mit endlichen Energiestufen existieren kann, von so gewichtiger Bedeutung gewesen wie die Entdeckung von J. Franck und G. Hertz, daß man durch Elektronenstöße diese verschiedenen Energiestufen anzuregen und dadurch sogar unmittelbar die Werte der Energieunterschiede scharf zu messen imstande ist. In den wenigen Jahren seit dieser Entdeckung ist das Elektronenstoßverfahren der Anregung zu einem vollständigen Zweige der praktischen und theoretischen Physik ausgebaut worden, und zahlreiche Untersuchungen haben viele Einzelergebnisse geliefert. Das alles wird dankenswerterweise in dem Buche behandelt, geordnet und kritisch gesichtet. In ihm findet sich somit ein wesentlicher Teil der modernsten physikalischen Erfolge und Probleme vereinigt.

Hamburg. Wilh. Hillers.

K. Hahn, Grundriß der Physik. Verkürzte Ausgabe für Knaben- und Mädchenschulen gymnasialer Richtung. I. Teil: Vorbereitender Kursus. In zwei Ausgaben: A mit, B ohne den Anhang „Grundzüge der Chemie" von Prof. Dr. E. Löwenhardt. 158 S. und 51 S. in Ausgabe A. Mit 213 Fig. und 24 Fig. in Ausgabe A. 2. Aufl. Leipzig und Berlin 1926, B. G. Teubner. Kart. *RM* 4.—. — Dass. II. Teil: Systematischer Kursus. In zwei Ausgaben: A mit, B ohne den Anhang „Astronomie". 2. Aufl. 249 S. und 286 Fig. im Text sowie 21 S. und 16 Fig. im Text im Anhang. Leipzig und Berlin 1926, B. G. Teubner. Geb. *RM* 5.20.

K. Hahn, Grundriß der Physik. Ausgabe für Knaben- und Mädchenschulen realer Richtung. I. Teil: Für Realschulen, Lyzeen und die Mittelstufe von Vollanstalten. 4. Aufl. 189 S. Mit 236 Fig. Leipzig und Berlin 1926, B. G. Teubner. Kart. *RM* 3.80. — Dass. II. Teil: Für die Oberstufe von Vollanstalten und für Fachschulen. 318 S. Mit 366 Figuren. 4. Auflage. Leipzig und Berlin 1926, B. G. Teubner. Geb. *RM* 5.80.

Auf diese neuen Auflagen und Ausgaben des rasch beliebt gewordenen „Physikalischen Unterrichtswerkes" von K. Hahn sei hingewiesen.

Hamburg. Wilh. Hillers.

A. Haas, Die Welt der Atome. Zehn gemeinverständliche Vorträge. 130 S. Mit 37 Figuren im Text und auf drei Tafeln. Berlin und Leipzig 1926, Walter de Gruyter & Co. Geh. *RM* 4.80, geb. *RM* 6.—.

Die Vorträge, welche im Sommer 1926 für Hörer aller Fakultäten in Wien gehalten wurden, geben eine allgemeinverständliche Darstellung der Errungenschaften

der modernen Atomphysik. Sie wollen auch in die wichtigsten Gedankengänge der Theorie einführen und bilden ein zusammengehöriges Ganze, in welchem sich das Folgende auf das Vorhergehende aufbaut. Die Themata sind: Materie und Elektrizität, die Bausteine der Atome, die Quanten des Lichtes, Spektren und Energiestufen, das Wasserstoffatom, die Grundstoffe, das Atom als Planetensystem, die Molekeln, die Radioaktivität, die Umwandlung der Grundstoffe. Ergänzende Anmerkungen und eine chronologische Übersicht beschließen das Heft. — Naturgemäß ist die Darstellung wesentlich mitteilend; gern wählt dabei der Verfasser die Form, die historische Entwicklung eines Stoffgebietes oder eines Begriffes zu schildern. In engem Rahmen wird auf diese Weise eine recht gute Übersicht geboten. Voraussetzung für ein volles Verständnis des Lesers ist dabei aber eine keineswegs gering anzusetzende Vertrautheit mit physikalischen Grundtatsachen, Gesetzen und Gedankengängen, wie sie etwa auf einer höheren Vollanstalt erworben werden kann. Trotzdem scheint mir aber die Gefahr vorhanden, daß der gebildete Nichtfachmann beim Studium der Schrift durch das in der knappen Form gebotene ungeheuere Material eher erdrückt als gefördert wird. Auch die dem Verfasser sonst eigene Kraft, die modernen Gedankengänge der Physik einfach und klar zu entwickeln, ihr Ringen und ihre Erfolge spannend zu schildern und den Leser mit sich fortzureißen, ist unter dem Druck dieser Stoffülle nicht recht zur Geltung gekommen.

Hamburg. W. Hillers.

Zeitschriftenschau.

The American Mathematical Monthly. — Vol. 33, Nr. 8. — F. Cajori, Origins of fourth dimension concepts. — Paradiso, A classification of second degree loci of space.

Vol. 33, Nr. 9. — S. Gandz, The origin of the term „Algebra". — F. M Weida, On the correlation between two functions. — W. B. Chadwick, Concerning the probabilty courves of n points taken at random on a straight line segment of constant length. — Bibhutibhusan Batta, Early literary evidence of the use of the zero in India. — W. E. Milne, Numerical integration of ordinary differential equations.

Mathematics Teacher. — Vol. 19, Nr. 8. — W. P. Webber, J. P. Cole, R. L. O'Quin, A few constructive phases of mathematics in life. — B. Rudman, Teaching logarithms to high school pupils in eight recitation. — W. L. Schaff, The human significance of mathematics — E V. Sadley, A pleasant approach to demonstrative geometry. — M. Stritzinger, Traveling mathematics. — W. H. Carnahan, Note on the fallacy.

Il Bolletino di Matematica. — II, 5. Jahrg., Fasc. IV. — D. Mercogliano. Sulle rette del quadrangolo completo dei quattro punti d'intersezione di due coniche. — A. Gandini, Triangoli con elementi espressi da numeri interi. — O. Franceschi, Studio della funzione z delle variabili reali x, y, definita dalla equazione $z^3 + xz + y = 0$. — G. Loria, Durante quarant'anni di insegnamento: Confessioni e ricordi.

Annalen der Physik. — IV. Folge, 81. Bd., Ergänzungsheft. — M. v. Laue, Der Einfluß der Temperatur auf die Röntgenstrahlinterferenzen. — G. Pfestorf, Die Bestimmung der optischen Konstanten von Metallen im sichtbaren und ultravioletten Teil des Spektrums. — K. Schachtschabel, Ein einfaches Verfahren zur Messung der Absorption in großem Spektralbereich nebst Anwendung auf Gläser. — E. Waetzmann, Über entoptische Ringsysteme. — E. Buchwald, Graphische Darstellung zur Kinematik des Starkeffekts. — H. Busch, Berechnung der Bahn von Kathodenstrahlen im axialsymmetrischen elektromagnetischen Felde. — W. Wien, Magnetische Ablenkung der Spektrallinien. — E. Blechschmidt, Kathodenzerstäubungsprobleme: Die Kathodenzerstäubung in Abhängigkeit von den Betriebsbedingungen. — A. v. Hippel, Kathodenzerstäubungsprobleme. Zur Theorie der Kathodenzerstäubung — G. Joos, Über Farbe und Magnetismus von Ionen. — W. Wessel, Über den Massenpunkt in der Wellenmechanik. — M. Wimmer, Über die Beeinflussung der ultraroten Kohlensäureabsorptionsbande bei 4,27 μ durch fremde Gase und ihre Anwendung zur Gasanalyse. — F. Kirchner, Über die Richtungsverteilung der von polarisierten Röntgenstrahlen ausgelösten Elektronen.

— W. Gerlach und E. Lehrer, Suszeptibilität der Gase, Curiesches Gesetz und Diamagnetismus der Flammengase. — A. Sommerfeld, Über die Ausbreitung der Wellen in der drahtlosen Telegraphie. — P. Debye, Einige Bemerkungen zur Magnetisierung bei tiefer Temperatur. — R. Pohl und E. Rupp, Über Alkalihalogenidphosphore.

82. Bd., Heft 1. — A. Weigl, Untersuchungen am Stark-Lunelundeffekt. — R. Döpel und R. v. Hirsch, Über die Polarisation des Kanalstrahllichtes. — E. Brüche, Über die Querschnittskurve des Chlorwasserstoffes gegenüber langsamen Elektronen und ihren Vergleich mit der Argonkurve. — L. A. Müller, Absorptionsspektren der Alkalihalogenide in wässeriger Lösung und im Dampf. — A. Wintner, Über gewisse Eigenschwingungen mit kontinuierlichem Spektrum. — R. Fleischer, Über die lichtelektrische Elektronenemission und das optische Absorptionsvermögen des Kaliums in Abhängigkeit vom Gasgehalt des Metalles. — M. I. Harms, Messungen über die Ergiebigkeit der Röntgenfluoreszenz. — A. Krebs, Über die Bestimmung des Brechungsexponenten aus Reflexionsmessungen im ultraroten Spektrum. — A. Skrabal, Zur Deutung des Zeitgesetzes der Bildung des Bromwasserstoffes aus seinen Elementen. — T. Engset, Die Bahnen und die Lichtstrahlung der Wasserstoffelektronen. — E. Spenke, Eine Ergänzung zur Theorie des rotationssymmetrischen Strahlungsfeldes.

Zeitschrift für Physik. — 40. Bd., 9. Heft. — W. Bothe, Die Absorption der Röntgenstrahlen vom klassischen Standpunkt. — P. Jordan, Über quantenmechanische Darstellung von Quantensprüngen. — N. R. Sen, Der Energieinhalt des elektrischen Teilchens nach den Einsteinschen modifizierten Feldgleichungen. — G. Ramsauer, Über zwei Probleme bei der Auslöschung der Jodfluoreszenz. — T. Baum, Beiträge zur Erklärung der Erscheinungen bei der Kathodenzerstäubung. — V. Bursian, Notiz zu den Grundlagen der Dispersionstheorie von E. Schrödinger. — Th. Dreisch, Die ultrarote Absorption von Farbgläsern und Salzlösungen. — H. Schmidt, Über Systeme linearer Differentialgleichungen mit zyklischer Koeffizienten-Determinante.

40. Bd., Heft 10. — J. Koenigsberger, Torsionsmodul und Zugfestigkeit bei Ein- und Vielkristalldrähten. — F. Hund, Zur Deutung der Molekelspektren. I. — D. Coster und M. J. Druyvesteyn, Über die Satelliten der Röntgendiagrammlinien. — F. Henning, Tensions- und Widerstandsthermometer im Temperaturgebiet des verflüssigten Stickstoffs und Wasserstoffs. — K. Sinjelnikoff und Anton Walther, Über die Natur der elektrischen Verluste. — T. Barth, Das Streuvermögen des Natriumfluorids für Röntgenstrahlen.

40. Bd., Heft 11/12. — P. Jordan, Über eine neue Begründung der Quantenmechanik. — K. W. Meissner, Die Serie des Argonspektrums. II. — A. Güntherschulze, Die Ventilwirkung des Silbers in wäßrigen Lösungen von Kaliumsilbercyanid. — E. Wigner, Über nicht kombinierende Terme in der neueren Quantentheorie. II. Teil. — M. S. Vallarta, Bemerkungen zu der Arbeit von Herrn G. vom Gleich: Zur Massenveränderlichkeit im Zweikörperproblem.

Physikalische Zeitschrift. — 27. Jahrg., 24. Heft. — A. Hagenbach, Die neue physikalische Anstalt der Universität Basel. — F. Seidl, Neue Beobachtungen am selbsttönenden Kristall. — H. Kohn und H. Jakob, Über das Intensitätsverhältnis der Hauptseriendubletts der Alkalimetalle. — P. Rehbinder, Über die Wärme der Schichtbildung an der Grenzfläche von Lösungen. — R. Forster, Das Raumgitter von Permalloy. — K. Przibram, Ein einfacher Vorlesungsversuch zur inneren Reibung der Gase. — K. Wolf, Nachtrag zur Arbeit „Über die Druckabhängigkeit der Dielektrizitätskonstanten einiger Gase und Dämpfe bei niederen Drucken“. — A. Smekal, Über spontane „strahlungslose“ Quantenvorgänge. — K. Lichtenecker, Die Theorie des Mischkörpers und die logarithmische Mischungsregel. — A. Smekal, Zur Molekulartheorie der Festigkeit und der Verfestigung. — H. Stintzing, Die Fehlerquellen der quantitativen chemischen Analyse durch Röntgenemissionsspektra. — C. Füchtbauer und H. Meier, Über das Intensitätsverhältnis der Hauptseriendubletts von Alkalimetallen. — P. Pringsheim, Das Absorptionsspektrum des festen Benzols bei — 180°. — F. Ehrenhaft, Das mikromagnetische Feld. — H. Ebert, Über Feuchtigkeitsmessungen. — E. Lau, Über die Intensitätsverteilung von Absorptionslinien unter Berücksichtigung der Messungen mit dem Interferometer.

28. Jahrg., 1. Heft. — K. W. F. Kohlrausch, Über die Widersprüche in den Versuchen mit RaC-γ-Strahlung. — J. Markl, Über Pechblende und Pechblendenrückstände von St. Joachimstal und deren Emanationsabgabe. — H. Lorenz, Das Turbulenzproblem für die Strömung zwischen parallel verschobenen Wänden. — O. Blüh, Untersuchung der Spannungsverhältnisse bei Adsorption und Diffusion im elektrischen Feld. — R. Bass, Über die Begrenzung der Geschwindigkeiten. — M. Neunhöffer und K. Steiner, Über ein Braunsches Elektrometer für Spannungen bis 18000 Volt. — A. E. Lindh, Bericht über die Entwicklung der Röntgenspektroskopie während der Jahre 1921—1925. I. Teil.

Zeitschrift für technische Physik. — 8. Jahrg., 1. Heft. — Cl. Schaefer und K. Ackermann, Untersuchungen über die Leistungsfähigkeit der Agfa-Farbenplatte. — K. Frey, Versuche mit rotierenden Zylindern in Verbindung mit Tragflächen. — E. Brüche, Hilfsapparate für Vakuum- und Gasarbeiten. — E. Spiller, Objektive Messung der Lichtverteilung vom Lampen. — P Lubberger, Die Wahrscheinlichkeitsrechnung in der Fernsprechtechnik. — W. Burstyn, Flamme im Winde. — W. Burstyn, Der Fächer. — W. Burstyn, Das Wasserstrahlgebläse bei den alten Deutschen. — W. Burstyn, Benedicks- und Knudsen-Effekt. — N. R. Campbell und M. V. Freeth, Schwankungen in Vakuumglühlampen. — H. Beuthe, Untersuchungen über Aufhellungslinien in Röntgenspektrogrammen an verschiedenen Kristallen. — O. Berg, Aufhellungslinien im Röntgenspektrum und deren Zusammenhang mit der Gitterstruktur.

Die Naturwissenschaften. — 17. Jahrg., 1. Heft. — F. Klein, Frankreich und die École Polytechnique in den ersten Jahrzehnten des 19. Jahrhunderts. — W. Gerlach und E. Lehrer, Über die Messung der rotatorischen Brownschen Bewegung mit Hilfe der Drehwage. — F. London, Über die Deutungsmöglichkeit der Kleinschen fünfdimensionalen Welt. — Öjvind Burrau, Berechnung des Energiewertes des Wasserstoffmolekel-Ions (H_2^+) im Normalzustand. — H. Kohn und A. Jakob, Das Intensitätsverhältnis der Hauptseriendubletts. — G. L. de Haas-Lorentz, Festes Helium. — P. R., Schwingende Uhren.

15. Jahrg., 2. Heft. — F. Klein, Frankreich und die École polytechnique in den ersten Jahrzehnten des 19. Jahrhunderts. — W. Baade und W. Pauli jr., Über den auf die Teilchen in den Kometenschweifen ausgeübten Strahlungsdruck. — Masing, Schweißen mit atomaren Wasserstoff. — B. Sch., Gesamtzahl der bisher ausgeführten Drahtlotungen im Meere. — O. Baschin, Norwegische Polarlichtforschung.

15. Jahrg., 3. Heft. — W. Noddack, Quantentheorie und Photographie. — A. Terenin, Optische Dissoziation heteropolarer Moleküle. — G. Beck, Zur Theorie des Photoeffekts.

15. Jahrg., 4. Heft. — O. Wiener †, Christian Wiener zum hundertsten Geburtstag. — A. Schack, Die Gasstrahlung vom physikalischen und technischen Standpunkt. — E. Waetzmann, Die Sprachlaute. — E. A. Hauser, Weitere Beiträge zur Röntgenoskopie des Kautschuks. — G. Stracke, Die Parallaxe des Doppelsternes 9 Argus.

Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik. Ingenieurwissenschaftliche Forschungsarbeiten. — 6. Bd., 6. Heft. — V. Blaess, Über den Massenausgleich rasch umlaufender Körper. — F. Rehbock, Projektive Aufgaben aus der darstellenden Geometrie des Strahlenraumes. — W. Tollmien, Berechnung turbulenter Ausbreitungsvorgänge. — E. Kruppa, Das Gleichgewichtsprofil einer Standseilbahn.

Das Wetter. — 43. Jahrg., 12. Heft. — Grosse, Die Temperaturabweichungen in den ersten 300 Monaten dieses Jahrhunderts und ihre Beziehung zur Stundenhäufigkeit der Windrichtungen. — H. John, Zur Technik der Drachen und Fesselballone.

Physik und Chemie. (Wien.) — 27. Jahrg., 1. Heft. — G. Jäger, E. Lecher †. — A. Lechner, Der Kreisel. — R. Beranek, Grundversuche und Schülerübungen zum Galvanismus. — K. Ippisch, Die Streintzsche Regel von der Leitungspolarität in Kristallen. — M. Prodinger, Über eine wesentliche Bedingung für die Verarbeitung physikalischer Schüleraufgaben mit dem fortlaufenden Unterrichte der Unterklassen.

Neuerscheinungen.[1])

Sammelwerke.

Sammlung Göschen. Berlin, de Gruyter. Geb. RM 1.50.
Bd. 42. M. Hoernes, Urgeschichte der Menschheit. 6. Aufl. von F. Behn. 141 S. 1926.

Mathematisch-Physikalische Bibliothek, herausgeg. von W. Lietzmann und A. Witting. Leipzig, B. G. Teubner. Kart. RM 1.20.
Bd. 72. K. Fladt, Gewöhnliche Differentialgleichungen. 67 S. 1927.

Wissenschaft und Hypothese. Leipzig, B. G. Teubner.
Bd. XXIX. H. de Vries, Die vierte Dimension. Deutsch von R. Struik. 167 S. 1926. Geb. RM 8.—.
Bd. XXX. Th. L. Haering, Über Individualität in Natur und Geisteswelt. 114 S. 1927. Geb. RM 5.80.

Mathematischer Unterricht.

M. Hauptmann, Mathematische Aufgaben aus der Technik. 111 S. Leipzig 1927, B. G. Teubner. Geb. RM 3.60.

Reinhardt-Mannheimer-Zeisberg, Mathematisches Unterrichtswerk für höhere Schulen. Frankfurt a. M., Diesterweg.
Ausg. C, Teil IV. Hch. Hofmann und M. Mannheimer, Arithmetik, sphärische Trigonometrie und analytische Geometrie für die Prima der Realgymnasien und Gymnasien. 268 S. 1926. Geb. RM 4.80.
Ausg. B, Teil V. Dass. für die Prima der höheren Mädchenschulen. 3. Aufl. 260 S. 1926, Geb. RM 4.20.

M. Zacharias und P. Meth, Vierstellige Logarithmentafeln. 43 S. Berlin 1927, de Gruyter. Geb. RM 1.50.

Naturwissenschaften.

Fr. Braun, Vom gerechten Vogelwirt. Ein kurzer Hinweis für Vogelliebhaber. 48 S. Hannover 1926, Fr. Cruses Buchhandlung Alfred Troschütz. RM 1.—.

O. D. Chwolson, Lehrbuch der Physik. 2. Aufl IV. Bd., 2. Abteilung. Das konstante Magnetfeld. Herausgeg. von C. G. Schmidt. 565 S. Braunschweig 1927, Vieweg. Geb. RM 20.50.

M. Friedrich, Experimente vom Klub der Waisen. II. Bd. Der kleine Chemiker im Haushalt. 100 S. Leipzig 1926, M. Jänecke. RM 1.55.

——, —— III. Bd. In der Werkstatt des Chemikers. 120 S. Leipzig 1926, M. Jänecke. RM 1.55.

K. Gentil, Die Optik und die optischen Instrumente. Heft 7 der Sammlung: Der Werdegang der Entdeckungen und Erfindungen, herausgegeben von F. Dannemann. 69 S. München 1927, R. Oldenbourg. Geh. RM 3.—.

R. Mecke und A. Lambertz, Leitfaden der praktischen Experimentalphysik für Vorlesung und Unterricht. 195 S. Berlin 1926, Springer. Geb. RM 10.80

H. Schonger, Auf Islands Vogelbergen. Herausgegeben von der staatlichen Stelle für Naturdenkmalpflege in Preußen. 127 S. Berlin 1927, J. Neumann-Neudamm. RM 4.—.

K. Vogtherr, Ist die Schwerkraft relativ? Kritische Betrachtungen über den Relativismus in der neuesten Physik. Karlsruhe 1926, Macklotsche Druckerei A.-G. Geh. RM 2.70.

Theod. Wulf S. J., Lehrbuch der Physik. 512 S. Freiburg i. Br. 1926, Herder. Geb. RM 15.50.

---

1) An dieser Stelle werden alle bei der Schriftleitung einlaufenden Bücher, soweit sie überhaupt den Stoffkreis der Zeitschrift berühren, angezeigt. Eine ausführliche Besprechung der unverlangt einlaufenden Bücher behält sich die Schriftleitung vor. Eine Rücksendung kann in keinem Falle erfolgen.

Die Schriftleitung.

Lustige Ecke.

50. Trugschluß. Der Teil einer Strecke ist gleich der ganze Strecke. Das Dreieck ABC werde von der Geraden GE geschnitten. D ist der Schnitt von GE mit AB, F ist der D zugeordnete vierte harmonische Punkt auf GE, CF schneidet GB in K, AE in H.

Wendet man auf $\triangle\, CFE$ den Satz von Menelaus an, so ist

$$GF = \frac{GE \cdot KF \cdot BC}{CK \cdot BE}.$$

Ebenso folgt bei Anwendung dieses Satzes auf $\triangle\, CFG$

$$EF = \frac{EG \cdot AC \cdot FH}{CH \cdot AG}.$$

Schließlich ist nach dem gleichen Satz, angewandt auf $\triangle\, GCE$,

$$\frac{DE}{DG} = \frac{BE \cdot AC}{BC \cdot AG}.$$

Da $GFED$ eine harmonische Punktreihe war, ist

$$\frac{DE}{DG} = \frac{EF}{FG}$$

oder, nachdem die Strecke eingesetzt und die Brüche gekürzt sind,

$$\frac{FH}{FK} = \frac{CH}{CK}.$$

Setzt man $FH = FK + KH$, $CH = CK + KH$ ein, dann wird

$$\frac{KH}{FK} = \frac{KH}{CK},$$

woraus

$$FK = CK$$

folgt.

Nach W. H. Cavnahan in Mathematics Teacher **19** (1926) S. 496ff.

51. Zahlenmerkwürdigkeiten. Zu den unter **41** in Heft 8 des vorigen Jahrganges erwähnten Zahlenmerkwürdigkeiten gehören als einzige noch:

$$111\,(11 + 1) = 11^3 + 1^3$$
$$147\,(14 + 7) = 14^3 + 7^3$$
$$148\,(14 + 8) = 14^3 + 8^3.$$

Braunschweig. W. Jahns.



ZEITSCHRIFT FÜR MATHEMATISCHEN UND NATURWISSENSCHAFTLICHEN UNTERRICHT ALLER SCHULGATTUNGEN

BEGRÜNDET 1869 VON J. C. V. HOFFMANN



HERAUSGEGEBEN VON

H. SCHOTTEN und W. LIETZMANN
in Halle a. S. in Göttingen

unter Mitarbeit von

W. HILLERS
in Hamburg

58. JAHRGANG. 1927 · 4. HEFT



LEIPZIG · B. G. TEUBNER · BERLIN

Inhaltsverzeichnis des 4. Heftes.

Fortsetzung auf der dritten Umschlagseite.

Vaihingers Fiktionenlehre und der mathematische Unterricht.

Von ALBERT HAAG in Nürtingen.

Neuerdings dringt Vaihingers Fiktionenlehre da und dort in den mathematischen Unterricht ein. Der entschiedenste Versuch, den ganzen mathematischen Unterricht mit der Fiktionenlehre zu durchtränken, ist die Schrift von Prof. Dr. W. Dieck: „*Der Widerspruch im Richtigen, gemeinverständliche mathematische Kritik der geltenden Logik*“ (Sterkrade 1926). Ist diese Entwicklung zu unterstützen oder zu bekämpfen?

Ohne Zweifel steckt in der Konzeption Vaihingers, soweit es sich um *Wirklichkeits*erkenntnis handelt, ein tiefer Wahrheitsgehalt, der Zukunft hat. Auch in der einfachsten Erkenntnis bleiben wir nie bei dem unmittelbar Erlebten, dem von den Sinnen unmittelbar Gegebenen stehen, sondern denken etwas hinzu, „fingieren“ etwas. Haben wir etwa einen Holzwürfel vor uns, den wir nach allen Seiten drehen, so verändern sich ununterbrochen Formen und Farben des Sinneseindrucks; aber dieser großen Mannigfaltigkeit von Gegebenem ordnen wir ein gleichbleibendes Ding, den Würfel, zu. Dieses Ding ist eine „Fiktion“, so wie jedes, auch das einfachste Naturgesetz. Wir *erleben* ja niemals ein Naturgesetz, sondern denken es jederzeit zum Erlebten, Beobachteten hinzu.

An der Zustimmung zu Vaihingers Gedanken darf uns seine Ausdrucksweise nicht hindern. Um den Gedanken recht plastisch zu machen, setzt er zu helle Lichter und zu scharfe Schatten in seine Zeichnung. So bezeichnet er das Hinzudenken von Begriffen zu dem Fluß der Gegebenheiten schon als „Fälschung“ und somit als „Widerspruch“. Außerdem nennt er es „Widerspruch gegen die Wirklichkeit“, wenn beim Einfangen eines Tatbestandes in ein Begriffsnetz von vielen Einzelheiten abgesehen wird. Es geht ja bei keiner Wissenschaft und bei keiner Erkenntnis des täglichen Lebens ohne diese „Fälschung“. Stellt z. B. der Arzt seine Diagnose, so genügt ihm bei Diphtherie die Temperatur des Kranken, der Belag im Hals und der eigenartige Geruch. Er berücksichtigt nicht, daß das Zimmer grüne Tapeten hat, daß die Uhr eben zehnmal schlägt und daß es draußen schneit. Deutlicher wird die „Fälschung“, wenn z. B. der Nationalökonom für seine Untersuchungen den Egoismus als einzige Triebfeder des menschlichen Handelns ansetzt. Aber im Grunde ist dies die gleiche Sache. Es ist nichts als eine *Näherungsmethode.* Bei noch jungen, im Entstehen begriffenen Wissenschaften sind die Näherungen grob, die Vernachlässigungen jedermann deutlich sichtbar, aber auch bei den fortgeschrittenen Wissenschaften geht es nicht ohne bewußte Beschränkung, ohne fortwährendes Absehen von zahlreichen Einzelheiten. Die Terminologie Vaihingers, die das Hinzudenken oder Vernachlässigen in der Wirklichkeitserkenntnis als „Fälschung“ oder „Widerspruch“ bezeichnet, ist vielleicht nicht ganz glücklich, aber da wir mit dem *Gedanken* einig sind, so ist das übrige reiner Streit um Worte.

Anders wird die Sachlage auf dem Gebiet der reinen *Begriffswissenschaften.* Nach Vaihinger sollen wir fortwährend mit Begriffen arbeiten, die *sich selbst* widersprechen; die reine Mathematik ist nach ihm voll solcher Begriffe, die er „echte Fiktionen" nennt.

Unsere Stellung zu dieser Lehre darf sich nun natürlich nicht danach richten, ob sie etwa einen lichten Erkenntnisoptimismus in uns rauh zerstört oder unseren Wünschen entgegenkommt. Einzig und allein die Wahrheit ist entscheidend. Wir haben also gewissenhaft zu prüfen, ob Vaihingers Argumente stichhaltig sind. Diese Aufgabe ist uns durch Diecks Buch sehr erleichtert, denn hier ist alles zusammengetragen, was die Fiktionenlehre an Beweisen für den Selbstwiderspruch der mathematischen Begriffe ausfindig machen konnte. Trotz der Fülle der Beweisstücke ist unser Ergebnis negativ: die mathematischen Begriffe sind nicht *in sich selbst widerspruchsvoll.*

Es ist natürlich nicht möglich, im Rahmen dieses Aufsatzes Dieck im einzelnen zu widerlegen; aber es kann gezeigt werden, daß seine Lehre vom inneren Widerspruch der Mathematik aus drei Fehlerquellen gespeist wird:

1. Vielfach werden mathematische Sätze auf Dinge angewandt, die eine solche Anwendung nicht zulassen, wodurch ein Widerspruch entsteht. Dies ist aber kein Widerspruch der reinen Begriffe in sich selbst, sondern nur *falsche Anwendung* der Begriffe.

2. Bei der historischen Entwicklung der Mathematik wurden manche Teile des Gebäudes etwas mangelhaft aufgeführt. Die moderne Mathematik hat aber diese schadhaften Stellen ausgebessert. Dieck beruft sich mit seinem Widerspruchsbeweis auf die alten Mathematiker, namentlich auf Leibniz. Er zitiert wohl die modernen, behauptet aber in Verkennung der Tatsachen, daß sich die moderne Mathematik mit der alten decke.

3. Er bezeichnet die Einführung neuer Begriffe ohne weiteres als Widerspruch, ohne den Nachweis zu führen, daß die neuen Begriffe sich tatsächlich nicht miteinander und mit den alten vertragen.

Wir wollen nun jeweils an einigen Beispielen zeigen, wie Dieck zu seinen falschen Schlußfolgerungen kommt.

I. Vermengung des rein Begrifflichen mit der Anwendung.

Als Beispiel wählen wir die *negativen* Zahlen, die Dieck „widersinnige Begriffe" nennt. Die Einführung negativer Zahlen kommt nach Dieck auf die Aufgabe hinaus, eine Menge so in zwei Teilmengen zu zerlegen, daß eine Teilmenge größer ist, als die Gesamtmenge. (S. 29.) Dieck hat gewiß recht, wenn er behauptet, daß diese Aufgabe unlösbar und widersinnig ist. Das liegt aber nicht am Begriff des Negativen, sondern an der falschen Anwendung des Begriffs. Dieck hätte sich das Zitat aus Gauß' Werken, das er selbst bringt, näher ansehen sollen (Gauß, Werke Band 2, S. 176): „Positive und negative Zahlen können nur da eine *Anwendung* finden, wo das Gezählte ein Entgegengesetztes hat, was mit ihm vereinigt gedacht der Vernichtung gleichzustellen ist. Genau besehen findet diese Voraussetzung nur da statt, wo nicht Substanzen (für sich denkbare Gegenstände), sondern *Relationen zwischen je zwei Gegenständen* das Gezählte sind." So ist die von Dieck zitierte Paradoxie von Arnauld $1:(-1) = (-1):1$, die Leibniz als „toleranter vera" bezeichnen

zu müssen glaubte, weil er als Realisation von Verhältnissen nur die durch ähnliche Figuren kannte, sofort gelöst, wenn die Zahlen in der Zahlenebene dargestellt werden. Dürfen wir einem Begriff inneren Widerspruch vorwerfen, weil er auf gewisse Gebiete der Wirklichkeit nicht angewandt werden kann? Da kämen wir bald so weit, zu behaupten, der Begriff „fest" sei ein innerer Widerspruch, weil Luft und Wasser nicht fest sind. Nein, Begriffsseite und Anwendungsseite müssen bei der vorliegenden Problemstellung reinlich geschieden sein. Auf die Wichtigkeit dieser Scheidung kann nie genug hingewiesen werden. Dies hat auch F. Klein in aller Deutlichkeit ausgesprochen (Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus, Berlin 1924, I, S. 238): „Man muß in jeder mathematischen Disziplin die Frage der inneren logischen Folgerichtigkeit ihres Aufbaues streng scheiden von derjenigen nach der Berechtigung irgendwelcher *Anwendungen* ihrer „axiomatisch" und sozusagen „willkürlich" hergestellten Begriffe und Sätze auf Dinge unserer äußeren oder inneren Wahrnehmung".

Analoges wie das über den Begriff der negativen Zahl Gesagte gilt von den gebrochenen, den irrationalen und den komplexen Zahlen. Alle diese Zahlen sind als reine Begriffe innerlich widerspruchslos. Für den Axiomatiker sind sie ja definiert durch eine kleine Zahl von Axiomen, die für ihre Verknüpfung (beziehungsweise Anordnung) gelten. Die Widerspruchslosigkeit der bekannten zehn Verknüpfungsaxiome ist restlos bewiesen (vgl. H. Beck, Einführung in die Axiomatik der Algebra, Berlin und Leipzig 1926, S. 177). Die Lösung des gleichen Problems für die Anordnungsaxiome wird auf dem Wege, den D. Hilbert gezeigt hat, sehr wahrscheinlich die nächste Zukunft bringen.

Dieck zitiert den Ausspruch H. Hankels (Vorlesungen über die komplexen Zahlen und ihre Funktionen, Leipzig 1867): „Als unmöglich gilt dem Mathematiker streng genommen nur das, was logisch unmöglich ist, das heißt, sich selbst widerspricht. Daß in diesem Sinne unmögliche Zahlen nicht zugelassen werden können, bedarf keines Beweises." Wenn er diesen Ausspruch mit der Bemerkung versieht: „Diese Stelle zeigt besonders deutlich, wie weit der geistreiche Hankel noch von Vaihingers Entdeckung entfernt war", so wissen wir, daß nicht bloß die mathematische Wissenschaft geschlossen hinter Hankel steht, sondern jeder Forscher, der das rein Begriffliche von der Anwendung unterscheiden kann.

Wir brauchen also nicht, wie Dieck es will, dem Schüler zu sagen, daß negative, gebrochene, irrationale und komplexe Zahlen mit inneren, nicht aus der Welt zu schaffenden Widersprüchen behaftet sind und daß wir uns eben mit diesen Widersprüchen abfinden müssen, sondern nur, daß die Begriffe der Mathematik allgemeiner sind als die Anwendungen. Bringen wir bei einer Aufgabe, in der es sich um die Zahl irgendwelcher Individuen handelt, einen Bruch heraus, so ist das kein Widerspruch in sich selbst, sondern nur ein Beweis, daß die Aufgabe unmöglich war. Handelte es sich aber um „Dividuen", so können wir das Ergebnis brauchen. Kommt bei der algebraischen Lösung einer geometrischen Aufgabe eine komplexe Zahl als Maßzahl einer Strecke heraus, so ist das Ergebnis sinnlos; wohl aber können wir negative, gebrochene, irrationale Zahlen brauchen, weil diese eine Anwendung auf Strecken zulassen. Ich wollte den Schüler sehen, der noch Lust an der Mathematik hätte, wenn ihm im Sinne Diecks auf Schritt und Tritt erklärt würde: „Was du da lernst ist zwar inner-

lich widerspruchsvoll; wir dürfen uns aber ruhig damit abfinden, weil es sich in der Praxis bewährt." Ein intelligenter Schüler würde sich nie damit zufrieden geben. Wir haben's aber als Lehrer viel leichter. Wir dürfen dem Schüler sagen, daß man in der Mathematik ein überaus scharfes Werkzeug in der Hand hat, das in sich selbst vollkommen ist, daß aber bei jeder einzelnen praktischen Anwendung untersucht werden muß, welche mathematischen Begriffe hier zulässig sind, welche nicht.

II. Falsche Auffassung einiger mathematischer Begriffe.

Wir kommen zur zweiten Fehlerquelle Diecks. Er sagt z. B. (S. 80): „Das Unendlichkleine ist eine Größe und zugleich keine Größe, ein Etwas und zugleich ein Nichts ..." Diese Auffassung deckt sich etwa mit der Leibnizschen, für den das Differential dx der Variablen x „letzter, indivisibler Bestandteil der Abszissenachse" war und für den z. B. „der von der Kurve $y = y(x)$ über der Abszissenachse begrenzte Flächeninhalt" „direkt die Summe aller einzelnen Ordinaten y" war (Klein, a. a. O. I, S. 231). Aber dieser metaphysische Standpunkt ist von der mathematischen Wissenschaft längst überwunden. (Er spukt leider immer noch häufig in der Schule; so z. B. unterscheidet A. Köhler in seinem „Methodischen Führer und Ratgeber für den mathematischen Unterricht" das Unendlichkleine als die „relative Null" von der „absoluten Null", dem wirklichen Nichts.) Nach der modernen Auffassung ist das Unendlichkleine *keine konstante*, sondern eine *veränderliche* Größe. Sie bleibt dauernd „von Null verschieden" und kann doch kleiner werden „als jede von Null verschiedene positive feste Zahl" (Rothe, Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaft 1926, S. 40). Solange die Schüler nicht auf die Eigenschaft der Veränderlichkeit hingewiesen werden, bleibt ihnen das Unendlichkleine ein mystischer, in sich widerspruchsvoller Begriff, an den sie nur mit Widerstreben herangehen. Sie werden nicht herzhafter zubeißen, wenn man ihnen auch hier sagt, daß Widersprüche in der Mathematik nichts zu bedeuten haben, weil man ihnen in ihren Heften gewöhnlich alles rot anstreicht, was einen Widerspruch enthält.

Weil für Dieck die unendlichkleinen Größen Null sind und doch von Null verschieden, so fordern diese eigenartigen Größen nach ihm eine besondere Untersuchung, welche Rechenregeln für sie gelten. Im Anschluß an die Gleichung

$$\lim_{x=1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x=1} (x+1) = 2$$

sagt er (S. 66 f.): „*Der Ausdruck* $^0/_0$ *ist an sich sinnlos, in sich widerspruchsvoll.* Dieser Quotient fordert uns doch auf, zu untersuchen, wie oft nichts in nichts enthalten ist, wievielmal so groß das eine Nichts ist als ein anderes Nichts. Über das Größenverhältnis zweier ‚Nichtse' läßt sich aus diesen Größen selber eine vernünftige Aussage nicht herleiten. Wie hilft sich nun der menschliche Verstand in dieser Zwickmühle? ... Die neuere Mathematik hat diesem an sich sinnlosen Ausdruck $^0/_0$ einen Sinn beigelegt. Dabei darf sie nicht willkürlich verfahren, sondern muß höchste Zweckmäßigkeit anstreben. *Leitstern ihres Handelns* ist dabei das *Prinzip der Permanenz der formalen Rechengesetze* ... Alle Rechengesetze sollen möglichst immer ihre Gültigkeit, alle Rechensymbole und Rechenausdrücke möglichst immer einen Sinn behalten."

Ganz anders stellt sich die moderne Mathematik zu dem Problem. Da werden keine „Nichtse" durcheinander dividiert. H. Beck sagt (a. a. O., S. 10): „Die Division durch Null ist also unmöglich oder, wenn sie möglich ist, nicht eindeutig. Hier steckt die Hauptquelle mathematischer Irrtümer". Hat man also die Funktion

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

ohne weitere Angabe, so ist die Funktion nur für die Werte $x \neq 1$ definiert, da man beim modernen Funktionsbegriff verlangt, daß jedem x ein einziger Zahlwert $f(x)$ zugeordnet sei. (Beck, Unterrichtsblätter, S. 280). Will man $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ bestimmen, so heißt das: man sucht unter den zahllosen Funktionen

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}, \quad f(1) = a \quad (a \text{ beliebig})$$

diejenige, die an der Stelle $x = 1$ stetig ist. Der gesuchte lim ist dann der in diesem Falle nötige Funktionswert $f(1)$. „Unbestimmte Ausdrücke" auswerten heißt also: Stetigmachen einer Funktion, indem man sie an einer Stelle definiert, wo sie vorher nicht definiert war. Beim Beweis der Gleichung

$$\lim_{x = 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

wird also nicht, wie Dieck annimmt, das Prinzip der größtmöglichen Permanenz der formalen Rechengesetze und Rechensymbole stillschweigend vorausgesetzt, sondern die Forderung der Stetigkeit der Funktion an der Stelle $x = 1$. Auf diese Tatsache sind die Schüler unbedingt hinzuweisen. Sie müssen wissen, daß man der Funktion

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

für $x = 1$ jeden beliebigen Wert zuteilen kann, daß aber nur der einzige Wert 2 die Funktion an der Stelle $x = 1$ stetig macht.

Die Auswertung unbestimmter Ausdrücke ist für Dieck der Ausgangspunkt zur *Differentialrechnung.* Er schließt aus $y = x^2$ für die Änderungen Δx und Δy

$$\Delta y = 2x\Delta x + \Delta x^2 \tag{1}$$

und fährt fort (S. 77): „In der Differentialrechnung lassen wir nun Δx unendlich klein werden ... Wir deuten diesen Grenzprozeß durch eine Änderung der Symbole an, indem wir Δx durch das Symbol dx ersetzen ... Indem wir nun die unendlich kleinen Größen zweiter Ordnung neben den unendlich kleinen Größen erster Ordnung vernachlässigen, geht unsere Differenzengleichung in die ‚Differentialgleichung'

$$dy = 2x dx \tag{2}$$

über." Dies wäre also bloß eine *Näherungsformel*, während wir doch von der Differentialrechnung absolut genaue Resultate verlangen. Sind aber die Ausführungen Diecks nicht als Approximationsmathematik zu deuten, so werden die dx, dx^2 und dy „Nichtse", und die Gleichung der Zuwächse geht über in

$$0 = k \cdot 0 + 0, \tag{3}$$

wo k gewiß jeden Wert, darunter natürlich auch $2x$, annehmen kann.

Diese Dinge wurden in den Unterrichtsblättern für Mathematik und Naturwissenschaft in der letzten Zeit wiederholt besprochen; ich verweise auf den Aufsatz von H. Beck, „Differential und Ableitung", S. 282ff. Dort wird betont, daß der Fehler von einer falschen Reihenfolge der Schritte herkommt; zuerst Grenzübergang, dann Quotient, statt zuerst Quotient dann Grenzübergang. Da diese Stelle der Angelpunkt für das Verständnis der Differentialrechnung ist, so muß bei der Einführung in die Differentialrechnung jeder Schüler durch die Anschauung zur klaren und deutlichen Einsicht gebracht werden, daß hier die verschiedene Reihenfolge der Operationen zu durchaus verschiedenen Resultaten führen muß. In der geometrischen Versinnlichung entspricht der Gleichung (1) die Sekante, welche zwei Kurvenpunkte P_1 und P_2 verbindet. Gleichung (2) ist eine Näherungsformel für den Fall, daß die Punkte P_1 und P_2 einander sehr nahe liegen: über die Größe des Fehlers, der dabei gemacht wird, erfahren wir dabei nichts. Faßt man den Grenzübergang nicht als Näherung auf, setzt man also $\Delta x = \Delta y = 0$, so bedeutet das geometrisch, daß man die Punkte P_1 und P_2 zusammfallen läßt: hier sieht jeder Schüler sofort ein, daß es Sekanten in jeder Richtung durch den einzigen Punkt gibt, daß also in Übereinstimmung mit Gleichung (3) der Richtungsfaktor k dieser Sekanten beliebig ist. Hätte man aber zuerst den Blick auf die Richtung von $P_1 P_2$, bzw. den Richtungsfaktor $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ gerichtet, so lange P_2 noch von P_1 getrennt war, so hätte man bemerkt, daß sich der Richtungsfaktor mit der Annäherung von P_2 gegen P_1 stetig ändert. Hat die Folge der Richtungsfaktoren für $\Delta x = 0$ einen limes (geometrisch der Richtungsfaktor der Tangente), so bezeichnen wir den als Differentialquotient. Es wird also *geometrisch* unter den unendlich vielen Sekanten durch P_1 diejenige ausgezeichnet, die als Grenzlage der Folge der Sekanten $P_1 P_2$ sich ergibt bei unbegrenzter Annäherung von P_2 gegen P_1, *analytisch* der Wert der Funktion $\operatorname{tg} \alpha$ an der Stelle $\Delta x = 0$, der die Funktion an dieser Stelle stetig macht. Diese Ernennung zum Funktionswert an einer Stelle, die eigentlich unendliche viele Werte zuläßt, ist kein innerer Widerspruch und nichts Mystisches: dieser Funktionswert spielt eben eine ausgezeichnete Rolle.

3. Einführung neuer Begriffe als Widerspruch.

Hier kommen wir zu dem, was in weiten Kreisen als Mathematik des „Als—Ob" bezeichnet wird. Der hervorragendste Vertreter dieser Betrachtungsweise ist wohl M. Pasch. Ein Zitat soll uns einen Begriff davon geben, inwiefern nach Pasch gewisse Zahlen als Fiktionen aufzufassen sind. Pasch sagt z. B. (Archiv für die gesamte Psychologie, Bd. 38, Jahrg. 1919, S. 295ff.): „Es treten irrationale Zahlen auf, die Zahlen sein sollen, und die doch nicht genau — also im Grunde überhaupt nicht — angegeben werden können, imaginäre Zahlen, *die eigentlich nicht vorhanden sind*, die aber durch Formeln dargestellt und flott in Rechnung gebracht werden. Und so kann man in der heutigen Mathematik oft in Zweifel geraten, ob es sich um wirkliche oder bloß um eingebildete Dinge handelt." Was Pasch hier von den irrationalen und komplexen Zahlen sagt, gilt nicht weniger von den negativen und gebrochenen Zahlen, denn der Bruch $^3/_8$ kann z. B. auch nicht ohne Hilfe von Bruchstrich, Divisionszeichen oder Komma in ganzen Zahlen genau angegeben werden, und

andererseits kann $\sqrt{2}$ mit Hilfe des Symbols $\sqrt{\ }$ absolut genau ausgedrückt werden. Ebenso können die komplexen Zahlen als Zahlenpaare genau angegeben werden. Was nun die Wirklichkeit, das Vorhandensein der mathematischen Dinge betrifft, so sind für den Standpunkt der reinen Mathematik alle mathematischen Begriffe reine Gedankendinge, Schöpfungen des Geistes zur Beherrschung der Gegebenheiten. Aber es muß zugegeben werden, daß das luftige Gedankengebäude doch nicht frei im reinen Äther des Gedankens schwebt, sondern eine gewisse Erdenschwere hat, daß es sich, wenn auch kaum merklich, auf die Erfahrung aufstützt. Die moderne Axiomatik scheint auf den ersten Blick diese Behauptung Lügen zu strafen, denn sie führt am Anfang ihre Begriffe rein formal ohne sachliche (anschauliche) Definition ein, so daß man sich z. B. unter „Zahlen" irgend etwas vorstellen kann, was mit den Axiomen in Einklang steht (z. B. Punktmengen) und ebenso unter Addition und Multiplikation. Aber lesen wir etwa das Axiom: „Zu ‚zwei' Zahlen a und b gibt es stets eine einzige Zahl c, die die Summe von a und b heißt", so dürfen wir uns unter „2" nicht mehr etwas Beliebiges (vielleicht eine Gerade oder eine Punktmenge) vorstellen, sondern die natürliche Zahl 2 in ihrer vollen anschaulichen Bedeutung. Die Axiomatik kommt also nicht ohne die natürlichen Zahlen als Grundlage aus. Ebenso scheinen mir in alle Beweise der Axiomatik unbemerkt Materialeigenschaften der natürlichen Zahlen einzufließen, weil diese Beweise mit Zeichen gemacht werden, welche die gemeinsame Eigenschaft aller diskreten Dinge, die Zählbarkeit, besitzen. (Vgl. auch F. Klein, a. a. O., I, S. 15: „Man muß einen Rest, freilich ein Minimum, von Anschauung immer zurückbehalten.") So sind uns also die natürlichen Zahlen als eine letzte, nie zu umgehende Grundlage gegeben. Wir können sie als die eigentlichen Zahlen ansehen und müssen dann *alle* andern Zahlen als künstliche Schöpfungen des Menschengeistes betrachten im Sinne Kroneckers, der gesagt hat: „Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott geschaffen; alles andere ist Menschenwerk." Bezeichnen wir also ruhig gebrochene, negative, irrationale und komplexe Zahlen als *Fiktionen*. Darin sind wir mit Vaihinger und Dieck ganz einig. Aber mit aller Entschiedenheit bestreiten wir, daß in diesen Begriffsschöpfungen Selbstwidersprüche enthalten seien. Unser Geist hat die Freiheit, Begriffe zu denken, für welche die natürlichen Zahlen nur einen Sonderfall mit speziellen Merkmalen bilden. Dieser Prozeß ist so wenig widerspruchsvoll wie in der Systematik der Zoologie die Zusammenfassung der Tierklassen Säugetiere und Fische unter dem Begriff der Wirbeltiere. Die innere Widerspruchslosigkeit in der Mathematik nachzuweisen ist ja die Hauptaufgabe der Axiomatik und für große Gebiete ist, wie bekannt, dieser Beweis schon gelungen.

Fassen wir zusammen: Wenn Dieck manche mathematischen Begriffe als Selbstwiderspruch bezeichnet, so kommt es daher, daß er die mathematischen Begriffe entweder anwendet, wo sie keine Anwendung zulassen, oder daß er die Begriffe falsch auffaßt oder daß er Neuschöpfungen von Begriffen als Widerspruch erklärt. Dieses Ergebnis unserer Untersuchung verpflichtet uns, mit aller Energie gegen Diecks Lehre zu kämpfen, die eine große Gefahr für die Jugend bedeutet. Wir leben ja in einer antiintellektualistischen Epoche. Diese Zeitströmung ist eine Reaktion auf eine übertrieben intellektualistisch eingestellte Periode. Da wir mit Kant den Primat der praktischen Vernunft, mit Schopenhauer den Primat des Willens und mit Nietzsche den Vorrang des

Lebens vor dem Erkennen anerkennen, so ist keine Gefahr, daß wir in den alten Fehler zurückfallen. Wohl aber auf der andern Seite: die moderne Zeit ist weit über das Ziel hinausgeschossen. Sie hat sich zu sehr von Mephisto irre führen lassen und verachtet nach Herzenslust „Vernunft und Wissenschaft, des Menschen allerbeste Kraft". Sie gleicht einem Menschen, der in der Nacht den Weg nicht fand, weil die Laterne nicht hell genug war, und der nun in seinem Ärger das Licht ganz auslöschen will. Nichts liegt mir ferner als die Behauptung, daß etwa Vaihinger eine solch wahnwitzige Konsequenz gutheiße. Aber mit der Lehre vom Selbstwiderspruch der mathematischen Begriffe hat er den Vernunftfeinden eine Waffe in die Hand gegeben, gegen welche die Verteidiger von „des Menschen allerbester Kraft" beinahe machtlos sind. Wie sollte man irgendeine Irrlehre widerlegen? Hat man einen Verächter des Geistes gezeigt, daß er sich selbst widerspricht, so wird er mit Hohnlachen antworten, ob wir denn noch nicht wissen, daß alle Begriffe voller Widersprüche seien und daß selbst die scheinbar so felsenfest gesicherte Mathematik nach allen Richtungen von den Löchern des Widerspruchs unterhöhlt sei.

Die Nutzanwendung für die Schule ist darum in allem ungefähr das Gegenteil von dem, was Dieck rät. Bei den schwierigen Stellen des mathematischen Unterrichts dürfen wir um keinen Preis das logische Gewissen des Schülers einschläfern mit der Beruhigungspille: „Das ist eben wieder einmal einer von den vielen Selbstwidersprüchen der Mathematik", sondern, man soll nicht ruhen, bis letzte Klarheit erreicht ist. Sonst erziehen wir die Schüler zur Denkfaulheit, die ja nur darin besteht, daß man Widersprüche der Gedanken friedlich nebeneinander im Geiste ruhen läßt. Fortschritt der Erkenntnis ist nur dann möglich, wenn man jedem Widerspruch so lange auf den Leib rückt, bis er ausgemerzt ist.

An einem besonders lehrreichen Beispiel soll noch der Unterschied zwischen unserer und Diecks pädagogischer Einstellung gezeigt werden. Unter der Überschrift: „Die ‚äußere Teilung' einer Strecke" sagt Dieck sehr treffend: „Wenn im Alltagsleben der Metzger das Vorbeischneiden mit dem Messer in der ferneren oder näheren Umgebung der gerade gestreckten Wurst ihre ‚äußere Teilung' nennen wollte, so würde man das als unsinnig und abgeschmackt ansehen", und er kommt zu dem Ergebnis, daß der Begriff der äußeren Teilung ein in sich widerspruchsvoller Begriff sei, weil ja das Ganze immer größer sei als sein Teil. In der Tat liegt hier ein Widerspruch vor, allerdings nur ein Widerspruch in der *Bezeichnung.* Eine solche unlogische, sich selbst widersprechende Bezeichnung ist gegen alle pädagogischen Grundsätze. Es ist gut, daß Dieck den Finger auf diese wunde Stelle gelegt hat. Man sollte in allen Lehrbüchern die Bezeichnung „innere und äußere Teilung" streichen und dafür vom *Problem des 3. Punktes* oder vom *Setzen des 3. Punktes* sprechen; statt *Teilverhältnis* sollte man Streckenverhältnis des 3. Punktes sagen. So wäre jeder Widerspruch beseitigt, und doch hätte man in denkökonomischer Hinsicht dieselben Vorteile wie bei der Bezeichnung „innere und äußere Teilung". Wie aber stellt sich Dieck zu dieser Frage? Er will unter allen Umständen an dem Widerspruch festhalten, indem er behauptet: „... gerade auf dem widerspruchsvollen Momente des Begriffes der äußeren Teilung beruht seine denkökonomische, seine wissensfördernde Kraft. Nur wenn wir die Verlängerung der Strecke als *Teilung* auffassen, erreichen wir wirklich eine Abkürzung der Denkarbeit" (S. 51). Jedem

leuchtet ein, daß der denkökonomische Vorteil hier auf der Schaffung eines übergeordneten Begriffes beruht, der beide Lagen des 3. Punktes, innen und außen, umfaßt. Daß zu diesem Zweck eine sich selbst widersprechende Bezeichnung gewählt werden muß, vermag man nicht einzusehen.

Genug mit diesem Beispiel. Der Leser wird nun selbst die Antwort auf die eingangs gestellte Frage wissen. Für den mathematischen Unterricht, der ja eine reine Begriffswissenschaft behandelt, mußten wir uns stark ablehnend zu Vaihingers Gedankengängen verhalten. Darüber darf aber nicht vergessen werden, daß für alle Tatsachenwissenschaften die Lehre Vaihingers außerordentlich wertvoll ist: ein Empirismus, der die Mitte hält zwischen relativistischem Positivismus und Kantschem Rationalismus. Der relativistische Positivismus glaubt mit dem den Sinnen unmittelbar Gegebenen in der Erkenntnis auskommen zu können, in der Meinung, daß auch Gesetze beobachtet werden können. Für den Kantianer wiederum ist der gesetzliche Rahmen alles Geschehens durch die Organisation unseres Geistes vor aller Erfahrung vorgegeben: alles, was wir erleben, ordnen wir in die Schubfächer von Raum, Zeit und Kategorien ein. Vaihinger sieht die Unhaltbarkeit beider Positionen. Nach ihm ist die fließende Mannigfaltigkeit des unmittelbar Gegebenen nicht zu bewältigen ohne begriffliche Zutat, aber die Begriffssysteme sind nicht starr; sie sind vielmehr Instrumente, die wir nach Belieben formen können, bis sie ihrem Zweck, der Bewältigung des Empfindungsmaterials, durchaus angepaßt sind. Es ist selbstverständlich, daß dieser Teil der Lehre Vaihingers bei jeder Gelegenheit (namentlich etwa in der Physik) im Unterricht zu Wort kommen sollte.

Beiträge zur Kombinatorik.

Von E. Beke in Budapest.

1. Gewöhnlich pflegt man die kombinatorischen Operationen der sogenannten Permutationen [alle möglichen Anordnungen von n Elementen] und der eigentlichen Kombinationen [Auswahl von k Elementen aus gegebenen n Elementen in aller möglichen Weise] gesondert zu behandeln. In den folgenden Zeilen will ich in einfachster Weise den Zusammenhang beider Aufgaben zeigen.

Wenn von den n Elementen k Elemente ($k < n$) untereinander und die übrigen $n - k$ Elemente untereinander übereinstimmen, so wissen wir, daß die Anzahl der Permutationen [Permutation mit Wiederholung]

$$P = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

ist. Die Bildung dieser Permutationen ist aber eigentlich *identisch* mit der Bildung der Kombinationen k-ter Ordnung aus gegebenen, voneinander verschiedenen n Elementen. Das ist leicht einzusehen. Wenn wir nämlich die Permutationen aus den, aus k Elementen a und $n - k$ Elementen b bestehenden n Elementen bilden wollen, so ist es nur notwendig, die *Stellen* der a Elementen anzugeben, da wir dann die leeren Stellen mit den Elementen b auszufüllen haben. Die Bildung der Permutation besteht also nur darin, daß wir für die a Elemente aus den n Stellen $1, 2, 3, \ldots n$, k Stellen auszuwählen haben. Jede solche Auswahl entspricht einer Permutation und umgekehrt, jede Permutation entspricht

einer solchen Auswahl. Wir sehen also, daß die Zahl P angibt, wie oft aus n Elementen $[1, 2, \ldots n]$ k verschiedene Elemente ausgewählt werden können, d. i. P ist die Anzahl $C_n^{(k)}$ der Kombinationen k-ter Ordnung aus gegebenen n Elementen:

$$C_n^{(k)} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

2. Die sogenannte Kombination mit Wiederholung pflegt den Schülern gewisse Schwierigkeit zu bereiten. Der folgende Vorgang dürfte diese Schwierigkeit beseitigen. Ich nehme zuerst ein einfaches Beispiel. Wenn z. B. aus den drei Elementen a, b, c die Kombinationen 7. Ordnung zu bilden wären, so könnten wir sagen, eine jede einzelne Kombination ist bestimmt, wenn wir angeben, 1. welche Buchstaben aus den a, b, c (und zwar in der angegebenen Ordnung) in dieser Gruppe vorkommen, und 2. an welchen Stellen eine Wiederholung stattfindet. Wenn ich z. B. sage, a, b kommen in der Gruppe vor und gleichzeitig angebe, daß eine Wiederholung an der 2., 3., 5., 6., 7. Stelle vorkommt, dann ist diese einzelne Kombination völlig bestimmt; sie ist: $aaabbbb$. Wenn ich die Buchstaben a, c und die Wiederholungsstellen (deren Zahl natürlich 5 ist) angebe, 2, 3, 4, 5, 7, so bedeutet das, daß der erste Buchstabe a ist, und dieser wiederholt sich an der 2., 3., 4., 5. Stelle; dann muß aber der zweite Buchstabe c kommen, welcher sich an der 7. Stelle wiederholt. Umgekehrt ist die Gruppe $aabbbcc$ durch die Buchstaben a, b, c und durch die Wiederholungsstellen 2, 4, 5, 7 bestimmt. Wie erwähnt, ist die Summe der Anzahl der Buchstaben und der Wiederholungstellenzahlen immer gleich 7, weil eine Stelle entweder eine Beginnstelle oder eine Wiederholungsstelle ist. Im ersten Falle kommt an diese Stelle ein neuer Buchstabe (in der abc Ordnung) im zweiten Falle wiederholt sich an dieser Stelle der Buchstabe. Jede Gruppe ist also dadurch bestimmt, daß wir angeben, welche 7 Elemente aus den 9 Elementen: $a, b, c,$ 2, 3, 4, 5, 6, 7 ausgewählt werden und umgekehrt. (Bei jeder Auswahl ist wenigstens ein Buchstabe gewählt, weil ja nur 6 Zahlen da sind.)

Im allgemeinen Falle, wenn aus n Elementen $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ die Kombinationen mit Wiederholung k-ter Ordnung zu bilden wären, so ist die Aufgabe, aus den $n + k - 1$ Elementen:

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, 2, 3, 4, \ldots, k,$$

bestehend aus den gegebenen n Buchstaben und aus den $k - 1$ Wiederholungsstellenzahlen, auf alle möglichen Weisen k Elemente auszuwählen. Jeder solchen Auswahl entspricht eine Kombination und umgekehrt. Die gesuchte Zahl der Kombinationen mit Wiederholung ist also die Zahl der einfachen Kombinationen k-ter Ordnung aus $n + k - 1$ Elementen, d. i.: $C_{n+k-1}^{(k)}$.

Über Resonanzversuche.

Von S. Janss in Ütersen (Holstein).

Mit 4 Figuren im Text.

Die weitgehende technische Verwendung des Wechselstroms und die damit verbundenen Anschlüsse der Schulen an das Wechselstromnetz lassen es als wünschenswert erscheinen, die grundlegenden Eigentümlichkeiten der Wechselströme unterrichtlich darzustellen und auch diese Stromart für weitere Unterrichtsversuche zu verwenden. Hierbei werden häufig auch elastische Resonanzschwingungen benutzt; es scheint aber, als ob dann die eigentümlichen Verhältnisse bei Resonanz, Schwingungszahl und Phasenverschiebung, nicht immer von Einflüssen, die im Wechselstromkreis liegen, klar getrennt werden. Dies ist aber zur Vermeidung von Scheinergebnissen unbedingt notwendig. Hier sollen nun grundlegende Beziehungen von Resonanzerscheinungen zunächst an einem rein mechanischen System erläutert werden, dann aber auch einige Hinweise auf Untersuchung von Wechselstromkreisen sich anschließen.

I. Die Differentialgleichung eines mitschwingenden Systems ist im Anschluß an Helmholtz[1])

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - h\frac{dx}{dt} + A\cos\Omega t,$$

worin $A\cos\Omega t$ die anregende, bei allen unten folgenden Versuchen praktisch ungedämpfte Schwingung der Schwingungszahl N ist; $\Omega = 2\pi N$. Die Lösung lautet

$$x = \frac{A}{m\sqrt{(\omega^2-\Omega^2)^2+4\delta^2\Omega^2}}\cos(\Omega t - \vartheta) + Ce^{-\delta t}\cdot\sin\omega t$$

($\omega = 2\pi n$ des erregten Systems mit der Dämpfungskonstante δ), ϑ ist die Phasenverschiebung zwischen erregendem und erregtem System, bestimmt durch

$$\operatorname{tang}\vartheta = \frac{2\delta\Omega}{\omega^2-\Omega^2} \text{ und konst. } \cos\vartheta = m(\Omega^2-\omega^2).$$

Dadurch werden folgende Aussagen gemacht:

1. Im erregten System überlagern sich die ungedämpfte Schwingung des Erregers und die gedämpfte des erregten Systems zu Schwebungen. Weil aber die Erregerschwingungen ungedämpft sind, sind *Schwebungen nur im Anfangszustand* zu erwarten.

2. Bei allen folgenden Versuchen machen sich die Schwebungen auch nicht 1 Sekunde bemerkbar. Während des *Dauerzustandes* schwingt das erregte System nicht in seiner freien Eigenfrequenz, sondern *konstant in der Frequenz des Erregers.*

3. Mit Annäherung an $\Omega = \omega$ nimmt die Schwingungsweite zu (Resonanzkurve).

1) Vorlesungen über theoretische Physik, Bd. III, Die mathematischen Prinzipien der Akustik, S. 44ff.

4. Erreger und erregtes System schwingen mit Phasenverschiebung; 90^0 für $\Omega = \omega$, zwischen 0 und 90^0 für $\Omega - \omega < 0$, zwischen 90 und 180^0 für $\Omega - \omega > 0$; je kleiner die Dämpfung, desto plötzlicher der Phasenwechsel bei kleinen Änderungen von Ω und ω in der Gegend von $\Omega = \omega$.

II. Diese Folgerungen aus der Theorie lassen sich bei folgender Anordnung bestätigen (Fig. 1). An einer Stimmgabel von 128 Schwingungen mit elektromagnetischem Antrieb (Lissajous-Gabel) und Spiegel S_1 ist ein Stück einer nicht sehr starken (Rückwirkung!) alten Uhrfeder (F) befestigt.

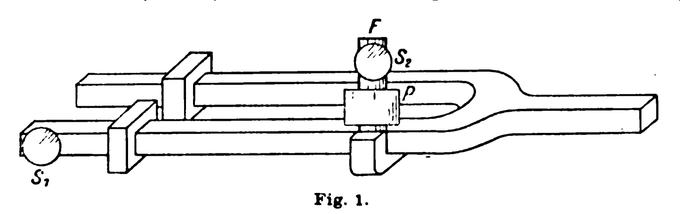
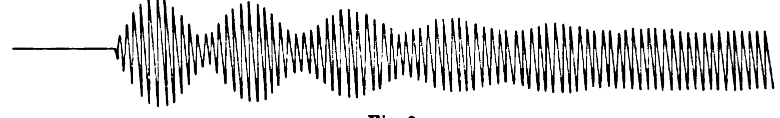


Fig. 1.

Man wählt vorteilhaft eine möglichst kleine Schwingungszahl, damit die Feder nicht zu kurz wird. Sie wird gehalten von einer Schraube, wie sie häufig zur Verbindung von Außenleitung und Kohle in galvanischen Elementen diente; eine Schraubenquetsche für Schläuche ist auch brauchbar. An der Uhrfeder kann zur Vermehrung der Dämpfung ein Stück Papier P befestigt werden (Klebwachs). Oben an der Feder befindet sich ein Galvanometerspiegel S_2, angeklebt mit geschmolzenem Wachs.

In der üblichen Weise wird eine intensiv beleuchtete kleine Blende (kräftiger Nadelstich im Schablonenblech) mittels Linse nach Reflexion an S_2 auf einem Schirm abgebildet. Versetzt man nun die Feder mit dem Finger in kleine Schwingungen, dann erscheint auf dem Schirm eine sich verkürzende Lichtlinie; mit Papierdämpfung nimmt sie schneller ab als ohne sie. Nach Reflexion am rotierenden Spiegel kann man die Schwingungsform auch räumlich ausbreiten; dabei kann es natürlich vorkommen, wie auch bei den späteren Versuchen, daß das Licht nicht gerade auf den Schirm fällt; da aber, bei sehr langsamer Rotation des Spiegels, die Feder in sehr kurzen Zwischenzeiten immer erneut angeregt werden kann, sind in kurzer Zeit günstige Beobachtungen möglich.

1. Für den ersten Resonanzversuch wird die Stimmgabel durch Schlagen erregt, damit sie sofort die volle Schwingungsweite hat, wie es die Theorie voraussetzt. Ohne Drehspiegel beobachtet man auf dem Schirm eine sich verkürzende und verlängernde Lichtlinie, entsprechend den Schwebungen. Die Längenänderungen gehen um so schneller vor sich, je mehr Ω und ω verschieden sind. Bei gleichen Schwingungszahlen wiederholen sie sich ohne


Fig. 2.

Papierdämpfung P häufiger als mit derselben. — Mit dem rotierenden Spiegel erhält man deutlich die Schwebungsfigur, in der die Minima schnell an Intensität zunehmen, die Maxima abnehmen. — Mittels häufig beschriebener Anordnungen ist auch eine photographische Aufnahme möglich; das Abpassen des

richtigen Moments ist dann aber besonders zu üben, da sonst viele Platten oder Streifen von Negativpapier unnütz verbraucht werden. Fig. 2 ist eine schematische Zeichnung nach einer Photographie mit möglichst genauer Wiedergabe der Amplituden. Die Schwebungsfigur bringt deutlich die Überlagerung einer gedämpften und einer ungedämpften Bewegung zum Ausdruck. — Es ist vorteilhaft, die Schwingungszahl der Stimmgabel durch Laufgewichte zu ändern, nicht die der Feder durch Längenänderung; im letzten Falle ändert sich nämlich auch sehr leicht die optische Einstellung.

2. Nach weniger als 1 Sekunde ist der Dauerzustand erreicht; man sieht an dem unveränderten Streifen auf dem Schirm die Konstanz der Schwingung. Daß es die Schwingungszahl der Stimmgabel ist, kann man leicht an der Tonhöhe feststellen, wenn man das Ohr nähert. Dies gilt für jeden Frequenzunterschied.

3. Um die Form der Resonanzkurve zu untersuchen, verwendet man vorteilhaft elektromagnetischen Antrieb. Zu jeder Stellung der Stimmgabellaufgewichte schätzt man die Länge der Lichtlinie auf dem Schirm. Bei einer bestimmten Stelle wird sie ein Maximum; erregt man dann die Feder allein, so gibt sie den Stimmgabelton. Die Papierdämpfung drückt alle Amplituden herab, namentlich auch die maximale.

4. Zur Beurteilung der Phase ist zunächst in einem Falle eine sehr einfache Beobachtung möglich. Schwingt die Stimmgabel schneller als die Feder, so sieht man deutlich, daß die Grenzlagen durch Fig. 3 dargestellt werden; ein

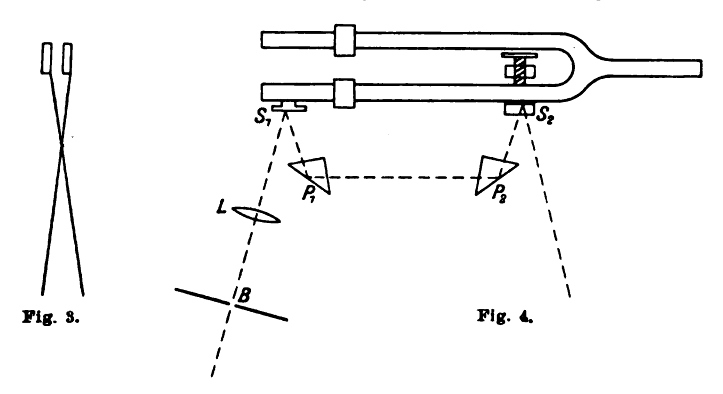


Fig. 3. Fig. 4.

Punkt nahe der Stimmgabel bewegt sich überhaupt nicht. Da das Federende an der Stimmgabel sich notwendig wie letztere selbst bewegen muß, wird also angezeigt, daß das freie Ende sich entgegengesetzt bewegt, also 180^0 zurückbleibt.

In jedem Falle aber kann man die Phase an der Lissajous-Kurve beurteilen. Man erhält sie folgendermaßen (Fig. 4). Eine kleine Lochblende wird intensiv beleuchtet und mittels der Linse L abgebildet, vorher aber das Licht an S_1 und S_2 reflektiert; um beides zu erreichen, muß man bei P_1 und P_2 kleine Spiegel oder total reflektierende Prismen anbringen (Zeiss liefert solche mit kleinen Fehlern an Schulen unentgeltlich); man klemmt sie etwa in Bürettenhalter von Bunsenstativen. Durch geringes Verkanten von P_1 und P_2 wird die Bewegung auf dem Schirm durch die Stimmgabel senkrecht zu der der Feder gemacht.

Beginnt man bei relativ starker Verstimmung, $\Omega < \omega$, dann erhält man eine Gerade derart geneigt, daß Phase 0^0 angezeigt wird; man kann dies vorher oder nachher dadurch anschaulich demonstrieren, daß man beide Gebilde zwangläufig langsam mit der Hand bewegt. — Bei größerem Unterschied in Richtung $\Omega > \omega$ hat die Gerade entgegengesetzte Neigung, zeigt also Phase 180^0 an. — Für $\Omega = \omega$ entsteht eine Ellipse mit senkrechten Achsen; durch passende Wahl des Schirmabstandes läßt sie sich in einen Kreis überführen; Phase also 90^0. Ob die Feder voraneilt oder nachhinkt, läßt sich an der Figur nicht entscheiden, wohl aber nach vorheriger Reflexion am rotierenden Spiegel; auf dem Schirm entstehen Schleifen, die oben oder unten verbunden sind, je nach Drehrichtung. Durch Überlegung findet man dann die Richtung, in welcher der ruhende Kreis vom Lichtfleck durchlaufen wird, und damit die Richtung des Phasenunterschiedes.[1])

In der Nähe von $\Omega = \omega$ findet man Ellipsen mit schief liegenden Achsen, so daß die Phase liegt für $\Omega < \omega$ zwischen 0^0 und 90^0 (oder 0^0 und 270^0) und für $\Omega > \omega$ zwischen 90^0 und 180^0 (oder 270^0 und 180^0). Daß die eingeklammerten Werte ausscheiden, erkennt man wiederum an der Schleifenbildung durch Anwendung des Drehspiegels. — —

Eine quantitative Auswertung der Versuche ist möglich. Zur Bestimmung von Ω, ω und δ muß man dann die unveränderte Federschwingung einmal zusammen mit der Schwingung einer geeichten Gabel photographieren, die Stimmgabel nach jeder Änderung von Ω mit der Normalgabel. Dann erhält man durch Addition beider Bewegungen eine Schwebungsfigur, die auch quantitativ mit der nach Fig. 2 übereinstimmt.

Die aus Ω, ω und δ berechnete Phase stimmt aber mit der aus den Lissajous-Figur experimentell abgeleiteten im allgemeinen nur mäßig, in der Gegend von $\Omega = \omega$ schlecht überein. Ein Grund kann darin liegen, daß in dieser Gegend die Phase gegen $\Omega - \omega$ nach der Formel $\operatorname{tang} \vartheta = \frac{2\delta}{\omega^2 - \Omega^2}$ sehr empfindlich ist; geringe prozentuale Unsicherheit von Ω und ω macht die Differenz sehr stark falsch. Ferner ist Voraussetzung für die Formel die strenge Gültigkeit des Hookeschen Elastizitätsgesetzes; dies trifft für die starken Schwingungen im Resonanzmaximum wahrscheinlich nicht mehr genau zu. Außerdem kann man folgendes beobachten. Wenn die Phase noch nicht ganz 90^0 ist, kommt es häufig vor, daß sie unvermittelt darauf springt unter ganz erheblicher Vergrößerung der Schwingungsweite; dies weist auf eine plötzliche Änderung der Federkonstanten hin, die nach meiner Erinnerung auch M. Wien unter anderen Verhältnissen festgestellt hat. — —

III. Es scheint, daß die nach Theorie und Experiment bei Resonanz auftretenden Verhältnisse nicht immer Beachtung finden. So ist Cassebaum[2]) der Auffassung, daß man die fallende Charakteristik der Glimmlampe sicher an einem technischen Frequenzmesser demonstrieren kann; denn stets wird der innere Rand der von der Glimmlampe beleuchteten schwingenden Feder „weniger scharf erscheinen als der äußere, da die Lampe bei sinkender Spannung die zurückgehende Feder länger beleuchtet als die hinausschwingende Feder bei

---

1) Vgl. z. B. Lindemann, Zeitschr. f. d. phys. u. chem. Unterr. **26**, 23 ff., 1913.
2) Zeitschr. f. d. phys. u. chem. Unterricht **39**, 61, Abs. 3, 1926.

steigender Spannung". Dies ist aber durchaus nicht sicher, da die Feder im allgemeinen mit unkontrollierbarer Phase gegen die Spannung des Wechselfeldes schwingt. Diese Phase ist bedingt a) durch das Verhältnis von Selbstinduktion und Widerstand der Magnetwicklung des Frequenzmessers, b) durch Hysteresis des Eisenkerns, c) durch Phasenverschiebung, infolge Resonanz, zwischen schwingender Feder und Magnetfeld. Diese drei *können* zusammen zufällig eine Gesamtverschiebung von 0° oder 180° ergeben; dann wären die Angaben für die Charakteristik brauchbar. Im allgemeinen wird diese Phase aber nicht genau vorhanden sein. Dann wird die beobachtete Verschiedenheit der Ränder im allgemeinen auch auftreten; die Zuordnung zur Zünd- und Verlöschungsspannung kann aber gerade umgekehrt sein. Sie kann sogar auch dann vorhanden sein, wenn beide Vorgänge symmetrisch zur Scheitelspannung liegen würden. — Ferner erscheint in Absatz 2 nicht unbedenklich: „Besteht nicht vollkommene Resonanz" zwischen der Feder und dem Aufleuchten der Glimmlampe, „so tritt eine Schwebungserscheinung ein; man sieht die betreffende Feder langsam auf- und abschwingen, eine Parallelerscheinung zum Überlagerungsempfang der Radiotechnik." Letzteres erscheint fraglich; denn nach ganz kurzer Zeit des Einschwingens schwingt die Feder mit konstanter Weite in der Periode des erregenden Systems, hier des magnetischen Wechselfeldes. Das Auf- und Abschwingen der Feder kann durch geringe Frequenzschwankungen im Netz verursacht sein; mit denselben ändert sich gerade in der Nähe von $\Omega = \omega$ nach der Formel $\operatorname{tang} \vartheta = \frac{2\delta\Omega}{\omega^2 - \Omega^2}$ die Phase sehr stark; auch geringe Spannungsschwankungen können mitwirken. Ändert sich aber die Phase, so ändert sich auch die Stellung der Feder, in der sie von dem Licht der Glimmlampe getroffen wird.

Früher[1]) wurde darauf hingewiesen, daß bei den von Fricke und Lindemann beschriebenen sehr einfachen Anordnungen zur Demonstration von Phasenverhältnissen in Wechselstromkreisen die Phasenverschiebungen bei Resonanz beachtet werden müssen. Besonders der Apparat von Lindemann wird gut brauchbar, wenn man mit beiden Federn in gleicher Richtung aus dem Resonanzmaximum herausgeht, da die Phase dann bei den relativ wenig gedämpften Federn bald 0° oder 180° ist. Der Vorteil des Apparats liegt darin, daß er praktisch weder Widerstand noch Selbstinduktion besitzt und daß Hysteresis nicht wirkt, da ein Gleichstromfeld vorhanden ist.

Hanck[2]) versucht offenbar eine anschauliche Deutung der Phase bei Resonanzbewegung. Mir scheint, daß dieser Versuch unbefriedigt läßt, da dann die Phase unabhängig davon sein müßte, ob ω größer oder kleiner als Ω ist; das ist aber nicht der Fall. Da die Phasen entsprechend entgegengesetzt von 90° an wandern, kann man als Lissajous-Figuren nicht nur solche bis 90° Differenz erhalten, wie Hanck S. 247 a. a. O. scheinbar vermutet, sondern alle zwischen 0° und 180°.

1) Zeitschr. f. d. phys. u. chem. Unterricht **36**, 171, 1923.
2) Zeitschr. f. d. phys. u. chem. Unterricht **38**, 242/243, 1925.

Kleine Mitteilungen.

Bemerkung zu den Transversalensätzen des Herrn Salachowski.[1]) Herr Salachowski stellt die Frage: Welche Beziehungen bestehen überhaupt im Dreieck zwischen den Abschnitten dreier durch einen Punkt gehenden Ecklinien, und welche Folgerungen ergeben sich daraus für spezielle Transversalen? Seine Gleichung

$$x_1 x_2 x_3 : y_1 y_2 y_3 = abc : u_1 u_2 u_3 \tag{4}$$

kann noch den Zusatz rechts erhalten: $\geqq 8$. Setzt man nämlich

$$x_1 : y_1 = \lambda_1, \quad x_2 : y_2 = \lambda_2, \quad x_3 : y_3 = \lambda_3,$$

so ergibt sich

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + 2$$

als Bedingung dafür, daß die Transversalen durch einen Punkt gehen.

Faßt man diese Gleichung als Nebenbedingung auf bei der Aufgabe, die Funktion $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$ zu einem Extremwert zu machen, so ergibt sich, daß $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$ ein Minimum wird für

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2,$$

d. h. für den Schwerpunkt. Es ist also

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \geqq 8,$$

wo das Gleichheitszeichen nur für den Schwerpunkt gilt.

Die übrigen merkwürdigen Punkte des Dreiecks liefern Ungleichungen.

Der Inkreismittelpunkt führt auf

$$\frac{1}{u} \leqq \frac{1}{9}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right),$$

wo u den Dreiecksumfang bedeutet. Diese Ungleichung ist aber, obgleich sie die unterste obere Grenze für $\frac{1}{u}$ angibt, nicht etwa eine hinreichende Bedingung dafür, daß sich aus drei Seiten a, b, c ein Dreieck konstruieren läßt, denn sie ist nur ein Spezialfall der Ungleichung

$$\frac{1}{a_1 + a_2 + \cdots a_n} \leqq \frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots \frac{1}{a_n}\right),$$

die für ganz beliebige positive Zahlen gilt.

Während so der Inkreismittelpunkt enttäuscht, gibt der *Höhenschnittpunkt* wirklich etwas Neues. Auf h_a ist $\lambda_1 = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta\cos\gamma}$ usw., somit

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \frac{1}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma} \geqq 8$$

und

$$\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \leqq \frac{1}{8}.$$

1) Diese Zeitschrift 1926. S. 307.

Letztere Ungleichung gilt für alle Dreiecke, und zwar ist das Produkt

< 0 bei stumpfwinkligen
$= 0$ „ rechtwinkligen
$< \frac{1}{8}$ „ spitzwinkligen
$= \frac{1}{8}$ „ gleichseitigen Dreiecken.

Aus $$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$$

folgt daher $$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma \leqq \tfrac{9}{4},$$

also $$a^2 + b^2 + c^2 \leqq 9r^2,$$

und zwar ist die Quadratensumme

$< 8r^2$ bei stumpfwinkligen
$= 8r^2$ „ rechtwinkligen
$> 8r^2$ aber $< 9r^2$ bei spitzwinkligen
und $= 9r^2$ bei gleichseitigen Dreiecken.

Der Umkreismittelpunkt liefert natürlich dasselbe.

Der *Nagelsche Punkt* ist der Schnittpunkt der Ecklinien nach den auf die Gegenseiten fallenden Berührungspunkten der Ankreise. Er liefert $\lambda_1 = \frac{a}{s-a}$ usw., woraus nacheinander

$$\frac{abc}{(s-a)(s-b)(s-c)} \geqq 8,$$

$$abcs \geqq 8J^2,$$

$$rs \geqq 2J,$$

$$r \geqq 2\varrho,$$

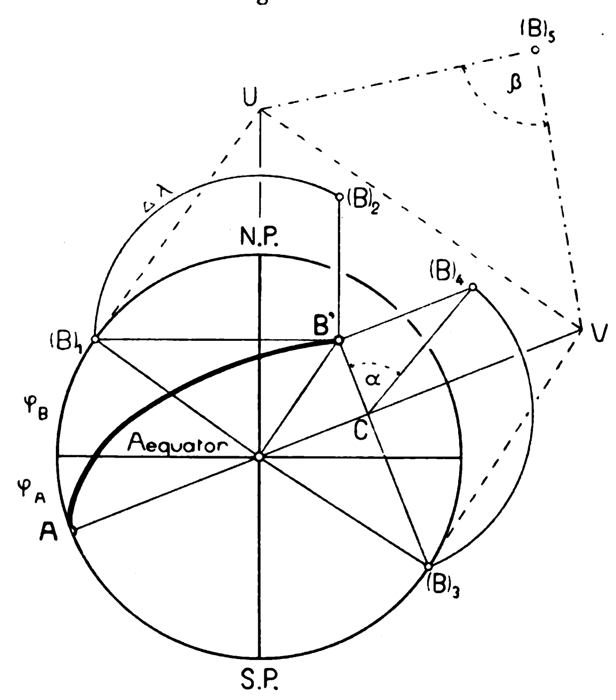
wie bekannt.

Stuttgart. Th. Weitbrecht.

Konstruktive Bestimmung der kürzesten Entfernung zweier Orte, die durch ihre geographischen Koordinaten gegeben sind. (Mit 1 Figur im Text.) Die Nachrichten vom *Spanien—Amerika-Flug* lenkten die Aufmerksamkeit unserer Schüler auf die *Bestimmung der kürzesten Entfernung* zwischen dem Abgangsort und dem erreichten Ziele. Da an der Baseler Realschule die Anfangsgründe der sphärischen Trigonometrie nicht mehr behandelt werden, mußte eine einfache Konstruktion herangezogen werden. Die bekannten Konstruktionen mit dem Analemma[1]) zur Bestimmung von Tag- und Nachtbogen, Morgen- und Abendweite usf. versagen, weil der Großkreis, auf dem die Entfernung gemessen wird, nicht mehr zu den Kreisscharen des zugrunde gelegten Koordinatensystems gehört.

1) Vgl. etwa: Schoy, Beiträge zur konstruktiven Lösung sphärisch-astronomischer Aufgaben (Leipzig 1910) oder des Verfassers Mathematische Geographie und sphärische Trigonometrie, dargestellt als einheitlicher Lehrgang für Mittelschulen (Basel 1916).

Leicht führt jedoch der nachfolgende Weg zur Lösung, wobei mit Rücksicht auf die Darstellung etwa die Luftreise Südamerika—Ural gedacht ist: Man stellt die Erde in Normalprojektion dar und wählt als *Bildebene* den Meridian durch den Ausgangspunkt A der Fahrt. Dann läßt sich das Bild B' des Endpunktes mit Hilfe der geographischen Breite und des Längenunterschiedes leicht konstruieren. Die geographische Breite φ führt zum Bild des Parallels, auf dem der Längenunterschied $\Delta\lambda$ abgetragen wird. Nun ist die Ebene, welche den gesuchten Großkreisbogen enthält, bestimmt durch den Mittelpunkt der Kugel sowie durch die Orte A und B. Wird diese Ebene um ihre Spur AC niedergelegt, so fällt der Punkt B auf $(B)_3$, und der Kreisbogen $ASP(B)_3$ gibt die gesuchte Entfernung in Graden.



Auch *Anfangs-* und *Endkurs* lassen sich leicht finden. Beide sind in der Figur von Norden nach Osten zu zählen. Dem Anfangskurs entspricht die Tafelneigung α der Großkreisebene $AOCB$. Der Endkurs ist der Winkel β zwischen den im Punkte B an den Meridian und an die Orthodrome AB gelegten Tangenten, welche die Bildebene in den Spuren U und V durchdringen. Nach Umlegung des Dreiecks UBV um die Spur UV erscheint der Winkel β in seiner wahren Größe.

Basel. H. Stohler.

Zur Berechnung der Wurzeln höherer Gleichungen. Im Anschluß an die Mitteilung des Herrn W. Breidenbach[1]) möchte ich mir folgende Bemerkungen erlauben.

Es ist eine reizvolle Idee, die Approximationsparabeln zur Lösung von Gleichungen höheren Grades heranzuziehen. Leider ist das vorgeschlagene Verfahren lediglich auf Gleichungen vom dritten Grade zugeschnitten und setzt die Kenntnis des speziellen Schemas zur Koeffizientenbestimmung voraus. Bei der beschränkten Zeit, welche dem Mathematikunterricht zur Verfügung steht, wird man möglichst allgemeine Methoden bevorzugen.

Zur hübschen Anwendung wird aber das vorliegende Problem, wenn das-

1) Diese Zeitschrift 57 (1926), S. 173.

selbe bei der Taylorschen Entwicklung eingeordnet wird. Auf die Näherung ersten Grades durch die Kurventangente und ihre Verwendung in der Fehlertheorie läßt man die Schmiegungskurven zweiter Ordnung folgen, wobei man alsdann auf deren Anwendung zur Bestimmung von Gleichungswurzeln eintreten kann.

Als Rechnungsbeispiel mag das von Herrn Breidenbach in Vorschlag gebrachte durchgeführt werden.

$$y = x^3 - 30x - 20$$

$$x_1 = 5, \quad y_1 = -45; \quad x_2 = 6, \quad y_2 = 16.$$

Da die Wurzel näher bei x_2 liegt, so wird man für die Stelle x_2 die Gleichung der Schmiegungsparabel ermitteln.

$$y'(6) = 78; \quad y''(6) = 36$$

$$\mathfrak{y} = 16 + 78(x-6) + 18(x-6)^2 = 18x^2 - 138x + 196.$$

Als Nullstelle der Nährungsfunktion folgt

$$x = 5{,}784$$

genauer als nach der vorgeschlagenen Methode, und zudem ist dieses Verfahren nicht auf Gleichungen vom dritten Grade eingeschränkt, und seine Anwendung liegt in der geraden Richtung des Lehrganges, falls man auf den Begriff der Schmiegungskurven eintritt.[1])

Basel. P. Buchner.

Bahn des Mondes um die Sonne. Die Bahn des Mondes relativ zur Sonne und ihre der oberflächlichen Anschauung so widerstrebende Konkavität läßt sich mit sehr einfachen mathematischen Mitteln erörtern, wenn man folgende vereinfachende Annahmen macht: Die Bahn der Erde um die Sonne und des Mondes um die Erde werden als Kreise aufgefaßt; die Neigung der Mondbahnebene gegen die Ebene der Erdbahn wird vernachlässigt. Der Erdbahnhalbmesser sei R. Die Erde wird gedacht als Mittelpunkt eines Kreises vom Halbmesser $a = \frac{1}{14}R$, der auf einem Kreise um die Sonne vom Halbmesser $r = \frac{13}{14}R$ rollt; der Mond M liegt auf einem Halbmesser des gewälzten Kreises im Abstande $p \cdot a$ von der Erde, wobei p der Mondentfernung entsprechend etwa mit 0,035 anzusetzen ist. Als Zahl der synodischen Monate ist einfach 13 angenommen. Läge der Punkt M auf dem Umfange des gewälzten Kreises, so würde er relativ zur Sonne bekanntlich eine Epizykloide beschreiben, die sich bei geeigneter Koordinatenwahl (siehe z. B. Serret-Harnacks Differentialrechnung) leicht auf die Form bringen läßt:

$$\frac{x}{a} = \frac{n+1}{n}\cos n\varphi - \cos(n+1)\varphi; \quad \frac{y}{a} = \frac{n+1}{n}\sin n\varphi - \sin(n+1)\varphi, \quad (1)$$

1) Zusatz bei der Korrektur: Zweckmäßig setzt man $x - 6 = h$, vermeidet die Umformung und rechnet die kleine Größe h aus $16 + 78h + 18h^2 = 0$ zu $h = -0{,}216$.



wobei $n = \frac{a}{r}$ und φ der geeignet gewählte Wälzungswinkel. In unserm Falle erhalten wir als Mondbahn die Rollkurve II. Art:

$$\frac{x}{a} = \frac{n+1}{n} \cos n\varphi - p \cos(n+1)\varphi; \quad \frac{y}{a} = \frac{n+1}{n} \sin n\varphi - p \sin(n+1)\varphi. \quad (2)$$

Es folgt als Linienelement

$$\frac{ds}{a} = (n+1)(p^2 + 1 - 2p \cos \varphi)^{\frac{1}{2}} d\varphi, \quad (3)$$

als Kontingenzwinkel

$$d\tau = \frac{n + p^2(n+1) - p(2n+1)\cos\varphi}{p^2 + 1 - 2p\cos\varphi} d\varphi, \quad (4)$$

als Krümmungshalbmesser

$$\mathsf{P} = \frac{ds}{d\tau} = a(n+1)\frac{(p_2 + 1 - 2p\cos\varphi)^{\frac{3}{2}}}{n + p^2(n+1) - p(2n+1)\cos\varphi}. \quad (5)$$

Es läßt sich zeigen, daß für $p > 1$ Schleifen, für $p = 1$ Spitzen, für $1 > p > \frac{n}{n+1}$ Wendepunkte, letztere an den Stellen $\cos\varphi = \frac{n + p^2(n+1)}{p(2n+1)}$, auftreten. Die Hin- und Zurückbewegung dieser Wendepunkte mit abnehmendem p läßt sich leicht verfolgen; für $p = \frac{n}{n+1}$ liegen sie jedenfalls wieder an den Stellen $\cos\varphi = 1$. Für $p < \frac{n}{n+1}$ sind keine Wendepunkte mehr möglich; $\frac{d\tau}{d\varphi}$ und P bleiben stets positiv; die Kurve ist nach dem Mittelpunkte des tragenden Kreises hin stets konkav. Extremwerte von P ergeben sich, wie zu erwarten, für $\sin\varphi = 0$; wenn $p \geqq \frac{1-n}{2+n}$, ergibt die Differentiation von P nach φ noch einen dritten Extremwert an der Stelle $\cos\varphi = \frac{(n-1) + p^2(n+2)}{p(2n+1)}$. Doch erweist sich die für p ausgesprochene Bedingung mit der bereits aufgestellten $p < \frac{n}{n+1}$ nur dann vereinbar, wenn $n > \frac{\sqrt{3}-1}{2}$. In unserm Falle bleiben bestehen ein Minimum von P für $\varphi = (2K+1)\pi$ von ungefähr $10a$ oder etwa $\frac{5}{7}R$, und ein Maximum von P für $\varphi = 2K\pi$ von etwa $25{,}6a$ oder etwa $2R$. An den Stellen, wo die Erdbahn geschnitten wird, berechnet sich P zu etwa $14a$, ist also ungefähr gleich R; es sind also immer noch erhebliche Krümmungsunterschiede vorhanden. Ohne Mühe läßt sich ableiten, daß die Mondbahn auch dann noch konkav gegen die Sonne wäre, wenn p noch $< \frac{1}{14}$, d. h. wenn $p \cdot a$ noch $< \frac{1}{14}a$ oder 785000 km wäre; selbst für den Fall also, daß sich der Mondbahnhalbmesser verdoppelte, würde die Mondbahn noch keine „Schlangenlinie" sein. Wie weit sich freilich unsre naiven, sozusagen ptolemäischen Voraussetzungen mit den Forderungen des Dreikörperproblems vertragen und wie weit sie der wirklich feststellbaren astronomischen Mondbewegung entsprechen, ist eine Frage, die mit so einfachen Mitteln nicht zu beantworten ist.

Tönning. A. Weimershaus.

Aufgaben-Repertorium.

Redigiert von Studienrat M. Brettar in Viersen (Burgstr. 2c).

(Alle das Aufgaben-Repertorium betreffenden Zusendungen und Anfragen sind an die Adresse dieses Herrn zu richten.)

A. Auflösungen.

892. Zu welcher Sternzeit hat die Ekliptik in der geographischen Breite $\varphi = 50^0$ denselben Neigungswinkel zum Horizont wie der Äquator? Welche Länge und welches Azimut hat in diesem Fall der Nonagesimus (d. h. der höchste Punkt der Ekliptik über dem Horizont)? $\varepsilon = 23^0 27'$. (1925, Heft 6, Michnik-Beuthen).

Lösung. Ist π der Pol der Ekliptik, P der des Äquators und Z der Zenit, so ist der betrachtete Zustand erreicht für $\pi Z = PZ = 90 - \varphi$, wobei π westlich und östlich von PZ liegen kann. Vermittels $\cos t = \operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{2} \cdot \operatorname{tg} \varphi$ errechnet man t zu $5^h\, 3^{min}$. Die Sternzeit für die westliche Lage ist dann $\theta_1 = 23^h\, 3^{min}$, für die östliche $\theta_2 = 12^h\, 57^{min}$. Die Berechnung des Azimuts ergibt sich aus: $\sin \frac{A}{2} = \frac{\sin \frac{\varepsilon}{2}}{\cos \varphi}$. $A_1 = 36^0 51' 34''$ ö., $\lambda_1 = 90^0 - t = 14^0 19{,}2'$. Dies sind die Werte zur Sternzeit θ_1. Zur Zeit θ_2 ist $A_2 = 36^0 51' 34''$ w., $\lambda_2 = 180^0 - \lambda_1 = 165^0 40{,}8'$.

Bücking. Diez. Hoffmann. Kasper. Mahrenholz. Michnik. Münst. Rall.

Man vgl. Michnik, Bestimmung der Kurve, die der höchste Punkt der Ekliptik über dem Horizonte eines gegebenen Beobachtungsortes beschreibt. Beuth. Gymn. 1905.

893. Man zeichne zu zwei gegebenen Kreisen K_1 und K_2 einen dritten so, daß er mit jedem der beiden in Ähnlichkeitslage ist in bezug auf den Mittelpunkt des anderen. (1925, Heft 6, Bücking-Darmstadt.)

Lösung. Man ziehe beliebig $M_1 A_1$ in K_1 und $M_2 A_2 \parallel M_1 A_1$ in K_2, sowie $M_1 A_2$ und $M_2 A_1$. Durch ihren Schnittpunkt P ziehe man $PM \parallel A_1 M_1$ bis $M_1 M_2$ und schlage um M mit MP den Kreis. (2 Lösungen.) — Bezeichnet man die Radien der Kreise mit r_1, r_2 und r, so besteht die Beziehung $M_1 M_2 : M_1 M = r_2 : r$ und $M_1 M_2 : M_2 M = r_1 : r$. Folglich $M_1 M : M_2 M = r_1 : r_2$, d. h. M fällt in einen der Ähnlichkeitspunkte. Es ist $\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$; $r = \frac{r_1 \cdot r_2}{r_1 + r_2}$.

Bücking. Clauss. Conrad. Diez. Fried. Hoffmann. Kasper. Klobasa. Mahrenholz. Mertens. Münst. Rall. Stiegler. Wieleitner.

894. Von zwei Kurvenvierecken $ABCD$ und $A_1 B_1 C_1 D_1$ liegen die vier Schnittpunkte $P \equiv \overline{AB} \times \overline{A_1 B_1}$, $Q \equiv \overline{BC} \times \overline{B_1 C_1}$, $R \equiv \overline{CD} \times \overline{C_1 D_1}$, $S \equiv \overline{DA} \times \overline{D_1 A_1}$ in einer Geraden, wenn drei von ihnen in einer Geraden liegen. (Erweiterung des Satzes von Pascal.) (1925, Heft 6, Böger-Hamburg.)

Lösung. Der Pascalsche Satz lautet: Sind ABC und $A_1 B_1 C_1$ zwei beliebige Kurvendreiecke, so liegen die drei Schnittpunkte $P \equiv \overline{AB} \times \overline{A_1 B_1}$, $Q \equiv \overline{BC} \times \overline{B_1 C_1}$, $U \equiv \overline{CA_1} \times \overline{AC_1}$ in einer Geraden. U liegt also in der Geraden g, in der nach der Voraussetzung P, Q und R liegen.

Für die beiden weiteren Kurvendreiecke CDA und $C_1D_1A_1$ gilt, daß $R \equiv \overline{CD} \times \overline{C_1D_1}$, $S \equiv \overline{DA} \times \overline{D_1A_1}$, $U \equiv \overline{AC_1} \times \overline{CA_1}$ in einer Geraden liegen. Diese Gerade fällt aber mit der ersten zusammen, weil sie mit ihr die Punkte R und U gemeinsam hat. — Wie lautet die Verallgemeinerung des Satzes?

Böger. Conrad. Diez. Kasper. Mahrenholz. Münst.

895. Die Höhe zerlegt ein rechtwinkeliges Dreieck in zwei Teildreiecke. Die Summe der Quadrate der Radien der diesen Teildreiecken einbeschriebenen Kreise ist gleich dem Quadrat des Radius des dem ganzen Dreieck einbeschriebenen Kreises. Gilt ein entsprechender Satz für sphärisch-rechtwinklige Dreiecke? (1925, Heft 6, Fiebig-Charlottenburg.)

Lösung. Ist c die Hypotenuse, so ist $\varrho = c\sqrt{2} \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\frac{\beta}{2}$, $\varrho_1 = a\sqrt{2}$ $\sin\frac{\beta}{2} \cdot \sin\frac{\gamma_1}{2} = a\sqrt{2} \cdot \sin\frac{\beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha}{2} = \varrho \cdot \sin\alpha$, $\varrho_2 = \varrho \cdot \sin\beta$, mithin $\varrho^2 = \varrho_1^2 + \varrho_2^2$. (Vgl. Bd. X, S. 14, Aufg. 4.)

Im rechtwinkligen sphärischen Dreieck ist $\operatorname{tg}\varrho = \sqrt{2} \cdot \sin c \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\frac{\beta}{2}$, $\operatorname{tg}\varrho_1 = \sqrt{2} \cdot \sin a \cdot \sin\frac{\beta}{2} \cdot \sin\frac{\gamma_1}{2} = 2 \cdot \operatorname{tg}\varrho \cos\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\frac{\gamma_1}{2}$, $\operatorname{tg}\varrho_2 = 2\operatorname{tg}\varrho \cdot \cos\frac{\beta}{2}$ $\cdot \sin\frac{\gamma_2}{2}$. Also $2\operatorname{tg}\varrho_1 \cdot \operatorname{tg}\varrho_2 = \sin h \cdot \operatorname{tg}\varrho\,[(\operatorname{ctg} a + \operatorname{ctg} b) \cdot \operatorname{tg} h - 1]$, $\operatorname{tg}^2\varrho_1 + \operatorname{tg}^2\varrho_2$ $- \operatorname{tg}^2\varrho = \operatorname{tg}^2\varrho\,(\cos h - 1)\,[\operatorname{ctg} a + \operatorname{ctg} b)\operatorname{tg} h - 1]$, $[\operatorname{tg}^2\varrho - (\operatorname{tg}^2\varrho_1 + \operatorname{tg}^2\varrho_2)]$ $: 2\operatorname{tg}\varrho \cdot \operatorname{tg}\varrho_1 \cdot \operatorname{tg}\varrho_2 = \operatorname{tg}\frac{h}{2}$. Im ebenen Dreieck ist $\varrho_1 \cdot \varrho_2 = \frac{h}{2}(h - 2\varrho)$ und $\varrho + \varrho_1 + \varrho_2 = h$, im sphärischen entsprechend: $\operatorname{tg}\varrho_1 \cdot \operatorname{tg}\varrho_2 = \frac{1}{2}\operatorname{tg} h\,[\sin h$ $\cdot \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2\varrho} - \operatorname{tg}\varrho\,(1 + \cos h)]$ und $(\operatorname{tg}\varrho_1 + \operatorname{tg}\varrho_2)^2 - \operatorname{tg}^2\varrho = \frac{1}{\cos h}[\sin h$ $\cdot \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2\varrho} - \operatorname{tg}\varrho\,(1 + \cos h)] \cdot [\sin h - \operatorname{tg}\varrho\,(1 - \cos h)]$.

Conrad. Fried. Hoffmann. Klobasa. Lohnes. Mahrenholz.

896. Gegeben seien die Geraden g_1 und g_2, ferner auf g_1 die Punkte A und B. Auf g_2 wird der Punkt X gesucht, so daß BX den Winkel zwischen AX und g_2 halbiert. (Anwendung beim Fachwerkbau.) (1925, Heft 6, Zimmermann-Eßlingen (Wttbg.).)

Lösung. Ist S der Schnittpunkt der beiden Geraden, so ist BX Winkelhalbierende im Dreieck SAX. Es ist also zu drei Punkten der vierte harmonische zu bestimmen. Der Halbkreis des Appollonius gibt die Punkte X. — Wieviel Lösungen sind möglich? Wie gestalten sich diese, wenn A und B auf verschiedenen Seiten von S liegen?

Brehm. Bücking. Clauss. Conrad. Diez. Fried. Götze. Hoffmann. Janzen. Kasper. Klobasa. Lohnes. Mahrenholz. Mertens. Müller. Münst. Rall. Villain. Walz. Zimmermann.

B. Neue Aufgaben.

949. Durch einen veränderlichen Punkt P einer Parabel (Scheitel A) zieht man den Durchmesser, der die Scheiteltangente in S schneidet. Das von S auf AP gefällte Lot habe den Fußpunkt Q. Der geometrische Ort aller Punkte Q ist der Schmiegungskreis des Scheitels A.

Klobasa-Troppau.

950. Nimmt man auf dem Durchmesser eines Kreises zwei gleichweit vom Mittelpunkt entfernte Punkte an und verbindet sie mit den Endpunkten der auf dem Durchmesser senkrecht stehenden Sehnen, so liegen die Schnittpunkte entsprechender Verbindungslinien auf einer Hyperbel. SCHARFFETTER-Memel.

951. Der Ausdruck $z = \frac{1}{n(n+1)(n+2)\cdots(n+p-1)}$ ist in Partialbrüche zu zerlegen. MICHNIK-Beuthen.

952. Von einem Punkte Q gehen in einer Ebene n Strahlen von gleicher Länge m unter gleichen Winkeln 2α aus. Diese Strahlen seien alle in gleichem Verhältnis < 1 geteilt und dann die äußeren Teile umgelegt, bis sie in einem Punkte S zusammentreffen. Für welches Teilverhältnis wird die Oberfläche der so bestimmten Pyramide möglichst groß? EMMERICH-Mülheim-Ruhr.

953. Bezeichnet man mit ϑ den Segmentärwinkel eines Dreiecks, so bestehen die Identitäten:

1. $2r^3 \cdot (a^3 \cos\alpha + b^3 \cos\beta + c^3 \cos\gamma + 3abc) = a^2b^2c^2 \operatorname{ctg}\vartheta$

2. $4r^2s(a^5 + b^5 + c^5) - 4r^2s^2(a^4 + b^4 + c^4) + 2abcr^2(a^3 + b^3 + c^3)$
$$+ a^2b^2c^2(a^2 + b^2 + c^2) = 6a^2b^2c^2r^2.$$

TAFELMACHER-Dessau.

Briefkasten zum Aufgaben-Repertorium.

Bis zum 10. März gingen an Auflösungen ein: Conrad-Moers 924—929. Groner-Bregenz 922. 924. 927. 929. 933. 935. 938. Halberstadt-Berlin 947. Hoffmann-Ravensburg 931—933. 935. 936. 938—942. Lauffer-Graz 940 (Verallg.). Mahrenholz-Kottbus 919. 925—928. Michnik-Beuthen 918 (2. und 3. Lösung. — Zu spät eingegangen). 923. 932. 935. Neubaur-Naumburg 925. 928. Nikol-München 944. Ostermeyer-Ratibor 940—942. 944. Saßmannshausen-Gerresheim 944. Schick-Riedlingen 920. 921. 923. Stiegler-Madrid 929. 931. 939. 941. 944.

Neue Aufgaben mit Lösungen sandten ein: König-Madrid (3), Hoffmann-Ravensburg (4).

Berichte.

Organisation, Verfügungen.

Richtlinien für den Unterricht in geometrischem Zeichnen und Messen (Darstellende Geometrie). Vorlage eines Vorschlages durch den Mathematischen Reichsverband (M. R.)[1]). Der Referent, Herr Ebner-Berlin, nahm Bezug auf den Minimallehrplan, den der M. R. vor einem Jahre auf der Jahresversammlung der D. M. V. in Danzig in engstem Anschluß an die Richtlinien des preußischen Ministeriums vorlegte, und zu dem die jetzt aufgestellten Richtlinien für den Unterricht in darstellender Geometrie den Anschluß bilden.

Die Worte: Geometrisches Zeichnen und Messen, die in den amtlichen Richtlinien zu finden sind, stammen offenbar aus den DAMNU-Vorschlägen vom

1) Die Vorlage des Vorschlages erfolgte in einer gemeinsamen Sitzung der Abteilungen 1 und 15 der Naturforscherversammlung in Düsseldorf, September 1926.

Jahre 1922. Damals schon wurde dieses Gebiet der Arithmetik und der Geometrie gleichwertig zur Seite gestellt, aber es war noch stoffarm — unterschied sich nur wenig von der eigentlichen Geometrie. Darum wurde in der folgenden Zeit von den verschiedenen Seiten versucht, diesem neuen Unterrichtszweige auch neue Pensen zuzuteilen. Dieser allgemeinen Strömung trug auch der M. R. Rechnung und stellte im Jahre 1923/24 „Neue Richtlinien für den Unterricht im wissenschaftlichen Zeichnen" auf, die eine Einführung in die angewandte Mathematik im weitesten Sinne darstellte. Demgegenüber ist das geometrische Zeichnen und Messen der amtlichen Richtlinien reine darstellende Geometrie, in der insbesondere „eine gründliche Entwicklung und Pflege des räumlichen Denkens" geübt werden soll. Insofern unterscheidet es sich von der althergebrachten Geometrie und ist ihr deshalb in Parallele gesetzt worden. Eine Schwierigkeit bestand jedoch darin, daß die amtlichen Richtlinien eine bestimmte Methode, die in dem Werke von Scheffers und Kramer niedergelegt war, einseitig zu bevorzugen schienen, daß es so aufgefaßt wurde, als sei nunmehr diese Methode die einzig zulässige. Auf der anderen Seite erhoben erfahrene Pädagogen gewichtige Bedenken gegen die neue Methode. Es ist dem M. R. gelungen, hier ausgleichend zu wirken, indem er darauf hinwies, daß es bei der ganzen Angelegenheit nicht so sehr auf eine bestimmte Methode ankommt als vielmehr darauf, daß überhaupt die räumliche Anschauung eine gründliche, in Quarta beginnende und nie unterbrochene Pflege erfahren müsse. Ob das aber unter Voranstellung des Zweitafelsystems oder der kotierten Eintafelprojektion zu geschehen habe, ist erst eine Frage zweiten Ranges. In der deutlichen Aussprache dieses Gesichtspunktes glaubt sich der M. R. auch mit dem Ministerium eines Sinnes. Was den sachlichen Inhalt der darstellenden Geometrie angeht, so wurde in Verbindung mit den Herren Scheffers und Kramer ein Kompromiß gefunden. Durch dieses Kompromiß werden aber, in Übereinstimmung mit obigem, auch nur Richtlinien, kein unbedingt verbindlicher Lehrplan gegeben. Die Hauptsache ist, daß sich die Pflege der räumlichen Anschauung neben der Pflege der Arithmetik und der Planimetrie als gleichwichtiger Bestandteil der Mathematik durchsetzt. Die angewandte Mathematik ist noch ein vierter Teil, über den noch später einmal gesprochen werden muß.

Der Lehrplanvorschlag des M. R. für das geometrische Zeichnen und Messen (darstellende Geometrie) hat folgenden Wortlaut:

Gymnasium.

IV. Übungen im richtigen Gebrauch des Lineals, der Zeichendreiecke und des Zirkels. Ziehen von Parallelen, Errichten von Senkrechten und Fällen von Loten mit Hilfe der Zeichendreiecke. Zeichnen des Netzes von Würfel, Quader und Prisma. Konstruktion der Raumdiagonalen. Ausmessen und Schätzen von Strecken und Winkeln.

U III. Übungen im genauen und sicheren Ausführen von Bleistift- und Tuschezeichnungen einiger geometrischer Aufgaben. Messen und Schätzen von Strecken, Winkeln, Kreisdurchmessern u. ä. auch im Freien. Das dreiseitige Dach (dreiseitige Pyramide), das vierseitige Dach. An der Hand solcher konkreter Beispiele die Projektionen von Punkten, geraden Linien (Strecken), Ebenen (Dreiecken) im Raum, ihre Umklappungen in die Tafel, Höhenlinien und Fallinien, Steigungswinkel von Geraden und Ebenen gegen die Tafel.

O III. Strecken-, Winkel- und Flächenmessen, auch im Freien. Böschungskegel, einfache Böschungskörper und Wegeanlagen.

U II. Das räumliche senkrechte Achsenkreuz (dreiseitige Dach mit rechtwinkligen Ebenen); im Anschluß hieran: Würfel, Tetraeder, Oktaeder in diesem Achsenkreuz.

— Mathematische Begründung der schrägen und der senkrechten Parallelprojektion und Anwendung auf einfachste stereometrische Körper unter Betonung der jeweiligen Strahlenrichtung. Zeichnungen und Feldmeßübungen im Anschluß an die Ähnlichkeitslehre und Kurvenzeichnungen im Anschluß an die Arithmetik. Näherungskonstruktionen (Kreisteilungen, Kreisquadratur).

O II. Projektionen des Kreises. — Konstruktionen zu trigonometrischen Aufgaben, auch solchen, deren Daten nicht in einer Ebene liegen. — Zeichnungen zur Goniometrie (graphische Addition usw.), graphische Auflösung von Gleichungssystemen. Ergänzungen zum Pensum der U II.

I. Mathematische Grundlagen der zentralperspektivischen Darstellung und Anwendung auf einfachste Fälle von ebenen Figuren und Körpern. — In Verbindung mit der sphärischen Trigonometrie: Projektionsarten der Kugel und einfachste astronomische Beobachtungen mit Meß- und Rechenübungen.

Realgymnasium; Reformrealgymnasium.

Im großen ganzen wie am Gymnasium, gegebenenfalls durch weitere Beispiele ergänzt. Dazu:

O III. Kurvenzeichnungen im Anschluß an die Arithmetik (graphische Darstellungen und Funktionsbilder). Graphische Flächenermittlung mit Hilfe von Millimeterpapier.

O II. Erweiterung der Konstruktionen von Körpern, besonders der Kugel und ihrer Teile. Wiederholende (jetzt systematische) Zusammenfassung der früher schon erarbeiteten Grundeigenschaften der Punkte, Geraden und Ebenen im Raum, Grundaufgaben hierzu.

I. In Verbindung mit der „Zusammenfassenden Behandlung der Kegelschnitte" (Pensum der Geometrie) Kegelschnitte als ebene Schnitte am Zylinder und Kegel in senkrechter Projektion auf die Vertikalebene mit Umklappung der Schnittfiguren.

Oberrealschule.

Im großen ganzen wie am Realgymnasium, gegebenenfalls unter Vermehrung der Aufgaben. Dazu:

O II. Weiterführung des Grundriß-Aufrißverfahrens, Lösung räumlicher Aufgaben mittels dieses Verfahrens. Praktische Feldmeß- und Nivellierübungen.

I. Im Anschluß an Geometrie und Arithmetik Näherungskonstruktionen der Kegelschnitte. Darstellung von Teilen der Kugeloberfläche (Kartenlehre). Ausdehnung der Projektionsarten auf einfachste Fälle der Schattenlehre.

Berlin. M. Ebner.

Aus der Forschung.

Das „Thermorelais", ein Galvanometer-Mikroskop. — Die natürliche Beobachtungsgrenze der Stromstärke. — Die Brownsche Bewegung aufgehängter Spiegelsysteme. Das Thermorelais. Der Zweck eines Mikroskops, von einem sehr kleinen Gegenstande ein möglichst großes Bild zu entwerfen, wird am besten durch das zusammengesetzte Mikroskop erfüllt. Seine Wirkungsweise beruht auf einer Vergrößerung in zwei Stufen: Das als Projektionssystem wirkende Objektiv entwirft zunächst ein stark vergrößertes Bild des Gegenstandes, und dieses erfährt nun eine zweite Vergrößerung durch das Okular. Grundsätzlich kann auf diese Weise jede beliebige Vergrößerung erzielt werden. Doch ist damit praktisch bekanntlich wenig gedient. Denn bei Vergrößerungen über etwa 2000 verwischen die durch Lichtbeugungen entstehenden Abbildungsfehler die feineren Einzelheiten des Bildes; die Vergrößerung wird „leer".

An diese Verhältnisse wird man durch neue Anordnungen erinnert, welche bezwecken, die Empfindlichkeit einer galvanometrischen Strom- oder besser Spannungsmessung soweit als möglich zu steigern. W. J. H. Moll und H. C.



Burger in *Utrecht*[1]) sowie später F. Zernike in *Groningen*[2]) konnten über recht schöne Erfolge in dieser Hinsicht berichten. Der Grundgedanke dabei ist, den Lichtzeiger eines ersten (primären) Spiegelgalvanometers in geeigneter Weise auf eine empfindliche Thermosäule wirken zu lassen, deren Strom nun ein zweites (sekundäres) Galvanometer zum Ausschlag bringt. Moll und Burger beschränkten sich dabei darauf, durch entsprechende Anordnungen einen 100 mal so großen Ausschlag dieses zweiten Galvanometers zu erzielen gegenüber dem des ersten hochempfindlichen, das diesen Ausschlag steuert; Zernike berichtet, daß mit seiner etwas abweichenden Anordnung der Ausschlag des zweiten Galvanometers sogar 12000 mal so groß gemacht werden kann wie der des ersten, die Stromempfindlichkeit der ganzen Anordnung also auf den 12000 fachen Betrag gebracht gegenüber des ersten Galvanometers allein. In der Natur der Sache liegt es, daß nur äußerst kleine Ausschläge des ersten Galvanometers für eine solche Vergrößerung in Frage kommen, etwa bei einem Skalenabstande von 1 m Verschiebungen des Lichtzeigers von 0,1 mm, also Winkeldrehungen des Galvanometerspiegels von $\frac{1}{2} \cdot 10^{-4}$ in Bogenmaß, d. i. 10 Sekunden in Gradmaß, oder weniger. Moll und Burger beschreiben eine solche Anordnung als *„Thermorelais"*; Zernike möchte sie als *„zusammengesetztes Galvanometer"* bezeichnen. Mehr als eine Parallele legen nahe, sie als *Galvanometer-Mikroskop* zu charakterisieren.

Ein wesentlicher Teil der Anordnung ist das Thermoelement. Moll und Burger verwenden dafür ein etwa 0,5 mm breites und nur 0,001 mm bis 0,0015 mm dickes Metallbändchen $ABCD$, dessen Teile AB und CD aus Konstantan und BC aus Manganin bestehen. Der Streifen ist geschwärzt und



in ein hochevakuiertes Rohr eingeschlossen. Aus diesem heraus wird von A und D aus der Thermostrom zum zweiten Galvanometer geführt. Man läßt nun den Lichtzeiger — oder besser den etwas unscharfen Lichtfleck — des ersten Galvanometers auf den mittleren Teil des Thermoelementes fallen. Am geeignetsten ist es dabei, den Spiraldraht der als Lichtquelle dienenden Glühlampe auf das Thermoelement zu projizieren. Das Thermoelement ist nun verschiebbar angeordnet; durch geeignete Wahl seiner Stellung läßt sich erreichen, daß die Wärmestrahlung des Lichtfleckes die beiden Lötstellen in B und C gleich stark erwärmt. Dann gibt es im Stromkreise des Thermoelementes keine elektromotorische Kraft, das zweite Galvanometer bleibt in Ruhe. Eine geringe Verschiebung des Lichtfleckes aus dieser Symmetriestellung heraus, etwa nach C hin, erwärmt nun die Lötstelle in C stärker als in B, und das zweite Galvanometer schlägt aus. Für kleine Drehungen des ersten Galvanometerspiegels erweisen sich diesen die Ausschläge des zweiten als proportional. Je leistungsfähiger nun das Thermoelement ist und auch je heißer die Glühspirale der Lichtquelle ist, desto größer werden unter sonst gleichen Umständen die Ausschläge des zweiten Galvanometers sein. Durch Einregeln der Heizstromstärke in der Glühlampe läßt sich die Empfindlichkeit der Anordnung auf größere

1) Zeitschr. f. Physik. 34. Bd., S. 109 u. S. 112. 1925.
2) Zeitschr. f. Physik. 40. Bd., S. 628. 1926.

oder kleinere Werte bringen. Wegen der äußerst geringen Masse des Thermoelementes ist dessen Wärmekapazität sehr klein; das hohe Vakuum seiner Umgebung verhindert Abfuhr der Wärme durch Konvektion. Daher nimmt das Thermoelement seinen stationären Wärmezustand sehr schnell an; der Spiegel des zweiten Galvanometers folgt daher rasch dem des ersten in seinen Bewegungen.

Erwähnt sei die bemerkenswerte Tatsache, daß die Methode auch statt eines Mikroskops zur Messung kleiner Strecken geeignet ist. Die geringsten Verschiebungen des Schlittens, auf welchem das Thermoelement ruht, werden in vielfacher Vergrößerung durch Ausschläge des Lichtzeigers vom Galvanometer angezeigt.[1])

Die etwas abweichende Anordnung von Zernike liegt in der Beschreibung noch nicht vor. Er teilt nur mit, daß er den Lichtzeiger des ersten Galvanometers optisch (durch Doppelbrechung) in zwei Teile spaltet, dessen einen Teil er auf die Lötstellen ungerader Ordnungszahl, dessen anderen er auf die Lötstellen gerader Ordnungszahl einer Thermosäule wirken läßt. Diese „Differentialthermosäule" verbindet er dann in ganz entsprechender Weise mit zwei Drehspulen-Galvanometer zu einem *„zusammengesetzten Galvanometer"*; als zweites (sekundäres) von ihnen wählt er dabei ein solches besonders hoher Empfindlichkeit. Die so erzielte Vergrößerung des schließlichen Ausschlages kann so weit getrieben werden, daß die Ablesung einem Ausschlage des ersten Galvanometers allein entspricht, wenn dessen Skala in 6 km Entfernung aufgestellt werden würde.

Die praktische Grenze der Leistungsfähigkeit eines Galvanometers. Wie nun eine zu weit getriebene Vergrößerung des Mikroskops „leer" wird, so machten auch Moll und Burger bei Verwertung ihres „Thermorelais" die Erfahrung, daß die technisch mögliche Steigerung der Empfindlichkeit nur zu einem beschränkten Maße ausgenutzt werden kann. Alle unmittelbaren und mittelbaren Störungen auf dem Spiegel des ersten Galvanometers werden ja durch das Relais mit vergrößert. Schon in der Nullage weist dadurch der Lichtzeiger des zweiten Galvanometers unregelmäßige Schwankungen auf, deren Schwankungsbetrag bei fortgesetzter Empfindlichkeitssteigerung sehr bald den Ausschlag des zu messenden geringen Stromstärkebetrages verdeckt. Auch, wenn alle erkennbaren Störungsursachen, etwa die Erschütterungen durch Schließen einer Tür, durch das Vorüberfahren eines Wagens, unbeabsichtigte Induktionsstöße im Stromkreise, Thermokräfte, vagabundierende Ströme usw. in sorgfältigster Weise durch geeignete Aufstellung und Schutzvorrichtungen vom Galvanometer nach Möglichkeit ferngehalten werden, bei Beobachtung in tiefster Nachtruhe, blieben immer noch Schwankungen des Galvanometerspiegels übrig. Eine photographisch registrierte Ausschlagskurve läßt erkennen, daß die Amplituden dieser unregelmäßigen Restschwankungen einer in den Stromkreis eingeschalteten elektromotorischen Kraft von mindestens 10^{-9} Volt entsprechen. Es ist also unmöglich, auch mit dem Thermorelais Potentialdifferenzen unterhalb 10^{-8} Volt sicher zu messen. Da das erste Galvanometer für sich allein schon eine Empfind-

1) Anläßlich der Tagung des Gaues „Niedersachsen" der Deutsch. Phys. Ges. im Sommer 1926 in Göttingen demonstrierte Zernike ein solches Verhalten; einer Verschiebung des Thermoelementes um 0,1 mm entsprach ein Ausschlag des Lichtzeigers von über 50 cm auf der Projektionsskala.



lichkeit von 10^{-6} Volt besaß, war es also nutzlos, die Empfindlichkeit des „Thermorelais" auf mehr als den 100fachen Betrag zu steigern; jede weitere Vergrößerung des Ausschlages mußte „leer" bleiben.

Diese von Moll und Burger beobachteten, nicht zu beseitigenden Restschwankungen der Galvanometernullage erwiesen sich nachts als ebenso groß wie am Tage; sie hatten eine Periode von etwa 6 Sekunden. Das regte die beiden Forscher an, als Ursache jener Restschwankungen die den Geophysikern wohlbekannte sogenannte *mikroseismische Bodenunruhe* anzusehen. Ihre häufigste Periode liegt zwischen 5—7 Sekunden[1]); gerade dadurch unterscheiden sie sich von künstlichen Erschütterungen des Erdbodens durch industrielle Betriebe usw., welche etwa 100 mal so kleine Perioden aufweisen. Veranlaßt wird diese mikroseismische Unruhe durch das Anprallen von Brandungswellen an felsigen Steilküsten; für einen großen Teil Europas zeigt sie sich besonders im Herbst und Winter, man macht deshalb die durch die Winterstürme veranlaßte Brandung an der Küste Norwegens dafür verantwortlich.[2])

Auch F. Zernike hatte schon früher bei Versuchen, welche denen von Moll und Burger vorangingen, ähnliche Erfahrungen gemacht und jene Restunruhe der Galvanometereinstellung bei höchstgesteigerter Ausschlagsempfindlichkeit nicht erkennbaren Erschütterungen und der mikroseismischen Bodenunruhe zugeschrieben. Er war nun erstaunt, im Sommer 1923 die Schwankungen bei gänzlich veränderter Umgebung in Pasadena in Kalifornien am gleichen Galvanometer ebenso groß zu finden wie vorher in Groningen. Auch beste erschütterungsfreie Aufstellung bzw. Aufhängung änderten daran nichts. Bei späterer Durchsicht der Literatur fand er dann, daß die nicht zu beseitigende Nullpunktsunruhe bei hochempfindlichen Nadelgalvanometern, Radiometern und Radiomikrometern mit ganz leichtem Gehänge eine schon oft beobachtete Tatsache ist, die nicht gestattet, die technisch erreichbare höchste Empfindlichkeit dieser Apparate auszunutzen. So berichtet schon 1901 Langley nach eingehenden Versuchen, daß die Galvanometerempfindlichkeit durch die „zufälligen Ablenkungen" begrenzt sei; auch tonnenschwere Schutzvorrichtungen gegen Erschütterungen hatten nicht den mindesten Erfolg. — Von einer unerwarteten Seite her kam nun für diese praktische Grenze einer Empfindlichkeitssteigerung die überraschende Aufklärung.

Die Brownsche Bewegung eines dünnen Fadens. Die eingehenden Untersuchungen über die sogenannte Brownsche Molekularbewegung[3]) haben gelehrt, daß die Stöße der Moleküle eines flüssigen oder gasförmigen Stoffes infolge ihrer ungeordneten Wärmebewegung auf Körper geringer Masse sehr wohl zu beobachtende Verrückungen der Körper hervorrufen können. Im Verfolge der verschiedenartigen Überlegungen, welche sich an die Aufklärung der Brownschen Bewegung anschlossen, hatte Smoluchowski, der eine theoretische Hauptforscher auf diesem Gebiete, auch die mittlere Verschiebung berechnet, die das freie Ende eines lotrecht herabhängenden Fadens durch die

1) B. Gutenberg, Der Aufbau der Erde. S. 105. Berlin 1925, Gebr. Borntraeger.
2) Siehe z. B. A. Prey, C. Meinka, E. Tams, Einführung in die Geophysik. S. 207. Berlin 1922, Jul. Springer.
3) Siehe z. B. Grimsehl, Lehrbuch der Physik. 6. Aufl. § 184. S. 601. Leipzig 1923, B. G. Teubner.

Molekularstöße erfahren muß. A. Houdijk und P. Zeeman[1]) konnten nun durch Beobachtungen unter den notwendigen Vorsichtsmaßregeln die vorausgesagten Bewegungen an einem 0,001 mm dicken Platindrahte und einem 0,002 mm dicken Quarzfaden die Theorie gut bestätigen.

Das gab wieder die Veranlassung zur Aufklärung von Beobachtungen, die W. Einthoven und seine Mitarbeiter[2]) in Leiden an einer äußerst dünnen gespannten Saite eines Einthovenschen Saitengalvanometers[3]) machten. Zum Zwecke höchster Empfindlichkeitssteigerung versuchten sie Fäden mit Durchmessern von nur etwa 0,1 μ zu verwenden. Um die Dämpfung herabzusetzen mußten die Fäden in einem luftverdünnten Raum untergebracht werden. Hierbei traten aber als neue Störung kleine unregelmäßige Schwingungen des Fadens auf. Es lag nahe, im Anschluß an Zeeman diese Schwankungen als Brownsche Bewegung aufzufassen. Sie erwiesen sich wie diese als weitgehend unabhängig von den äußeren Umständen; *vor allem führte die Abschätzung der mittleren Energie der Bewegung zu der Größenordnung der mittleren kinetischen Wärmeenergie eines Gasmoleküls.* Im höchsten erreichbaren Vakuum zeigten die Fäden nur regelmäßige Eigenschwingungen, falls der Stromkreis nicht geschlossen und der Magnet nicht erregt war. Bei — ohne elektromotorische Kraft — geschlossenem Stromkreise und erregtem Feldmagnet trat aber sofort wieder die unregelmäßige Bewegung des Fadens auf. Das muß elektrisch gedeutet werden: Die freien Elektronen in einem Leiter führen ebenfalls Brownsche Bewegungen aus; daher müssen in einem geschlossenen Leiterkreise auch den Brownschen Bewegungen entsprechende unregelmäßig schwankende kleine elektrische Ströme vorhanden sein, deren mittlere Energie $\frac{1}{2}\overline{i^2}L$ der kinetischen Energie eines Moleküls infolge der Wärmebewegung in einem Freiheitsgrade entspricht. L sei dabei der Selbstinduktionskoeffizient des Stromkreises, $\overline{i^2}$ das mittlere Quadrat jener Stromstärkeschwankung.[4])

So war der Boden vorbereitet, ganz allgemein das Problem der Grenze einer Galvanometerempfindlichkeit unter dem Gesichtspunkte zu betrachten, daß diese durch Brownsche Molekularbewegung des Galvanometerspiegels begrenzt ist. Diese wird einmal durch die unregelmäßigen Stöße der Luftmoleküle bewirkt; bei geschlossenem Galvanometerkreise kommt aber dazu noch die Wirkung der im Stromkreise vorhandenen unregelmäßigen Brownschen Stromschwankungen.

Die natürliche Beobachtungsgrenze der Stromstärke. G. Ising[5]) in Stockholm hat das Verdienst, die Grenze festgestellt zu haben, welche der Empfindlichkeit eines Galvanometers durch die Brownsche Bewegung des Galvanometerspiegels gesetzt ist. Sein Gedankengang ist verhältnismäßig einfach. Nach dem *Satze von der Gleichverteilung der Energie im thermodynamischen Gleichgewicht auf alle Energieparameter, von denen die Energie quadratisch abhängt*[6]), muß

---

1) A. Houdijk und P. Zeeman, The Brownian movement of a Thread. S. 52. Amsterdam 1925, Proc. 28. Phys. Berichte. VII. Jahrg. S. 70. 1926.

2) W. Einthoven, W. F. Einthoven, W. van der Horst und H. Hirschfeld, Physica 5, 358. 1925. (Lorentzheft.) Phys. Berichte, VII. Jahrg. S. 1020. 1926.

3) Siehe z. B. Grimsehl, a. a. O. II. Bd., 5. Aufl. S. 278.

4) Siehe Grimsehl, a. a. O. II. Bd., § 126.

5) Phil. Mag. (7), 1. S. 827. 1926.

6) Siehe Grimsehl, a. a. O. Bd. I., S. 531, S. 1079.

sowohl auf die potentielle Energie wie auf die kinetische des drehbaren Galvanometergehänges ein mittlerer Energiebetrag entfallen, welcher dem dritten Teile der kinetischen Wärmemenge eines Gasmoleküles gleich ist. Setzen wir diese mit $\frac{3k}{2}T$ an, wo T die absolute Temperatur und k die sogenannte Boltzmannsche Entropiekonstante ist[1]), so gilt also zunächst $\frac{kT}{2} = J \cdot \frac{\overline{\dot{\varphi}^2}}{2}$ und $\frac{kT}{2} = \frac{D\overline{\varphi^2}}{2}$, worin noch $\overline{\varphi^2}$ das mittlere Quadrat der Winkeldrehung des Galvanometerspiegels, $\overline{\dot{\varphi}^2}$ sein mittleres Geschwindigkeitsquadrat, J das Trägheitsmoment des aufgehängten beweglichen Systems und D die Direktionskonstante des Aufhängefadens bedeuten. Ising legt seiner Betrachtung ein Drehspulengalvanometer zugrunde, dessen Dämpfung wesentlich elektromagnetischer Natur sei. Dieses sei durch den Ohmschen Widerstand r geschlossen, im Stromkreise herrsche die Stromstärke i. Ist dann noch die Windungsfläche des beweglichen Rähmchens f, die magnetische Feldstärke des Feldes, in welchem es sich bewegt H, und φ der kleine Winkel zwischen der Ebene des Rähmchens und der Richtung des Feldes, so ist ifH das ablenkende Drehmoment. Die durch die Drehung des Rähmchens im magnetischen Felde induzierte elektromotorische Kraft ist $f \cdot H \cdot \dot{\varphi}$, die induzierte Stromstärke $\frac{f \cdot H \cdot \dot{\varphi}}{r}$ und das dadurch verursachte rückwirkende (dämpfende) Drehmoment $\frac{f^2 H^2 \cdot \dot{\varphi}}{r}$. Da noch $D\varphi$ ein zweites rückdrehendes Moment ist, ergibt sich für die Bewegung des Spiegels die Differentialgleichung

$$J \cdot \ddot{\varphi} + \frac{f^2 H^2 \cdot \dot{\varphi}}{r} + D\varphi - if \cdot H = 0.$$

Das allgemeine Integral dieser Gleichung ist für konstantes i

$$\varphi = \frac{ifH}{D}\left(1 - A \cdot e^{-\frac{f^2H^2}{2rJ}t \pm t\sqrt{\left(\frac{f^2H^2}{2rJ}\right)^2 - \frac{D}{J}}}\right).$$

Im ungeschlossenen Galvanometer ist $r = \infty$, $i = 0$ zu setzen; die Differentialgleichung geht dann in die Schwingungsgleichung für die freie Schwingung des Gehänges über und liefert für dessen Schwingungsdauer den bekannten Wert

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{J}{D}}.$$

f, H, r und J seien nun so gewählt, daß der Ausschlag des Galvanometers aperiodisch ist; dann verschwindet der Wurzelausdruck im Exponenten der Formel für φ, und es gilt

$$f^2H^2 = 2rJ\sqrt{\frac{D}{J}} = \frac{2rJ \cdot 2\pi}{\tau}.$$

Damit erhält man, da noch $A = 1$ gesetzt werden muß, um für $t = 0$ $\varphi = 0$ zu machen,

$$\varphi = \frac{i\sqrt{4\pi r \cdot J}}{\sqrt{\tau \cdot D}}\left(1 - e^{-2\pi\frac{t}{\tau}}\right) = i\sqrt{\frac{r \cdot \tau}{\pi D}}\left(1 - e^{-2\pi\frac{t}{\tau}}\right),$$

---

1) a. a. O. S. 597 u. S. 553.

und für den stationären Zustand $t = \infty$

$$\varphi = i\sqrt{\frac{r\tau}{\pi D}}.$$

Die mittlere potentielle Energie des Gehänges infolge der Brownschen Bewegung ist somit $\frac{k \cdot T}{2} = \frac{\overline{\varphi^2} D}{2} = \frac{\overline{i^2} r\tau}{2\pi}$ und $\overline{i^2} = \frac{\pi k T}{r\tau}$.

Hierin bedeutet $\overline{i^2}$ das mittlere Schwankungsquadrat einer Stromstärke, deren Ausschlag der mittleren Verrückung des Galvanometerspiegels aus der Gleichgewichtslage heraus infolge seiner Brownschen Bewegung gleichwertig ist. Stromstärken unterhalb der Größe $\sqrt{\overline{i^2}}$ können somit grundsätzlich nicht mehr gemessen werden. Es wäre also

$$i_0 = \sqrt{\overline{i^2}} = \sqrt{\frac{\pi k \cdot T}{r\tau}}$$

die natürliche Grenze einer jeden galvanometrischen Stromstärkemessung. Bemerkenswert ist an dieser Gleichung, daß an Galvanometerkonstanten in ihr nur die Schwingungsdauer τ des Gehänges auftritt. Im übrigen ist die meßbare Grenzstromstärke von äußeren Umständen weitgehend unabhängig; insbesondere sei bemerkt, daß sie von dem Luftdruck der umgebenden Luft nicht beeinflußt werden kann, solange wir noch die Gasgesetze annehmen dürfen. Es kommt für die mittlere Energie der Drehbewegung des Gehänges eben nur die mittlere Energie der stoßenden Moleküle in Frage, keinesfalls die Zahl der Stöße in der Zeiteinheit.

In längeren Darlegungen erweist nun F. Zernike[1]), daß die von Ising angegebene Gleichung von den zu ihrer Ableitung gemachten speziellen Annahmen unabhängig ist. Im allgemeinen wird das Gehänge nicht nur durch die Stöße der Luftmoleküle Brownsche Bewegung annehmen, sondern auch, wie es Einthoven für die freie Saite seines Galvanometers experimentell nachweisen konnte, durch die Brownschen elektrischen Ströme der unregelmäßigen Elektronenbewegung. Aber das ändert wenig an der Betrachtung. Ist L der Selbstinduktionskoeffizient des Leiterkreises und ist $\overline{i^2}$ nunmehr das mittlere Quadrat der Brownschen Ströme, so muß nach dem angeführten Satze über die Energieverteilung im thermodynamischen Gleichgewicht $\frac{1}{2} L\overline{i^2} = \frac{1}{2} kT$ sein. Günstigstenfalls kann diese Energie dem Gehänge als mechanische Energie zugeführt werden; das Gehänge erhält dann nur in der Zeiteinheit einige Stöße mehr als ohne die Wirkung der Brownschen Ströme. Es muß sich also dann so verhalten, als befände es sich in Gas von höherem Druck; aber vom Drucke ist seine mittlere Energie ja vollständig unabhängig.

Setzt man in die Isingsche Gleichung die Zahlenwerte für 18° C ein: $T = 291$, $k = 1{,}372 \cdot 10^{-16}$ [2]) und rechnet i in Ampere $= 0{,}1$ el.-magn.-Einh., r in Ohm $= 10^7$ el.-magn.-Einh., so erhält man

$$i_0 = \frac{1{,}12 \cdot 10^{-10}}{\sqrt{r \cdot \tau}} \quad \text{Ampere.}$$

---

1) Zeitschr. f. Phys. a. a. O.
2) Siehe Grimsehl, a. a. O., I. Bd. S. 1088.

Solange die Schwingungsdauer τ eines Galvanometers also größer als eine Sekunde und der in den Stromkreis eingeschaltete Widerstand r größer als ein Ohm ist, kann man Stromstärken der Größenordnung 10^{-10} *Ampere aus thermodynamischen Gründen nicht mehr messen.*

Indem Zernike verlangt, daß die thermodynamische Unruhe der Nullpunktslage einen Betrag von 0,07 mm auf der Skala des Lichtzeigers nicht überschreiten darf, wenn die Messung nicht als gestört empfunden werden soll, berechnet er für die schon längst bekannten Meßinstrumente folgende Nullpunktsschwankungen:

Instrument	Direktionskraft D	Schwankung in 1 m Entfernung	Höchstzulässige Skalenentfernung
Gewöhnliches Drehspulengalvanometer.	1	0,4 μ	180 m
Höchstempfindliches Drehspulengalvanometer	0,03	7 μ	10 m
Höchstempfindliches Nadelgalvanometer	$4 \cdot 10^{-6}$	0,2 mm	35 cm

Die Tabelle enthält das erstaunliche Ergebnis, *daß die Brownsche Molekularbewegung der Gehänge bei den empfindlichsten Nadelgalvanometern schon längst beobachtet sein muß, aber bisher nicht erkannt worden ist.* Die Restunruhe der Nullage bei den Langleyschen Bemühungen ist offenbar weiter nichts als Brownsche Molekularbewegung gewesen, ebenso bei den späteren Versuchen anderer Forscher, die Empfindlichkeit ihrer Meßinstrumente zu steigern. Mit der mikroseismischen Bodenunruhe haben diese Schwankungen nichts zu tun. Eine Angabe Abbots, der die Langleyschen Messungen fortführte, er habe einen Strom von 10^{-12} Ampere nachweisen können, beruht nach den Maßangaben für das Trägheitsmoment seines Systems offenbar auf einem Irrtum, ebenso ähnliche Angaben anderer. *Seit etwa 1900 ist die natürliche Beobachtungsgrenze der Stromstärke erreicht.*

Bietet so die Aufklärung der Frage nach der Ursache der Restunruhe eine hohe wissenschaftliche Befriedigung, so öffnet sich gleichzeitig ein Ausblick für die Möglichkeit mancher neuen experimentellen Forschung. Insbesondere ist es vielleicht möglich, den Äquipartitionswert der Energie im thermodynamischen Gleichgewicht, den die Perrinschen Untersuchungen über die Brownsche Molekularbewegung mit nicht ganz zufriedenstellender Genauigkeit ergaben, dem Werte nach sicherer zu bestimmen. Schon konnte Zernike berichten, daß er den Äquipartitionswert der Stromschwankungen $\frac{1}{2} L \overline{i^2}$ experimentell in der Tat gleich $\frac{1}{2} k T$ gefunden habe.

Bestätigung von anderer Seite. Im Kerne gelten die Überlegungen für jedes Meßinstrument mit drehbarem aufgehängten Spiegelsystem, insbesondere für die Drehwagen-Dynamometer. W. Gerlach und L. Lehrer[1]) können schöne Beobachtungen mitteilen, welche sie an einer solchen höchst empfindlichen Drehwage gemacht haben; das Trägheitsmoment des Gehänges war dabei so klein, daß die unregelmäßigen Schwankungen der Einstellung in $1^1/_2$ m Skalenabstand

1) Naturwissenschaften XV. Jahrg., 1. Heft, S. 15. 1927.

sogar einige Zentimeter betrugen. Unter der Voraussetzung, daß sie allein von der Brownschen Bewegung des Gehänges herrühren, berechnete sich theoretisch eine mittlere Verschiebung von $\sqrt{(\delta x)^2} = 0,868$. Beobachtet wurde bei veränderlichem Luftdruck der Umgebung des drehbaren Systems:

Druck in mm Quecksilber	740	186	0,1	0,02	0,005	0,002	0,001
Mittlere Verschiebung $\sqrt{(\delta x)^2}$	Mittel 0,819	0,901	Mittel 0,892	0,896	Mittel 0,801	0,919	0,832

In Anbetracht der unsicheren Mittelwertbildung bei nicht außerordentlich großen Beobachtungsreihen ist also die Übereinstimmung recht befriedigend und beweist vor allem, daß in der Tat das mittlere Schwankungsquadrat in sehr weiten Grenzen vom Druck der umgebenden Luft unabhängig ist.

Hamburg. W. Hillers.

Persönliches.

Eduard Götting †. Am 18. Dezember 1926 starb in Göttingen der Professor am staatlichen Gymnasium Eduard Götting. Geboren in Eschwege am 7. Februar 1860 als Sohn eines Wagnermeisters[1]), besuchte er nacheinander die Bürgerschule und das Progymnasium seiner Heimatstadt, dann das Gymnasium Hersfeld. Von Ostern 1880 an studierte er Mathematik und Naturwissenschaften in Berlin und Göttingen; unter seinen Lehrern nenne ich Lotze, Riecke, Schering, H. A. Schwarz. 1884 bestand er das Staatsexamen und erhielt die Lehrbefähigung in Mathematik, Physik, Mineralogie, Botanik und Zoologie. Drei Jahre später promovierte er mit einer Dissertation über Minimalflächen, die aus dem Arbeitskreise von H. A Schwarz stammte, dessen Seminar er mehrere Semester als Mitglied angehört hatte. Inzwischen hatte er am Gymnasium in Göttingen sein Probejahr erledigt und war nach zweijähriger Tätigkeit als wissenschaftlicher Hilfslehrer 1887 zum ordentlichen Lehrer ernannt worden. Bis Ostern 1924 hat er an dieser Anstalt gewirkt, im letzten Jahre mehrfach in seiner Unterrichtstätigkeit durch schwere Krankheit gehemmt. Dann wurde er — unbegreiflicherweise — mit den vielen anderen „abgebaut", er, dem der mathematische Unterricht seiner Anstalt, Deutschlands, ja über Deutschlands Grenzen hinaus unendlich viel verdankt.

Göttings Name ist mit der mathematischen Reformbewegung und mit den Meraner Vorschlägen aufs engste verknüpft. Als Klein um 1900 herum infolge seiner intimeren Beschäftigung mit den Fragen des mathematischen Unterrichts, die durch die Teilnahme an der großen Schulkonferenz ausgelöst worden war, Anschluß an die Erfahrungen praktischer Schulmänner suchte, ergab sich sehr bald eine Zusammenarbeit mit Götting. War Klein selbst wohl in erster Linie durch ausländische, namentlich französische Einflüsse dazu gekommen, „eine zeitgemäße Umgestaltung des mathematischen Unterrichts an höheren Schulen" — so der Titel eines von ihm 1904 auf einem Göttinger Ferienkurs gehaltenen Vortrags — anzustreben, so ging Götting von eigenen

1) Die Angaben über Göttings äußeren Lebensgang verdanke ich Herrn Trommsdorff-Göttingen.

praktischen Erfahrungen aus. Er hatte im mathematischen Unterricht an dem dem Gymnasium angegliederten Realgymnasium den Funktionsbegriff stärker betont und war in den Schlußklassen bis zur Infinitesimalrechnung in anschaulicher Behandlung vorgeschritten. Wie weit er dabei von den Bestrebungen beeinflußt war, die an anderen Stellen in gleicher Richtung gingen — in Berlin, Wiesbaden, Hamburg, Güstrow in Mecklenburg, um nur einige zu nennen —, ja die sogar in Lehrbüchern gar nicht so selten ihren Ausdruck gefunden hatten, ist mir nicht bekannt.

Jedenfalls erschien nun gleichzeitig mit einer Abhandlung von Klein auch von Götting ein Aufsatz in dem Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-vereinigung Bd. 11 (1902), S. 189 ff.: Über das Lehrziel im mathematischen Unterricht der höheren Realanstalten. Beachtenswert ist hier, daß man zuerst nur den Schritt zu den Realanstalten wagte; es wurde geradezu hervorgehoben, daß in der Erschließung der Infinitesimalrechnung ein besonderes spezifisches Lehrziel der Realanstalten liegen sollte.

Im Fortgange der Reformbewegung hat man sich dann überzeugt, daß es sich nicht um die besondere Zielgestaltung einer einzelnen Schulgattung, sondern um ein allgemeines mathematisches Unterrichtsziel handelt. So finden wir 1904 in dem bereits genannten Vortrag von Klein die Forderung auf alle Schulgattungen ausgedehnt.

Inzwischen gingen Göttings praktische Versuche weiter. Er dehnte seine Ideen auf das Gymnasium aus, er gewann seinen Kollegen Behrendsen für die neuen Gedanken, und man kam zur Aufstellung eines regelrechten Lehrplanes. Behrendsen, die impulsivere Natur, nicht so sehr Mathematiker als Physiker, war zunächst den Reformgedanken durchaus abgeneigt und gab dem in seiner forschen Art unzweideutig Ausdruck. Der ruhigen, sicheren Art Göttings gelang es, aus dem Saulus einen Paulus zu machen. Von da ab haben die beiden grundverschiedenen Männer zusammen gearbeitet, von Zeit zu Zeit einmal aufbrausend der eine, besänftigend der andere — bis der Tod zuerst O. Behrendsen hinwegraffte.

Der am Göttinger Gymnasium aufgestellte Lehrplan wurde von Klein der Unterrichtskommission der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte vorgelegt; aus ihm entstand mit wenigen Abänderungen, die zudem nicht immer glücklich waren, der als Musterbeispiel in dem der Naturforscherversammlung in Meran vorgelegten Bericht gegebene Lehrplan eines Gymnasiums.

Aus dem Unterricht von Götting und Behrendsen erwuchs dann ein „Lehrbuch der Mathematik nach modernen Grundsätzen". Die Herausgabe des Werkes verzögerte sich recht lange. 1908 gab mir Klein eins der ersten Exemplare der Unterstufe, die er auf die Naturforscherversammlung in Köln mitbringen konnte; es trägt die Jahreszahl 1909. Die Oberstufe erschien erst 1912.

Inzwischen waren praktische Erfahrungen an den verschiedensten Stellen gemacht worden. Außer dem Gymnasium in Göttingen erhielten das Gymnasium in Hann. Münden, das Realgymnasium in Düren, die Oberrealschulen in Kiel, wo Bär Direktor war, und Königsberg i. Pr., wo Schülke als Mathematiker wirkte, vom Minister die Erlaubnis zur Erprobung der Meraner Pläne. Düren, Kiel und Königsberg haben über ihre Ergebnisse berichtet. Aber neben diesen offiziellen Probeanstalten gab es eine beträchtliche Anzahl anderer inoffizieller.

Es erschienen schon vor der Unterstufe des Buches von Götting und Behrendsen kleinere Darstellungen der Infinitesimalrechnung, so 1906 von Lesser. Als Frucht der praktischen Erfahrungen von Lesser und Schwab an der Klinger-Oberrealschule in Frankfurt a. M. erschien ein Unterrichtswerk, dessen Oberstufe bereits drei Jahre vor derjenigen von Götting und Behrendsen vorlag. Meine eigenen Versuche an der Wupperfelder Oberrealschule in Barmen, die später zur Herausgabe erst des „Reformbardey", dann eines Unterrichtswerkes führten, setzten 1906 ein. Einen Überblick über den damaligen Umfang der von Klein und Götting angeregten mathematischen Unterrichtsreform in ihrer lehrplanmäßigen Auswirkung habe ich 1910 in einem IMUK-Bericht gegeben (Bd. I, Abh. 2).

Auf der Studienreise, die ich 1909 zur Vorbereitung dieses Berichtes machte, besuchte ich auch den Unterricht von Götting und Behrendsen. Ich kannte beide Männer von meiner Göttinger Studienzeit her; im Mathematischen Verein waren wir oft zusammengetroffen. Nun sah ich sie als Lehrer vor ihrer Klasse. Selten wohl wirkten an der gleichen Anstalt als Vertreter der gleichen Fächer zwei im Temperament so verschiedene Naturen, und doch im gleichen Sinne. Es wäre eine Unterlassungssünde, dabei nicht auch des jungen, früh verstorbenen Schimmack zu gedenken, des fleißigen und gründlichen Mitarbeiters von Klein, der, nicht selten in taktvoller Weise vermittelnd, neben den beiden älteren wirkte.

Götting hat sich über seinen Anteil an der mathematischen Reformbewegung in seiner bescheidenen Art im Jubiläumsheft dieser Zeitschrift (**50** [1919], S. 40 ff.) geäußert. Es ist das eine seiner wenigen didaktischen Arbeiten, die er veröffentlicht hat. Aus späterer Zeit nenne ich noch eine Abhandlung über die Exponentialfunktion (diese Zeitschrift **51** [1920], S. 53 ff.). Sonst hat er seine Zeit der Ausgestaltung seines Lehrbuches gewidmet, das in Ausgaben für Gymnasien, für Realanstalten und für höhere Mädchenschulen in zahlreichen Auflagen erschienen ist. Er verfolgte sorgfältig die neuere didaktische Literatur; davon geben zahlreiche Besprechungen in den Unterrichtsblättern und in der Physikalischen Zeitschrift Zeugnis. Gelegentlich findet sich auch ein Bericht über eine Versammlung des Förderungsvereins oder über einen Göttinger Ferienkurs.

Zur Mitarbeit an den Göttinger Ferienkursen wurde Götting schon sehr früh von Klein herangezogen. Auch hier wirkte seine ruhige, überzeugende Art auf die weither gekommenen Kollegen eindringlicher als die stürmische Weise von Behrendsen.

Götting hat auf diesen Kursen nicht nur über Mathematik vorgetragen, sondern mindestens ebensooft auch über Physik. Er hat sogar nach Rieckes Tode an der Universität die Vorlesung über Experimentalphysik vertretungsweise gehalten. Ja, man kann zweifelhaft sein, ob Göttings Liebe mehr der Mathematik oder der Physik galt; ganz sicher ist diese Bevorzugung der Physik bei Behrendsen, den zudem starke künstlerische Neigungen auszeichneten. Jedenfalls steckt im physikalischen Institut des Göttinger Gymnasiums, das mit bescheidensten Mitteln geschaffen, fast bei jedem Ferienkurse sich aufs neue als ein wertvoller Schatz erwies, ein gut Teil der Lebensarbeit der beiden Fachgenossen. So wird auch verständlich, daß Götting seit 1906 das vielbenutzte physikalische Lehrbuch von Heussi bearbeitete.

Unsere Darstellung des Lebenswerkes von Götting, dessen Verkettung mit dem Wirken von O. Behrendsen sich von selbst ergeben hat — wie im Buchtitel wird man beide Namen wohl immer nebeneinander nennen —, hat schon mehrfach Gelegenheit gegeben, neben dem Schulmanne des Menschen zu gedenken. Götting hat viel Leid erfahren, der Krieg raubte ihm zwei Söhne, sein Alter war durch schwere Erkrankungen getrübt. Sein Leben aber bedeutete vielen Menschen reichen Gewinn. Seinen Schülern war er der liebste Lehrer, seinen Kollegen und den ihm Nahestehenden ein hilfsbereiter Freund, er war ein Förderer der Musik, Meister vom Stuhl in seiner Loge, ein angesehener Mann in der Stadt seines Wirkens — und keines Menschen Feind.

Göttingen. W. Lietzmann.

Bücherbesprechungen.

Die Preise der besprochenen Bücher sind nach den Mitteilungen der Verlagsanstalten im Erscheinungsmonat angegeben. Da die Buchhandlungen sich Änderungen vorbehalten, kann keine Sicherheit dafür geboten werden, daß die angegebenen Preise auch heute noch gelten.

G. A. Bliss, Calculus of variations. Chicago (The Open Court Publishing Company) 1925. XIII und 189 S., 19 × 13 cm. 2 $.

Das schmucke blaue Büchlein eröffnet die Reihe der „Carus Mathematical Monographs“, welche auf Grund einer Stiftung von Frau Mary Hegeler Carus durch die Mathematical Association of America herausgegeben werden. Aufgabe der ganzen Sammlung ist nach dem Wunsche von Frau Carus, mathematische Bildung „as contributory to exact knowledge and clear thinking“ in möglichst weiten Kreisen zu verbreiten, nicht nur unter Wissenschaftlern und Lehrern, sondern vor allem auch unter den vielen, die bescheidene mathematische Schulkenntnisse auffrischen und erweitern wollen. Gewiß ein Unternehmen, dem man auch anderswo als in Amerika Mäzene wünschen möchte!

Es mag als ein eigentümliches, freilich sicher nicht beabsichtigtes Zusammentreffen erscheinen, daß das erste Bändchen der Sammlung gerade der Variationsrechnung gewidmet ist. Ist doch dieses Gebiet der Mathematik sogar in den Kreisen der Fachmathematiker heute noch bei weitem nicht in dem Maße bekannt und gewürdigt, wie es seiner überragenden Bedeutung nach der Fall sein sollte. Umsomehr muß diese von einem genauen Kenner mit großer Sorgfalt und dem deutlich hervortretenden liebevollen Bemühen, den Zwecken der Sammlung gerecht zu werden, geschriebene übersichtliche Einführung in die klassische Variationsrechnung begrüßt werden. Sie bleibt zudem nicht bei den ersten Elementen stehen, sondern führt erfreulich weit. Dabei ist die Darstellung trotz dem geringen Umfange des Buches behaglich und angenehm lesbar. Stufenweise steigt sie zu immer größerer Allgemeinheit empor. Bliss bringt, was vom pädagogischen Standpunkte aus als recht geschickt bezeichnet werden kann, keineswegs von Anfang an allgemeine Theorie. Vielmehr beginnt er nach der geschichtlichen Einleitung des 1. Kapitels, in welchem er, ausgehend von der Theorie der Maxima und Minima, typische Probleme der Variationsrechnung (kürzeste Entfernung zweier Punkte, Drehfläche von kleinster Oberfläche, Drehfläche geringsten Widerstandes, Brachistochrone, isoperimetrisches Problem) nebst ihrer mathematischen Formulierung aufzählt und insbesondere des Einflusses der Brüder Bernoulli gedenkt, zunächst mit drei ausgewählten Beispielen. Bei diesen Beispielen, deren jedes ein Kapitel für sich ausfüllt, läßt sich alles bis in die Einzelheiten übersehen und durchrechnen. Die allgemeine Theorie im 5. Kapitel erscheint dann als eine naturgemäße und dem Leser selbst erwünschte Erweiterung und Verallgemeinerung, während bekanntlich sonst eine Hauptschwierigkeit beim Eindringen in ein mathematisches Gebiet in der Neuheit und der typisch modernen Abstraktheit von Begriffen und Definitionen liegt, für welche Tragweite und Bedeutung nicht von vornherein überschaut werden können.

Im einzelnen behandelt das 2. Kapitel kürzeste Entfernungen in der Ebene, zunächst zwischen zwei festen Punkten, wobei ein Minimalproblem der

gegenüber dem allgemeinen Typus $\int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')\,dx =$ min wesentlich vereinfachten Gestalt $\int_{x_1}^{x_2} f(y')\,dx =$ min vorliegt. Als Vergleichsfunktionen werden, wie im ganzen Buche, stückweise glatte, d. h. stetige und mit stückweise stetiger Ableitung versehene Funktionen zugelassen. Ein erster Hinlänglichkeitsbeweis dafür, daß die nach dem Fundamentallemma der Variationsrechnung gefundene geradlinige Verbindung der beiden Punkte wirklich ein Minimum der Entfernung liefert, ergibt sich durch unmittelbares Ausrechnen, wobei das Erfülltsein der Legendreschen Bedingung die Hauptrolle spielt. Ein zweiter Hinlänglichkeitsbeweis gründet sich auf den bereits hier eingeführten Weierstraß-Kneserschen Feldbegriff und das Hilbertsche invariante Integral; das aus parallelen Geraden bestehende Extremalenfeld ist besonders einfach zu studieren. Dann folgen der kürzeste Abstand eines festen Punktes von einer gegebenen Kurve (die in einem schönen, durch Figuren veranschaulichten Beispiel insbesondere als Ellipse gewählt wird) mit dem Auftreten der Jacobischen Bedingung, sowie der kürzeste Abstand von zwei gegebenen Kurven. Hier wäre es m. E. gut, das Hauptgewicht der Darstellung mehr auf das Wort „Einhüllende" als auf das Wort „Evolute" zu legen. In Fig. 6 fehlt der wichtige Buchstabe N; eine Figur, welche den durch die Jacobische Bedingung ausgeschlossenen Fall verdeutlicht, würde das Verständnis sehr erleichtern. Auch könnten die Begriffe Brennpunkt, der hier unmittelbare physikalische Bedeutung hat, und Transversalität erwähnt werden. Überhaupt könnte das 2. Kapitel durch engere Verknüpfung mit Späterem noch gewinnen.

Im 3. Kapitel über die Brachistochrone, die Kurve kürzester Fallzeit von einem gegebenen Punkte zu einem anderen, nicht in derselben Senkrechten befindlichen (die Stellung des entsprechenden Problems durch Johann Bernoulli 1696 bildet den eigentlichen Ausgangspunkt der Variationsrechnung) treten die Eulersche Differentialgleichung und der Begriff der Extremalen zum ersten Male explizit auf. Bei dem Ergebnis, daß ein Extremalenbogen keine Ecken aufweist, könnte zweckmäßig auf die späteren Verallgemeinerungen im 5. Kapitel (Weierstraß-Erdmannsche Eckenbedingung, Hilbertsche Differenzierbarkeitsbedingung) verwiesen werden. In anziehender Weise erfahren wir aus eigenen Aussprüchen der Brüder Bernoulli ihr Staunen, die kurz vorher von Huygens, z. B. mit dem Erfolge der Entdeckung des Zykloidenpendels, eingehend untersuchte Zykloide nun auch als Brachistochrone auftreten zu sehen. Daß die als Extremalen erscheinenden Zykloiden ein Feld bilden, wird geometrisch nach Schwarz bewiesen. Für den bei der Brachistochrone von einem festen Punkt nach einer gegebenen Kurve hereinkommenden Brennpunkt findet man eine hübsche geometrische Konstruktion von Barnett, welche in Analogie zu einer entsprechenden Konstruktion von Mary Sinclair aus dem 4. Kapitel steht. In Fig. 12 des 3. Kapitels fehlt der Buchstabe C; auch ist X statt x gedruckt.

Das 4. Kapitel über Drehflächen kleinster Oberfläche ist besonders reizvoll. Hier muß schon bei festen Endpunkten die Jacobische Bedingung berücksichtigt werden. Für den konjugierten Punkt wird die schöne geometrische Konstruktion von Lindelöf gegeben, welche bei der Betrachtung des Extremalenfeldes gute Dienste leistet. Beim absoluten Minimum kommen Untersuchungen von Mac Neish über die Kurve, welche den Bereich der Ebene, wo die Kettenlinie das absolute Minimum liefert, von dem Bereich trennt, wo es die Goldschmidtsche gebrochene Lösung tut, zur Sprache. Am Schlusse des Kapitels plaudert der Verfasser über allerhand interessante theoretische und experimentelle Seifenblasenprobleme. In Fig. 25, 29 und 35 sollte die Einhüllende G die Abszissenachse berühren; Fig. 34 könnte vielleicht durch eine weniger unwahrscheinlich aussehende Figur ersetzt werden. Unbedingte Erwähnung hätte m. E. das mit dem behandelten Variationsproblem eng verwandte Problem möglichst tiefer Schwerpunktslage für eine Kurve von gegebener Länge verdient, durch welches die Kettenlinie ja geradezu definiert werden kann.

Nach den Beispielen schreitet das 5. Kapitel zur allgemeinen Theorie fort. Die notwendigen Bedingungen: Eulersche Differentialgleichung, Weierstraßsche E-

Bedingung, Legendresche Bedingung, Jacobische Bedingung sowie Weierstraßsche hinreichende Bedingungen werden erst aufgezählt und dann bewiesen, wobei das Hilbertsche invariante Integral das Haupthilfsmittel bildet. Aus der integrierten Form der Eulerschen Differentialgleichung werden die Weierstraß-Erdmannsche Eckenbedingung und Hilberts Differenzierbarkeitsbedingung gezogen. Es folgen Kriterien für konjugierte Punkte, Erörterungen über starke und schwache relative Minima, die Jacobische Differentialgleichung, Transversalitätsbedingungen.

Den Beschluß des Buches bilden eine geschichtliche Zusammenfassung, wobei auch das einzige Mal im Buche das Symbol δ erwähnt wird, ein Literaturverzeichnis, Anmerkungen und ein vorzügliches Sachregister.

Bei aller Anerkennung der Vorzüge des Buches darf ein prinzipieller Einwand nicht verschwiegen werden. Es kommt m. E. nicht genügend zur Geltung, daß das Buch nur eine Auffassungs- und Behandlungsweise der Variationsrechnung, die gemeinhin durch das Wort „klassisch" umschriebene, die Probleme auf Differentialgleichungen hinausspielende bringt. Die direkten Methoden, welche gewiß die fruchtbarsten Keime für die Weiterentwicklung der Variationsrechnung in sich tragen, werden demgegenüber nicht erwähnt, auch nicht im Literaturverzeichnis; der Name Walther Ritz tritt nirgends auf. Auch von der für unser ganzes physikalisches Weltbild so wichtigen Hamiltonschen Theorie, vom Dirichletschen Prinzip u. ä. ist nicht die Rede. Ich meine natürlich nicht, daß diese Dinge im einzelnen hätten ausgeführt zu werden brauchen. Aber vielleicht hätte sich doch, z. B. durch Kürzung der immer wesentlich in gleichen Bahnen sich wiederholenden Erörterungen über das Hilbertsche invariante Integral im 2. bis 4. Kapitel, Platz schaffen lassen, jene Probleme wenigstens im großen zu umschreiben, gerade weil sich die Darstellung nicht an Spezialisten, sondern an einen weiteren Kreis wendet. Jetzt wird der Durchschnittsleser vielleicht den Eindruck gewinnen — ein Eindruck, der durch die sonst so erfreuliche starke Betonung der Beispiele noch verstärkt wird, — daß die Variationsrechnung ein Anwendungsfeld für geläufige analytische Überlegungen in feinster Zuspitzung, ein Teilgebiet der Mathematik wie etwa die Theorie der Integralgleichungen ist. Ich weiß nicht, ob ihm die Erkenntnis aufgehen wird, daß die Grundideen der Variationsrechnung von beherrschender Bedeutung für die gesamte Mathematik und mathematische Physik sind.

Göttingen-Kopenhagen. ALWIN WALTHER.

Mathematisches Unterrichtswerk für höhere Knabenschulen. Herausgegeben von Dr. W. Lietzmann.

B. Fischer, Rechenbuch. 3 Teile. I. Teil, Lehrstoff der Sexta. Mit 17 Fig. im Text. II. Teil, Lehrstoff der Quinta. Mit 36 Figuren im Text. III. Teil, Lehrstoff der Quarta. Mit 3 Figuren im Text. 4. verb. Aufl. Leipzig 1926, B. G. Teubner. I. u. III. Teil kart. je *RM* 2.—, II. Teil kart. *RM* 2.20.

Dieses Rechenbuch ist geeignet, den alten in weiten Kreisen noch immer breit getretenen Satz, als komme in der Didaktik alles Heil von der Volksschule und alles Unheil von der höheren Schule, zu widerlegen. Im Gegenteil, das Volksschulrechnen könnte aus diesem auf dem Boden der höheren Schule gewachsenen Buch sehr viel lernen, zumal neuerdings, wo die Volksschule in Anspruch nimmt, die Vorbereitungsanstalt nicht nur für die Sexta jeder Art von höherer Schule, sondern auch für die Untertertia der Aufbauschule zu sein und damit eine gewisse Verantwortung auch für das Gedeihen des mathematischen Unterrichts im engeren Sinn auf sich nimmt.

Rein äußerlich fällt an der neuen Auflage in allen Bänden die Verbesserung des Druckes auf, ferner die Erweiterung der Tabellen am Schluß eines jeden Bandes, schließlich und vor allem die Anfügung eines sogenannten Sachverzeichnisses hinter der Inhaltsangabe von überlieferter Form, auch wieder in jedem Teil. In diesem Sachverzeichnis sind die angewandten Aufgaben nochmals nach Sachkreisen außerordentlich ausführlich gruppiert. Die Tabellen beziehen sich auf die Maßeinheiten, auf Familien- und Privatwirtschaft, Berufs- und Verkehrsleben (z. B. Posttarif), Deutschlands Verluste durch den Frieden von Versailles, Astronomisches und Physikalisches, im 3. Band dazu auf den Geldmarkt. Das Sachverzeichnis zeigt folgende

Unterabteilungen: I. Handel und Industrie, Wirtschaft und Technik, Geld- und Verkehrswesen, II. Mathematisches und Astronomisches, insbes. geometrische und arithmetische Aufgaben, III. Tägliches Leben, insbes. des Schülers und allgemein des Menschen, IV. Zahlen, insbes. Maßeinheiten, Messen, Zählen, Statistisches, Zeitbegriff. Es bildet für Rechenbücher eine Neuerung, die die Herstellung von Querverbindungen mit anderen Fächern sehr erleichtert.

Bezüglich des reinen Zahlenrechnens wird überall das Lehrverfahren des Arbeitsunterrichts, nach dem die Schüler möglichst alles selbst erarbeiten sollen, eingehalten, aber auch nirgendwo in unangemessener Weise überschritten. Dies ist besonders auffällig im 1. Teil des II. Bandes, wo die Schüler angeleitet werden, eine ganze Reihe von Teilbarkeitsregeln, dann auch das Sieb des Eratosthenes und die sogenannte Primzahlregel des Leonardo von Pisa (beides ohne Namennennung) selbst zu finden, wo aber z. B. die Teilbarkeitsregel für 11 direkt gegeben wird. Die Bruchrechnung ist unter Anwendung der gleichen Grundsätze auf einem Minimum von Definitionen und Formalismus aufgebaut. Auch die Rechenkunststücke und sonstigen reinen Denkaufgaben sind so angelegt, daß der Schüler angeregt wird, neue ähnliche Aufgaben selbst zu finden.

Die angewandten Aufgaben greifen, wie schon obiges Sachverzeichnis beweist, in alle Verhältnisse des Lebens ein, ohne die Fassungskraft des Schülers zu überschreiten. Die zahlreichen Tabellen geben dem Lehrer Gelegenheit, neue Aufgaben nach eigenem Ermessen in beliebiger Anzahl zu bilden oder von den Schülern bilden zu lassen. Unter den angewandten Aufgaben fallen wieder diejenigen auf, die einen bestimmten kleinen Ausschnitt von allen Seiten beleuchten, so im I. Band die Aufgaben über den Dampfer Imperator, über die Getreideernte in Deutschland vor dem Krieg, im III. Band über das deutsche Geld der Vorkriegszeit und über den „eisernen Arbeiter“.

Verständnis für das abgekürzte Rechnen wird allmählich herbeigeführt. Die Vorbereitung auf den algebraischen Unterricht durchzieht alle drei Bände gleichmäßig und in andauernder Steigerung, desgleichen eine Art von anschaulicher Geometrie, wie sie ja nach den Richtlinien schon für das Pensum der Sexta mit Rücksicht auf die Erdkunde vorgeschrieben ist.

Die Verwendung von Strecken und Flächen zur Veranschaulichung von Zahlengrößen tritt von der ersten Seite des I. Bandes an hervor und steigt im weiteren Verlauf bis zur geometrischen Darstellung von Zahlenreihen, z. B. im Lehrplan der Quinta, wo die Abhängigkeit des Stammbruchwerts von der Größe des Nenners zum Ausdruck gebracht ist, und zum Studium graphischer Darstellung empirischer Funktionen.

Auch allbekannte Scherzaufgaben und geschichtliche Aufgaben sind über das ganze Buch zerstreut, ich nenne die Geschichte vom Derwisch mit seinen Kamelen, die Aufgaben über Maße und Gewichte des Altertums, über magische Quadrate, z. B. das Quadrat Albrecht Dürers und die Erwähnung von Adam Ries. Ich persönlich hätte allerdings gern gesehen, wenn auf dem Gebiet der Geschichte noch etwas mehr geschehen wäre; in richtige Form gekleidet können auch rein historische Angaben, z. B. über Eratosthenes und Leonardo von Pisa, den Quintaner schon interessieren und so zur Schaffung von Querverbindungen dienen. Selbst Zahlenmystik läßt sich verwenden, ich erinnere z. B. an Alkuins Studium von Ev. Joh. XXI, 11. (Vgl. Siegm. Günther, Geschichte des mathem. Unt. im deutschen Mittelalter, S. 82.) Vielleicht bleibt dies einer der zahlreichen Neuauflagen vorbehalten, die ich dem schönen Werk von Herzen wünsche.

Düsseldorf. E. Fettweis.

Müller-Schmidt-Made, Rechenbuch für höhere Mädchenbildungsanstalten. Heft 4, 5, 12. Aufl., 1926. Kart. je *RM* 1.20. Heft 6, 11. Aufl., 1925. Kart. *RM* 2.—. Heft 7, 3. Aufl. Leipzig 1924, B. G. Teubner. Kart. *RM* 1.80.

Der Stoff hat infolge des Wegfalls der Klasse 7 und durch die neuen Lehrpläne eine Verschiebung insofern erfahren, als jetzt Heft 4 den Lehrstoff für Klasse 6 und nicht wie bisher für Klasse 7, Heft 5 dementsprechend den Stoff für Klasse 5 und Heft 6 den Stoff für Klasse 4 enthält. Heft 7 bringt schwierigere Aufgaben aus



den bürgerlichen Rechnungsarten und soll als Wiederholungsbuch für U III und O III, besonders für U II b dienen.

In Heft 4 ist ein Kapitel Wiederholungsaufgaben über den Haushalt der Familie hinzugefügt zu dem Zweck „jüngeren, vielleicht noch unerfahrenen Lehrern einen Fingerzeig zu geben, in welcher Weise die Eigentätigkeit der Schülerinnen mobil gemacht werden kann". In Heft 5 ist im Anschluß an die neuen Vorschriften ein Kapitel über den Haushalt der Gemeinde hinzugekommen. Entsprechend sind in Heft 6 das abgekürzte Rechnen mit Dezimalbrüchen und Tabellenrechnungen hinzugefügt. Angenehm berühren der klare Druck und das saubere Papier von Heft 4—6, im Gegensatz zu Heft 7, das ja schon 1924 erschien. Durch das ganze Werk zieht sich das Bestreben, alles zur vollen Klarheit zu bringen, die Aufgaben dem Verständnis und Interesse der Schülerinnen anzupassen und lebenswahr zu gestalten, den mathematischen Unterricht in gründlicher Weise vorzubereiten und sich überhaupt in jeder Weise den Forderungen und den berechtigten Wünschen der Richtlinien anzupassen. Was mir persönlich nicht gefällt, was aber vielleicht Ansichtssache ist, das ist das stellenweise, sogar schon im Pensum der Sexta, für mein Gefühl zu häufige Auftreten von Tatsachen und Erkenntnissen in der Form von Erklärung, Lehrsatz, Lehrsatz 1, Lehrsatz 2 usf., Folgerung, Folgerung 1, Folgerung 2 usw., Zusatz 1, Zusatz 2 usw. Sicher meint der erfahrene Verfasser nicht, dies alles solle nun auswendig gelernt werden, er will es nur klar vor die Augen der Schülerinnen hinstellen. Aber man weiß doch, wie es häufig damit geht, und im Vorwort von Heft 4 redet der Verfasser ja selbst von „jüngeren, vielleicht noch unerfahrenen Lehrern". Wie es häufig mit solchen Sachen geht, hat Schwering so schön geschildert in seinem Büchlein „Ist Mathematik Hexerei", § 6, Die Grundlagen der Arithmetik.

Düsseldorf, E. Fettweis.

Mathematisches Unterrichtswerk von Reinhardt-Zeisberg.

1. Gustav Frisch, Rechenbuch für höhere Mädchenschulen. 3 Hefte, 2. Aufl. Frankfurt a. M. 1926, Moritz Diesterweg.

Das Werk ist zum Teil im Anschluß an die Richtlinien stark verändert und erweitert worden. Die Verfasser gehen überall von dem, wie sie sagen, „Altbewährten" nur mit Vorsicht zum Neuen hin, indem sie sich auf den Standpunkt stellen, daß das Stadium der Versuche noch nicht überschritten sei. Sie geben an, manche Anregungen aus dem Werk „Neubau des Rechenunterrichts" von Johannes Kühnel geschöpft zu haben.

Bei der Einführung neuer Rechenarten gehen sie von Vorfällen des täglichen Lebens und zwar möglichst solchen, die dem Kind geläufig sind, aus und münden dann auf dem Weg über die formalen Rechnungen wieder bei den angewandten Aufgaben. Bei den angewandten Aufgaben haben die Verfasser den Hauptwert weniger auf eine möglichst vielseitige Ansammlung von Einzelaufgaben als auf eine möglichst vielseitige Beleuchtung gewisser Einzelgebiete gelegt, z. B. Wandervogelfahrt, Eisenbahn, Friedensvertrag, Hausbau, Weihnachten, Kochbuch usf. Zur Selbstbildung von Aufgaben wird immer wieder Anregung gegeben. Im Anschluß an die Richtlinien ist im dritten Heft ein Abschnitt „Abgekürztes Rechnen" neu aufgenommen worden, ebenso sind „Durchschnitts- und Verhältniswerte" in einem mit graphischen Darstellungen durchsetzten Sonderkapitel neu hinzugekommen. Angenehm berührt die Berücksichtigung von Zahlenkunststücken, magischen Quadraten, sogenannten „merkwürdigen Zahlen", die auf Tropfke gestützte Berücksichtigung der Geschichte des Rechnens, die ausführliche Behandlung der Beziehungen zwischen gemeinen Brüchen und Dezimalbrüchen, das Auftreten der Neunerprobe und die durch die ganze Bruchrechnung konsequent sich durchziehende Benutzung des Zahlenstreifens zur Erklärung. Nicht einverstanden sein kann ich aber, vorausgesetzt, daß ich die Verfasser richtig verstanden habe, mit der Art, wie sie die Multiplikation einer ganzen Zahl mit einem Bruch erklären wollen. Offenbar haben die Verfasser das Prinzip der Funktionsfortsetzung vor Augen. Bei der Art, wie sie die Entwicklung geben, ist aber die Gefahr des Mißverständnisses gröbster Erschleichung und der Irreführung nicht mathematisch gebildeter Lehrer, wie sie die

Mädchenschulen wahrscheinlich noch auf viele Jahre hinaus haben werden, ungeheuer groß. Solche Erschleichungen dürfen heute, wo die Volksschulen beanspruchen, auf die höheren Schulen und damit auch auf den mathematischen Unterricht vorzubereiten, selbst in diesen nicht mehr geduldet werden. Hoffentlich schaffen die Verfasser in einer Neuauflage, die ich dem Werk wünsche, hier eine Änderung.

Düsseldorf. E. Fettweis.

2. **Albin Hofmann, Aufgabensammlung für den Rechenunterricht an Aufbauschulen und ähnlichen Anstalten.** Frankfurt a. M. 1926, Moritz Diesterweg.

Das Buch will es dem Lehrer der Mathematik in der Untertertia der Aufbauschulen ermöglichen, vor Beginn mit der eigentlichen Mathematik die von den verschiedensten Anstalten kommenden Schüler durch Rechnen von Aufgaben aus den verschiedensten Gebieten zu einer einheitlichen Arbeitsgemeinschaft zusammenzufassen. Es bietet die Aufgaben in folgenden Kapiteln: Die Maße und Gewichte, das Rechnen mit mehrfach benannten Zahlen, Teilbarkeit der Zahlen, Brüche, Dezimalbrüche, abgekürztes Rechnen mit Dezimalbrüchen, Dreisatzrechnung, allgemeine Prozentrechnung, Gewinn- und Verlustrechnung, Gewichtsrechnung, Zinsrechnung, Rabattrechnung, Lebensversicherung, Durchschnitts- und Verhältniswerte und Veranschaulichung dieser durch Strecken und Flächen, Übersicht über die Maße, Gewichte und Zählarten. Das Buch will ferner Lücken ausfüllen und manches für die Einführung in die Algebra umarbeiten. Deshalb sind verschiedene Gebiete, wie die Umwandlung von Dezimalbrüchen in gewöhnliche Brüche, das abgekürzte Rechnen und die graphische Veranschaulichung von Zahlenwerten nochmals ausführlicher behandelt. Wünschenswert wäre das wohl auch in einer Neuauflage für die gemeine Bruchrechnung. Das Buch erfüllt seinen Zweck.

Düsseldorf. E. Fettweis.

Max Simon, Nichteuklidische Geometrie in elementarer Behandlung. Bearbeitet und herausgegeben von Kuno Fladt. Beihefte zur Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. VIII u. 115 S. Leipzig und Berlin 1925, B. G. Teubner. Geh. *RM* 8.—.

In einem für höhere Mädchenbildungsanstalten in neuester Zeit erschienenen Unterrichtswerk, findet sich neben sehr vielen anderen, bedenkliches Schütteln des Kopfes erweckenden Aussagen auch folgende:

„Die Durchführbarkeit einer Geometrie auf der Kugel, die auf wesentliche Grundsätze der ebenen — euklidischen — Geometrie verzichten muß, ist nach jahrhundertelanger Alleinherrschaft der Lehre des Euklid von Gauß 1816 klar erkannt worden.“ . . .

Ein durch seine schönen geometrischen Veröffentlichungen wohlbekannter Amtsgenosse, dem ich dieses Zitat kürzlich zeigte, meinte, eine solche Unklarheit über Euklidische Geometrie sei leider sehr häufig anzutreffen als Folge eines Mangels in der Organisation des Studiums. Wenn das zutrifft, so ist dadurch der beste Beweis für Nützlichkeit und Notwendigkeit der hier anzuzeigenden Schrift über Nichteuklidische Geometrie geliefert. Sie ist aus Vorlesungen entstanden, die der 1918 verstorbene Max Simon, der nebenamtlich Honorarprofessor in Straßburg war, gehalten und die nun sein Hörer Kuno Fladt in sehr sorgfältiger Redaktion dankenswerterweise herausgegeben hat. Mit zahlreichen historischen Bemerkungen durchtränkt, tragen die Vorlesungen einen echt geometrischen Charakter und sind schon allein darum gerade in unserer Zeit als Gegengewicht gegen die übermäßig herrschende arithmetische Behandlung zum Studium sehr zu empfehlen. Sie bringen aber auch ganz unmittelbar für die elementare Geometrie der Schule fruchtbare Anregung, indem sie z. B. an die in Vergessenheit geratene Konstruktion der Tangenten von einem Punkt außerhalb eines Kreises nach Euklid III, 17 erinnern, die in der hyperbolischen Geometrie auch gilt, während die übliche Konstruktion mittels des Kreises über der Mittelpunktsgeraden nicht zu übertragen ist. Als übrigens Simon diese Tangentenkonstruktion der hyperbolischen Geometrie auf

der Naturforscherversammlung in Frankfurt a. M. 1896 in der mathematischen Abteilung vortrug, hat er selbst noch nicht gewußt, daß sie bei Euklid vorkommt, und keiner der vielen anwesenden Mathematiker hat das damals gemerkt.

Die elementare konstruktive Methode stellt noch manch schöne Probleme, insbesondere auch für die nichteuklidische Stereometrie, und zu ihrer Behandlung wird die nachgelassene Schrift Max Simons hoffentlich anregen. Ein gutes Bild, eine von verehrender Erinnerung diktierte Biographie und ein ausführliches Sach- und Namenverzeichnis sind eine wertvolle Zugabe. Mit Recht betont der Herausgeber, wie übrigens auch Rezensent in seinem in der Leopoldin 1918 erschienenen Nachruf, daß Max Simon gezeigt hat wie wissenschaftliche Tätigkeit mit praktischem Wirken als Lehrer sehr wohl zu vereinigen sind.

Leipzig. W. Lorey.

F. Schuh, Het Getalbegrip, in het bijzonder het onmeetbare getal. 286 S. Groningen 1926, Noordhoff.

Das Buch beschäftigt sich zunächst nach einer kurzen geometrischen Entwicklung des Begriffes der rationalen Zahl und deren Grundeigenschaften mit der Irrationalzahl, und zwar werden nacheinander — das ist der eine Vorzug des Buches — die Theorien von Cantor, Dedekind, Baudet und Weierstraß ausführlich entwickelt. Daß übrigens die so eingeführten Zahlbegriffe identisch sind, wird im Schlußkapitel bewiesen. Für alles weitere wird dann nur außer den Grundeigenschaften der Zahlen der Satz von der oberen Grenze gebraucht, der ausführlich erörtert ist. Dann geht das Buch zur Behandlung der Begriffe Variable, Funktion, Stetigkeit, Differenzierbarkeit usf. über. Die Ausführungen sind — das möchte ich als zweiten Vorzug hervorheben — von sehr zahlreichen (insgesamt 457) Aufgaben und Fragen begleitet, denen meist ein knapper Hinweis auf die Beantwortung beigegeben ist; so kommt dem Buch ein besonderer didaktischer Wert zu.

Der Verfasser hebt in seiner Einleitung mit Recht hervor: Ohne eine Theorie der Irrationalzahl ist eine strenge Behandlung der Analysis unmöglich. Zu jedem Studium der Mathematik, soweit es nicht ausschließlich auf die praktischen Anwendungen gerichtet ist, gehört also ein gründliches Studium der verschiedenen Theorien der Irrationalzahl.

Göttingen. W. Lietzmann.

Hk. de Vries, Die vierte Dimension, eine Einführung in das vergleichende Studium der verschiedenen Geometrien. Deutsch von Ruth Struik (Wissenschaft und Hypothese XXIX). 167 S. Leipzig 1926, Teubner. Geb. *RM* 8.—.

Das holländische Werk, das ich in dieser Zeitschrift 56 (1925), S. 311 besprochen und empfohlen habe, ist nun auch in einer angenehm lesbaren deutschen Übersetzung erschienen. Ich habe meinen Ausführungen von damals nichts hinzuzusetzen; ich möchte nur auf den eben erschienenen Artikel F. Cajori, Origins of fourth dimension concepts, the American Mathematical Monthly 33 (1926) S. 397 ff., hinweisen, der die historischen Ausführungen des Verfassers im letzten Abschnitt ergänzt.

Göttingen. W. Lietzmann.

Ergebnisse der exakten Naturwissenschaften. Herausgegeben von der Schriftleitung „Die Naturwissenschaften". V. Bd. 329 S. Mit 103 Abb. Berlin 1926, Julius Springer. Geb. *RM* 22.50, geh. *RM* 21.—.

Über die früheren Bände dieser Sammlung siehe diese Zeitschrift, 57. Jahrg. 1926. S. 279. Der vorliegende neue enthält die zusammenfassenden Aufsätze: Schönberg, Über die Strahlung der Planeten; Seliger, Das photometrische Meßverfahren — Photogrammetrie; Wegener, Dynamische Meteorologie; Bjerrum, Die elektrischen Kräfte zwischen den Ionen und ihre Wirkungen; Pringsheim,

Lichtelektrische Ionisierung von Gasen; Kirsch, Atomzertrümmerung; Kohlrausch, Der experimentelle Beweis für den statistischen Charakter des radioaktiven Zerfallsgesetzes; Pietsch, Gasabsorption unter dem Einfluß der elektrischen Entladung — clean up — und verwandte Erscheinungen; Kallmann und Mark, Der Comptonsche Streuprozeß. — Am Ende dieses Bandes befindet sich ein Namenverzeichnis und ein Sachverzeichnis der Bände I—V. — In dankenswerter Weise sind wiederum Fachfragen, die in letzter Zeit im Mittelpunkt des wissenschaftlichen Interesses standen, von Vertretern und Bearbeitern der entsprechenden Sondergebiete in Form von Übersichten über den derzeitigen Stand der Wissenschaft behandelt worden. Erschöpfende Literaturhinweise am Ende der Aufsätze erleichtern eine wissenschaftliche Vertiefung. Besonders die Aufsätze von Schönberg, Wegener, Bjerrum, Hirsch, Kallmann und Mark handeln von Markpunkten modernen Fortschritts; sie lassen hinter ihrer anspruchslosen Überschrift meist die Fülle des Gebotenen nicht vermuten.

Hamburg. W. Hillers.

Gehrcke, Handbuch der physikalischen Optik. Bd. I. Erste Hälfte. 470 S. Mit 223 Abbildungen im Text. Leipzig 1926, Johann Ambrosius Barth. Brosch. *RM* 40.—.

Aus dem Vorwort: „Das Handbuch der physikalischen Optik . . . bringt . . . die zeitgemäße Darstellung eines durch überraschende Entwicklung in die Breite und Tiefe ausgezeichneten Wissensgebietes, in welchem sich alle Zweige der Physik, wie Elektrizität, Magnetismus, Mechanik, Wärme und auch benachbarte Wissenschaften, wie Chemie und Astronomie berühren . . . Die physikalische Optik ist heute das Zentrum, um das sich die ganze Physik und exakte Naturwissenschaft gruppiert . . . Der erste Band behandelt überwiegend die Wellenoptik, der zweite die Quantenoptik . . . Die technisch-geometrische Optik mußte, weil bereits gesondert ein Handbuch der geometrischen Optik im Verlage von Johann Ambrosius Barth kürzlich erschienen, ausgelassen werden . . . Wenn gelegentlich das Durchschnittsmaß der mathematischen Anforderungen überschritten ist, so wird dieser Umstand dem Verständnis des Ganzen nicht weiter abträglich sein. . . . Viele klare Abbildungen, sowie Tafeln fördern das Verständnis ganz besonders und bringen sofort dem Leser die Sache so nahe, wie überhaupt möglich. . . .“ Die in dem vorliegenden Bande behandelten Abschnitte sind: Allgemeine Photometrie durch W. Dziobek (S. 1—65), Registrierphotometrie durch P. P. Koch (S. 65—72), Geschwindigkeit des Lichtes durch Felix Auerbach (S. 73—90), Hilfsmittel und dioptrische Methoden zur Messung der Brechungsindizes fester, flüssiger und gasförmiger Körper durch C. Pulfrich (S. 91—153), die Brechungsindizes im allgemeinen durch Felix Jentsch (S. 153—185), die Brechungsindizes in physikalisch-chemischer Beziehung durch G. Jaeckel (S. 186—218), Dioptrik in Medien mit kontinuierlich-variablem Brechungsindex durch R. Straubel (S. 219—236), die astronomische und terrestrische Strahlenbrechung durch Azeg. Bemporad und Friedr. Wünschmann (S. 237 bis 282), Anomalien der terrestrischen Strahlenbrechung von Ew. van Everdingen (S. 283—292), die Extinktion des Lichtes in der Erdatmosphäre von Azeg. Bemporad und Friedr. Wünschmann (S. 293—316), Interferenz durch W. Feußner und Ludw. Janicki (S. 317—466).

Die Abschnitte decken sich zum Teil mit den Abschnitten gleicher Überschriften derselben Bearbeiter in dem Bd. VI, 2 des „Handbuches der Physik, herausgegeben von A. Winkelmann“ vom Jahre 1906 im gleichen Verlage; das vorliegende Werk ist also, worüber das Vorwort keine Auskunft gibt, als eine teilweise Fortführung jenes verdienstvollen Handbuches zu betrachten. Nur so hat auf dem Titelblatt auch der schon vor 20 Jahren verstorbene P. Drude als Mitarbeiter aufgeführt werden können. Es würde somit — in dem von ihm behandelten Gebiete wenigstens — dieses Handbuch das dritte von den Handbüchern der Physik sein, die gegenwärtig im Erscheinen begriffen sind. Gegenüber dem „alten Winkelmann“ ist der Druck mit der kleineren aber kräftigeren Type zweifellos lesbarer; auch in der Wiedergabe der Abbildungen und Figuren — man sehe z. B. den Artikel von C. Pulfrich — ist gegenüber dem früheren Handbuche eine Vervollkommnung

unverkennbar. In der Darstellung weichen die einzelnen Bearbeiter naturgemäß voneinander ab; der Zweck eines Handbuches, nämlich eine vorläufige Übersicht zu bieten und dann auf weitere Literatur hinzuweisen, wird aber überall erfüllt.

Hamburg. W. Hillers.

Wilh. Donle, Lehrbuch der Experimentalphysik für höhere Lehranstalten. 397 S. Mit 500 in den Text gedruckten Abbildungen, 620 Aufgaben und zahlreichen Übungen für das Schülerpraktikum. 12. verbesserte Auflage. In Verbindung mit

O. Hartmann, Astronomische Erdkunde. 87 S. Mit 40 Textfiguren, 1 Mondbahnkarte und 18 Übungsaufgaben. 7. verbesserte Auflage. Leipzig und Berlin 1926 (1925), B. G. Teubner. Geb. *RM* 8.60.

Auf die neue und verbesserte Auflage dieses verbreiteten Lehrbuches sei hingewiesen.

Hamburg. Wilh. Hillers.

Zeitschriftenschau.

Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften. — 33. Jahrg., Nr. 2. — Schürer, Ein Modellierverfahren für den Unterricht in Stereometrie. — K. Hahn, Die Strömungslehre im Unterricht.

33. Jahrg., Nr. 3. — E. Reichenbächer, Ist das Elektron unteilbar? — E. Sellien, Fiktionen in der Mathematik. — H. Weinreich, Ein Beispiel für die Befolgung der sokratischen Methode im mathematischen Unterricht.

Mathematics Teacher. — Vol. XX, Nr. 1. — H. D. Merrell, Fads and plane geometry. — H. A. Neville, Mathematics and science. — A. Davis, Interest of pupils in high school mathematics and factors in securing it. — M. C. Hatton, A mathematics club. — A. M. Wuest, Analysis versus synthesis.

Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde. — Bijvoegsel, 3. Jaarg., Nr. 3. u. 4. — E. Jensema, Verslag. — Opmerkingen. — Rapport. — Haalmeijer, De commissie Beth. — H. J. E. Beth, Naschrift. — E. J. Dijksterhuis, Naschrift. — B. P. Dijksterhuis, Naschrift. — P. Wijdenes, Over het onderwijs in rekenen in de eerste klas van de H. B. S. — B. Coster, De ontwikkeling van het ruimteinzicht.

The American Mathematical Monthly. — Vol. XXXIII, Nr. 10. — V. Johns, On the mechanical handling of statistics. — L. Vanhée, The great treasure house of chinese and european mathematics. — H. J. Ettlinger, The kinetics of learning.

Vol. XXXIV, Nr. 1. — H. A. X. Simmons, Diophantine problems in weighing. — L. Lange, The clock paradox of the theory of relativity. — C. T. Ruddick, The circle in Euclids treatment of optics. — R. E. Moritz, On products whose digits are cyclical permutations of the digits of the multiplicand.

Physikalische Zeitschrift. — 28. Jahrg., 2. Heft. — A. Wigand, Die Erhaltung der Erdladung durch den Blitzstrom. — G. Ortner und G. Stetter, Die Hörbarmachung von H-Strahlen. — C. Manneback, Dielektrizitätskonstante und Starkeffekt polyatomiger Dipolgase mit symmetrischen Molekülen nach der Wellenmechanik. — C. Wieselsberger, Über den Luftwiderstand bei gleichzeitiger Rotation des Versuchskörpers. — J. Th. Groosmuller, Zur Theorie der Oberflächenschichten. — S. Eskeland, Intensitätsänderungen der Linien eines Quecksilbertripletts. — L. Vegard, Bemerkungen zu der Arbeit von S. Eskeland. — A. E. Lindh, Bericht über die Entwicklung der Röntgenspektroskopie während der Jahre 1921—1925. II. Teil. (Schluß.)

28. Jahrg., 3. Heft. — W. Wien, Theodor Des Coudres †. — P. Debye, Über die Zerstreuung von Röntgenstrahlen an amorphen Körpern. — H. J. v. Braunmühl, Über die Temperaturabhängigkeit der Dielektrizitätskonstante einiger Gase. — D. Nasledow, Zur Quantentheorie des normalen photoelektrischen Effekts. — R. Forster, Struktur von kolloidalem SnO_2. — H. Cassel, Zur Theorie der Adsorptionswärme. — G. Ettisch und D. Deutsch, Zur Methodik der Kataphorese.

Zeitschrift für Physik. — 41. Bd., 1. Heft. — O. Oldenberg, Über das kontinuierliche Spektrum des Wasserstoffs. — R. Fleischmann, Umwandlungserscheinungen bei leicht schmelzbaren Legierungen (Rosesches Metall). — A. H. Bucherer, Notiz über einen geplanten Versuch zur Prüfung der Äthertheorie des Lichtes. — K. Knopp, Ein Satz über räumliche Quantelung. — P. Ehrenfest und G. E. Uhlenbeck, Die wellenmechanische Interpretation der Boltzmannschen Statistik neben der der neueren Statistiken. — J. H. de Boer und A. E. van Arkel, Molekülmodelle für Methan und andere Verbindungen vom Typus XY_4. I. — A. E. van Arkel und J. H. de Boer, Molekülmodelle für Methan und andere Verbindungen vom Typus XY_4. II. — A. Nádai, Darstellung ebener Spannungszustände mit Hilfe von winkeltreuen Abbildungen. — W. Anderson, Die physikalische Natur der Sonnenkorona. VI.

41. Bd., 2/3. Heft. — W. Pauli jr., Über Gasentartung und Paramagnetismus. — v. Göler und G. Sachs, Das Verhalten von Aluminiumkristallen bei Zugversuchen. I. Geometrische Grundlagen. — R. Karnop und G. Sachs, Das Verhalten von Aluminiumkristallen bei Zugversuchen. II. Experimenteller Teil. — F. G. Houtermans, Über die Bandenfluoreszenz des Quecksilberdampfes. — D. Nasledow und P. Scharawsky, Die Abhängigkeit der Intensität der Röntgenspektrallinien von der Zahl der Kathodenelektronen. — W. Hanle, Die Polarisation der Resonanzfluoreszenz von Natriumdampf bei Anregung mit zirkular polarisiertem Licht. — F. Zernike und J. A. Prins, Die Beugung von Röntgenstrahlen in Flüssigkeiten als Effekt der Molekülanordnung. — A. Kneschke, Anwendung der Theorie der Integralgleichungen auf das Durchschlagsproblem von festen Isolatoren. — W. Jazyna, Über eine Folgerung aus der Irrealität des absoluten Nullpunktes. — W. Kapuściński, Die Linienfluoreszenz des Cadmiumdampfes. — A. Jönsson, Beitrag zur Kenntnis der Intensitäten in der L-Röntgenreihe. — H. Mandel, Bemerkungen zum Erhaltungssatz. — E. Guth, Zur Ableitung der Schröderschen Wellengleichung.

41. Bd., 4./5. Heft. — W. Heisenberg, Mehrkörperprobleme und Resonanz in der Quantenmechanik. II. — J. R. Oppenheimer, Zur Quantentheorie kontinuierlicher Spektren. — M. Asterblum, Über die Dauer des Nachleuchtens des Quecksilberdampfes. — E. Ullmann, Experimentelle Beiträge zur Kenntnis der Diffusion in Lösungen. — W. Tarassoff, Über den Zusammenhang der Pictetschen Regel mit der Bornschen Theorie. — J. H. van der Tuuk, Über die Röntgen-L-Spektren der leichteren Elemente. — W. Bothe, Lichtquanten und Interferenz. — W. Bothe, Zur Statistik der Hohlraumstrahlung. — K. Schaposchnikow, Ein neues Prinzip in der Dynamik der Lichtquanten. — F. Sauerwald, H. Patalong u. H. Rathke, Über die Beeinflussung der Verdampfungsgeschwindigkeit durch Kaltbearbeitung mit einer Notiz über die Schmelz- und Umwandlungspunkte kalt bearbeiteter Metalle. — S. Friberg, Über die Dispersion des Lichtes in gasförmigen Körpern innerhalb des ultravioletten Spektrums. — F. J. v. Wiśniewski, Die magnetischen Suszeptibilitäten von O_2 und N_2. — C. Leiss, Neue Porzellan-Metall-Röntgenröhre.

Zeitschrift für technische Physik. — 8. Jahrg., 2. Heft. — H. Müller, Die experimentelle Bestimmung der Stirn der Wanderwellen. — Cl. Schaefer und K. Ackermann, Untersuchungen über die Leistungsfähigkeit der Agfa-Plathe. — W. Müller, Über den Einfluß von Wirbeln auf den Strömungsdruck an einem Kreiszylinder. — A. Smekal, Quantenproblem der Wärmelehre. — V. Polak, Versuche zur Feststellung von Strahlungsgrößen in Siemens-Martinöfen. — A. Meissner, Über piezo-elektrische Kristalle bei Hochfrequenz. II. — P. Paunow, Ein neues Pyrheliometer.

Die Naturwissenschaften. — 15. Jahrg., 5. Heft. — P. Jordan, Kausalität und Statistik in der modernen Physik. — W. Kolhörster, Höhenstrahlung und Heavisideschicht.

15. Jahrg., 6. Heft — K. H. Meyer, Zur Physik und Chemie der Färbevorgänge. — H. Mark und K. Schocken, Über die azimutale Verteilung der an einem Gas gestreuten Röntgenstrahlung. — A. Piccard und E. Stahel, Neue Resultate des Michelson-Experiments. — H. Rosenberg, Photoelektrische Registrierung von Sterndurchgängen.

15. Jahrg., 7. Heft. — K. Büttner, Messungen der durchdringenden Strahlung. — P. Ehrenfest, Besteht ein allgemeiner Zusammenhang zwischen der wechselseitigen Undurchdringlichkeit materieller Teilchen und dem „Pauli-Verbot?“ —

H. Pohle, Über einen neuen Lichteffekt im System Kautschuk-Schwefel. — G. Hansen, Hyperfeinstrukturen im Neonspektrum.

15. Jahrg., 8. Heft. — B. Pogány, Über die Wiederholung des Harress-Sagnacschen Versuches. — F. London, Die Theorie von Weyl und die Quantenmechanik. — W. Grotrian, Über das Absorptionsspektrum des Wasserstoffmoleküls. — György, Über das Absorptionsspektrum des antirachitisch wirksamen Cholesterins.

Aus verschiedenen Zeitschriften. — H. Willers, Mathematisches Arbeitsgerät (Praktische Schul-Physik 6. u. 7. Jahrg.). — B. Sticker, Über einige Lösungen des Dreikörper-Problems (Die Himmelswelt 37 [1927] Heft 3).

Neuerscheinungen.[1])

Sammelwerke.

Augen auf! Franckhs Lesehefte für Arbeit in Schule und Haus. Stuttgart, Franckh. 32 S. Geh. RM —.25.
Heft 6. C. Ewald, Der Regenwurm und der Storch. 2. Aufl.
Heft 11. Frank Stevens, Abenteuer im Bienenreich. 2. Aufl.
Heft 5. E. Thompson-Seton, Tito. 5. Aufl.
Heft 9. ——, Vixen. 2. Aufl.

Sammlung Göschen. Berlin, de Gruyter. Geb. RM 1.50.
Bd. 173. W. Bruhns, Petrographie (Gesteinskunde). Neubearbeitet von P. Ramdohr. 117 S. 1926.
Bd. 468. P. Werkmeister, Vermessungskunde. I. Teil. 4. Aufl. 156 S. 1926.

Der Werdegang der Entdeckungen und Erfindungen. Herausgegeben von F. Dannemann. München, Oldenbourg.
8. H. Arlt, Bergbau. 74 S. 1927.

Mathematische Wissenschaft.

Ch. Betsch, Fiktionen in der Mathematik. 372 S. Stuttgart 1926, Frommann. Geh. RM 10.—.

A. Fraenkel, Zehn Vorlesungen über die Grundlegung der Mengenlehre. (Wissenschaft und Hypothese Bd. 31.) 182 S. Leipzig 1927, B. G. Teubner. Geb. RM 8.—.

H. Graßmann, Projektive Geometrie der Ebene unter Benutzung der Punktrechnung dargestellt. 2. Band: Ternäres. 2. Teil. 522 S. Leipzig 1927, B. G. Teubner. Geh. RM 20.—, geb. RM 22.—.

F. Hausdorff, Mengenlehre. (Göschens Lehrbücherei I, 7.) 2. Aufl. 285 S. Berlin 1927, de Gruyter. Geh. RM 12.—.

M. Pasch, Vorlesungen über neuere Geometrie 2. Aufl., mit einem Anhang: M. Dehn, Die Grundlegung der Geometrie in historischer Entwicklung. (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften Bd. 23.) 275 S. Berlin 1926, Springer. Geh. RM 16.50.

R. Rothe, Höhere Mathematik. Teil I. (Teubners Technische Leitfäden Bd. 21.) 2. Aufl. 186 S. Leipzig 1927, B. G. Teubner. Kart. RM 5.—.

Mathematischer Unterricht.

W. Braun, Rechenbuch für höhere Lehranstalten. 1. Teil. 15. Aufl. von M. Wagner. 106 S. Bamberg 1927, Buchner.

A. Dekert, Rechentafeln. — 9 einzeln beziehbare Tafeln. Wittenberg o. J., Ziemsen.

---

1) An dieser Stelle werden alle bei der Schriftleitung einlaufenden Bücher, soweit sie überhaupt den Stoffkreis der Zeitschrift berühren, angezeigt. Eine ausführliche Besprechung der unverlangt einlaufenden Bücher behält sich die Schriftleitung vor. Eine Rücksendung kann in keinem Falle erfolgen.
Die Schriftleitung.

A. Deckert u. A. Wruck, Aufgaben und Stoffe für den mathematischen Unterricht an Mittelschulen. Heft 6 für Klasse VI, 92 S. Geh. RM 1.60. Heft 5 für Klasse V, 110 S. Geh. RM 1.85. Heft 4 für Klasse IV, 106 S. Geh. RM 1.85. Wittenberg o. J., A. Ziemsen.

Degenhart-Fick-Sellien, Mathematisches Unterrichtswerk für höhere Schulen. Berlin, Oldenbourg:
E. Sellien, Rechenbuch. Teil I. 150 S. O. J. Kart. RM 1.80.

Feller und Odermann, Das Ganze der kaufmännischen Arithmetik. Neubearbeitung von B. Kämpfe und P. Prater. Nachtrag zu Teil II. (1. Hälfte.) S. 155 bis 198. Leipzig 1927, B. G. Teubner. Geh. RM —.80.

Geipel-Hecht, Mathematisches Unterrichtswerk für höhere Mädchenbildungsanstalten. Hannover, Carl Meyer:
Teil III. M. Jackowski, Leitfaden der Vermessungskunde. 112 S. 1926.

G. Heinrich und K. Grünholz, Schulmathematik Bd I: Geometrie für höhere Schulen. 251 S. Bamberg 1927, Buchner. Geb. RM 1.80.

W. Lietzmann, Mathematisches Unterrichtswerk für höhere Knabenschulen. Leipzig, B. G. Teubner:
W. Lietzmann, Leitfaden der Mathematik. Ausgabe A für gymnasiale Anstalten. Unterstufe. 5. Aufl. 61 + 70 S. 1927. Geb. RM 2.40.
——, Dass. Ausgabe B für reale Anstalten. Unterstufe. 7. Aufl. 72 + 76 S. 1927. Geb. RM 2.80.

W. Lietzmann, Mathematisches Unterrichtswerk für höhere Mädchenbildungsanstalten. Leipzig, B. G. Teubner:
W. Lietzmann, P. Zühlke und K. Stracke, Aufgabensammlung und Leitfaden der Geometrie für die Oberstufe. 3. Aufl. 113 + 85 S. 1927. Geb. RM 3.60.

H. Semiller und A. Semiller, Vierstellige Logarithmen- und Zahlentafeln. Ausg. B mit mathematischer Formelsammlung. 32 S. Berlin 1926, Springer. Geb. RM 2.40.

L. Yntema, A. J. Drewes en Th. B. Bloten, Algebra voor voorbereidend hoogeren middelbaar onderwijs. 4. deel. 171 S. Groningen 1927, Wolters. Geh. f. 2.25.

Lustige Ecke.

52. Die größte bekannte Primzahl. Die größte Zahl, von der nachgewiesen ist, daß sie eine Primzahl ist, ist

$$170\ 141\ 183\ 460\ 469\ 231\ 731\ 687\ 303\ 715\ 884\ 105\ 727.$$

Es ist dies die Zahl $2^{127} - 1$.[1])

Eine der größten praktisch durchgeführten Divisionsaufgaben bezweckte den Nachweis, daß die Zahl $2^{1092} - 1$ durch 1093^2 teilbar ist.

53. Zur π-Poesie. Bekannt ist die gedrechselte Übersetzung eines gedrechselten französischen Verses, dessen Worte mit der Anzahl ihrer Buchstaben die ersten 30 Ziffern von π angeben.[2]) In einer älteren Programmabhandlung von H. Schnell[3]) findet sich ein treffender Nachsatz zu diesem

1) In W. Lietzmann, Riesen und Zwerge im Zahlenreich, (Mathematisch-Physikalische Bibliothek Bd. 25.) 2. Aufl. Leipzig 1918, B. G. Teubner, S. 37 ist noch als größte bekannte Primzahl $2^{61} - 1$ angeführt werden.

2) Vgl. z. B. W. Lietzmann, Lustiges und Merkwürdiges von Zahlen und Formen. 2. Aufl. S. 18. Breslau 1922, Hirt.

3) H. Schnell, Elementare Ableitung der Pendelformel $t = \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$, Vereinfachte Berechnung der Zahl π und kleine Beiträge zur Schulmathematik. Jahresbericht K. Realschule Landsberg a. Lech 1911. S. 38. — Den Hinweis auf die Schrift danke ich E. Lampart, Augsburg.



Gedicht, der noch fünf weitere Ziffern hinzufügt, freilich mit einem Schönheitsfehler, den die Ziffer 0 verursacht, nämlich

Mache niemand so traurige Gedichte!
5 0 2 8 8

Gleichzeitig wird aber eine andere Fassung des „Gedichtes" gegeben, die mir in der Tat ansprechender zu sein scheint:

Dir o Held, o edler Philosoph!
Du hehrer Geist, den viele Tausende bewundern,
Dauernd erstrahlt, was Du uns beschert.
Noch klarer in Fernen wird das uns leuchten,
Was Du erdacht, „Erzdenker!", —
Stets unerschöpft, — Du edelster Erfinder! L.

Vermischtes. — Sprechsaal.

Notiz zu meiner Arbeit in Heft 3, S. 108 ff., 58. Jahrg. der S. 110 genannte „indirekte Beweis" für die Umkehrung des verallgemeinerten Satzes von Menelaus ist nicht zutreffend. Die Existenz der n Punkte auf einer Geraden ist dadurch nicht beweisbar. Die Punkte *könnten* darauf wohl auf einer Geraden liegen, *müssen* es aber nicht. Damit fallen dann auch Abschnitt 3 und 4. Die zu Ceva gegebene Verallgemeinerung muß dahin eingeschränkt werden, daß n ungerade angenommen wird.

Danzig-Langenfuhr. Joh. Salachowski.

Schülerfahrten zum Deutschen Museum. Im Heft 1 des lauf. Jahrg. d. Zeitschrift habe ich über Erfahrungen bei Schülerfahrten zum Deutschen Museum in München geschrieben. Heute sehe ich mich zu einer sehr erfreulichen *Berichtigung* veranlaßt, die lebhaftestem Interesse begegnet wird. Ich bitte meine Ausführungen über die Jugendherberge in der Entenbachstraße auf Seite 21 zu streichen. Durch die inzwischen erfolgte Errichtung der neuen großen und neuzeitlich eingerichteten Jugendherberge Wendlstraße 20 sind meine Bedenken wegen der Unterbringung der Schüler völlig gegenstandslos geworden. Das neue, auf das Modernste eingerichtete Heim umfaßt 450 bis 500 Schlaflager. Es hat neben einem großen Massenschlafraum 12 Schlafräume mit je 22—25 Lagern, 10 Tagesräume mit je eigener Kochvorrichtung, einen Vortragsaal sowie eine große Gemeinschaftsküche, welche die billige Gesamtverpflegung der Herbergsgäste ermöglicht. Ebenso sind Brausebäder und Dampfheizung vorhanden. Der Übernachtungspreis beträgt *RM* —.30. Gegen eine geringe Mehrgebühr wird auch Bettwäsche geliefert. Die volle Tagespension mit Übernachten beträgt *RM* 2.—. Das Frühstück, bestehend aus Kaffee, Brot und Marmelade kostet *RM* —.20; Mittag- und Abendessen sind für *RM* —.60 bis —.70 erhältlich. Prospekte über das Heim sind von der Hauptgeschäftsstelle des Landesverbandes Bayern für Jugendwandern und Jugendherbergen (München, Hauptbahnhof-Südtor) gegen Briefporto erhältlich. Dorthin allein ist auch die Anmeldung für die Jugendherberge München zu richten.

Göttingen. H. Weinreich.



Für die Schriftleitung verantwortlich: W. Lietzmann in Göttingen.

Hierzu Beilagen von J. Klawun in Hannover und Gebr. Wichmann m. b. H. in Berlin, sowie Beilagen von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin, die der Beachtung der Leser empfohlen werden.

Druck von B. G. Teubner in Leipzig. Ausgegeben am 10. Mai 1927

ZEITSCHRIFT FÜR MATHEMATISCHEN UND NATURWISSENSCHAFTLICHEN UNTERRICHT ALLER SCHULGATTUNGEN

BEGRÜNDET 1869 VON J. C. V. HOFFMANN



HERAUSGEGEBEN VON

H. SCHOTTEN und W. LIETZMANN
in Halle a. S. in Göttingen
unter Mitarbeit von
W. HILLERS
in Hamburg

58. JAHRGANG. 1927 · 5. HEFT



LEIPZIG · B. G. TEUBNER · BERLIN

Inhaltsverzeichnis des 5. Heftes.

Fortsetzung auf der dritten Umschlagseite.

Die mathematisch-physikalische Unterrichtswoche in Kiel vom 6.—15. September 1926.

Von S. Heller in Schleswig.

Plan der Woche. Als erste der zur Durchführung der Schulreform im Sinne der Richtlinien geplanten Unterrichtswochen in der Provinz Schleswig-Holstein fand in Kiel vom 6.—15. September eine Unterrichtswoche für Mathematik und Physik statt, mit deren Vorbereitung und Leitung das Provinzial-Schulkollegium den Fachberater Oberstudienrat Dr. Heller beauftragt hatte.

Da die Woche vor allem eine *praktische* Förderung der Teilnehmer bezweckte, so wurde der größte Teil der verfügbaren Zeit, die Vormittagsstunden, für das Anhören von Unterrichtsstunden und für praktische Übungen der Teilnehmer verwendet; an den Nachmittagen fanden Vorträge und Referate mit anschließender Aussprache statt.

Was den Inhalt des Dargebotenen betrifft, so sollten nicht etwa alle möglichen Fragen, die den mathematischen und physikalischen Unterricht betreffen, behandelt werden; vielmehr lag bei der Aufstellung des Planes die Absicht vor, einer derartigen Zersplitterung in einzelne Teilfragen durch eine Art von Konzentration vorzubeugen, dergestalt, daß eine ganze Reihe der Lehrproben, ferner die praktischen Übungen der Teilnehmer und die Nachmittagsvorträge, sowohl im mathematischen als auch im physikalischen Teil der Woche jedesmal um einen fest bestimmten Gegenstand oder um ein bestimmtes methodisches Prinzip angeordnet wurden. Im mathematischen Teil war dieser Mittelpunkt der „Logarithmus“, im physikalischen Teile waren es die „physikalischen Schülerübungen“.

Dementsprechend wurde im mathematischen Teile der Woche nicht nur die Entdeckung und Geschichte der Logarithmenrechnung und die Beziehung der logarithmischen Funktion zur Infinitesimalrechnung behandelt, sondern es trat auch das praktische Rechnen mit Logarithmen sehr stark in den Vordergrund, namentlich wurde die Frage nach der erreichbaren Genauigkeit bei dieser Art abgekürzter Rechnung erörtert, und ferner wurden die Hilfsmittel der Logarithmenrechnung, Logarithmentafel und logarithmischer Rechenschieber, besprochen und besonders letzteres Hilfsmittel in praktischen Übungen der Teilnehmer ausführlich behandelt.

Der physikalische Teil der Woche erhielt durch einen Vortrag über den bildenden Wert des Physikunterrichts eine feste theoretische Unterlage. Im übrigen sollten die Kursusteilnehmer mit der Einrichtung von physikalischen Schülerübungen, ferner mit der Beschaffung und Handhabung von Übungsapparaten vertraut gemacht werden.

Die Unterrichtswoche wurde am 6. September 1926 in der Aula des staatlichen Gymnasiums zu Kiel in Gegenwart von Vertretern der Universität und der örtlichen höheren Schulen durch Oberschulrat Dr. Consbruch vom Provinzial-Schulkollegium mit einer Feier eröffnet.[1])

Lehrproben. Die Teilnehmer der Woche wohnten 14 mathematischen und 2 physikalischen Unterrichtsstunden bei und sahen außerdem in 3 Stunden die Schüler bei physikalischen Übungen. Mit Ausnahme von den 2 Physikstunden, die im Lyzeum II, und von 4 Mathematikstunden, die im Oberlyzeum gehalten wurden, fanden alle Lehrproben in der Oberrealschule am Königsweg statt und wurden von Lehrkräften dieser Schule erteilt. Im einzelnen wurde gezeigt:

a) Abgekürztes Rechnen, Aufbauklasse III, O. R. K., 2 Std., Oberstudienrat Kronke;
b) Rechenschieber, OIIb, O. R. K, 4 Std., Oberstudienrat Heller;
c) Winkelsumme im Dreieck, IVa, O. R. K., 2 Std., Stud.-Ass. Kaiser;
d) Zentrale und gemeinsame Sehne zweier Kreise, OIII, O. L., 2 Std., Stud.-Ass.in Langhans;
e) Einführung in die Trigonometrie, UIIb, O. R. K., 2 Std., Prof. Ahl;
f) Quadratische Gleichungen mit einer Unbekannten, UII, O L., 2 Std., Stud.-Rätin Dabelstein;
g) Sphärische Spiegel, A. K. II, L. II, 2 Std., Stud.-Rätin Nelson;
h) Phys. Schüler-Übung: Auftrieb von festen Körpern in Wasser, OIIIb, O. R. K, 1 Std., Stud.-Ass. Kaiser;
i) Phys. Schüler-Übung: Schiefe Ebene, A. K. II, O. R. K., 1 Std., Stud.-Rat H. Schmidt;
k) Phys. Schüler-Übung: Ausdehnung von Walzenfedern, OIIIa, O. R. K., 1 Std., Stud.-Rat H. Schmidt.

Von den Klassen unter a) bis g) zeigten sich nur die Mädchenklassen d), f) und g) sehr gut nach der Methode des Arbeitsunterrichts geschult; bei den Knabenklassen waren nur gelegentlich Ansätze nach dieser Richtung hin zu bemerken.

Bei den physikalischen Schülerübungen machte sich der Umstand unangenehm bemerkbar, daß die Problemstellung und die vorbereitende Besprechung der Versuchsanordnung jedesmal in der einen Stunde erledigt werden sollte, damit die Zuhörer ein abgerundetes Bild von einer Übung erhielten. Dies konnte leicht den Eindruck erwecken, daß man im allgemeinen *nicht* mit *einer* Stunde bei physikalischen Schülerübungen auskommt. In der Aussprache wurde aber hervorgehoben, daß die Vorbereitung der Übungen häufig im gemeinsamen Physikunterricht der Klasse vorgenommen werden kann, und daß dann bis OII hinauf für die physikalischen Übungen *eine* Stunde genügt. Man war sich darüber einig, daß die Übungen mit dem übrigen Physikunterricht zu einer Einheit zu verschmelzen sind, und daß da, wo man jetzt noch anders verfährt, nur ein Übergangsstadium vorliegt, das in den besonderen schwierigeren Verhältnissen begründet sein mag, das aber jedenfalls baldigst überwunden werden muß.

Eine Aussprache über die Lehrproben in Gegenwart des betreffenden Herrn fand nur in einigen Fällen statt; immer ließ sich das leider nicht ermöglichen,

1) Das P. S. K. hatte 32 Teilnehmer von allen Schularten der Provinz einberufen.

weil die Lehrproben schnell aufeinander folgen mußten, und weil die vorführenden Kollegen hernach sofort wieder anderweitig mit Unterricht beschäftigt waren. So blieb die Aussprache meistens nur auf einen Gedankenaustausch in kleinerem Kreise beschränkt.

Praktische Übungen. *Übungen mit dem logarithmischen Rechenschieber,* unter Leitung von Prof. Neuendorff und Oberstudienrat Heller, 4 Std.[1])

Neuendorff spricht über die verschiedenen Systeme der Rechenschieber und gibt Winke, die beim Kauf eines solchen Instruments zu beachten sind; z. B. muß der Rechenschieber mit einer Stahleinlage oder einer Zelluloidplatte versehen sein; dadurch wird erreicht, daß sich die Zunge nicht zu schwer und auch nicht zu leicht verschieben läßt; bessere Rechenschieber sind außerdem mit Stellschrauben ausgerüstet. Unter den verschiedenen Arten von Läufern ist der Einstrichläufer aus Glas ohne Lupe am meisten zu empfehlen. Soll bei einem Rechenschieber die Genauigkeit auf eine Stelle mehr reichen als bei einem andern, so müßte er nach der Theorie zehnmal so lang sein. Praktisch entspricht ein Rechenschieber von 25 cm Länge einer dreistelligen, ein solcher von 50 cm Länge einer vierstelligen Logarithmentafel.

Heller gibt Ratschläge für die Beschaffung und für die Selbstanfertigung von großen Demonstrationsrechenschiebern und erläutert dann, wie der Rechenschieber beim Multiplizieren und Dividieren, beim Berechnen von zusammengesetzten Ausdrücken mit diesen Rechnungsarten, beim Quadrieren und Quadratwurzelziehen, beim Kubieren und Kubikwurzelziehen gehandhabt wird und übt mit den Kursusteilnehmern das Lösen derartiger Aufgaben.

Neuendorff berichtet, wie er seine Schüler auf der höheren Schiff- und Maschinenbauschule in den Gebrauch des Rechenschiebers einführt. Er beginnt dabei nicht sofort mit der logarithmischen Teilung, sondern läßt zunächst Schieber mit linearen, dann mit quadratischen und auch mit reziproken Teilungen herstellen und Aufgaben von der Form $a + b = c$ bzw. $a^2 + b^2 = c^2$ bzw. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$ lösen. Diese Art der Vorübungen bedeutet nach der Meinung der Kursusteilnehmer sicherlich eine Verbesserung der Methode. Im übrigen vertritt Neuendorff den Standpunkt, daß in der Untersekunda verkürzt und nur mit dem Rechenschieber bis zur sicheren Beherrschung dieses Hilfsmittels gerechnet und erst auf der Oberstufe die Logarithmentafel benutzt werden solle.

Weiter bespricht Neuendorff den Grad der erreichbaren Genauigkeit beim Arbeiten mit dem Rechenschieber. Dabei interessiert nur die relative Genauigkeit, die an jeder Stelle einer logarithmischen Teilung dieselbe bleibt. Der relative Fehler beträgt theoretisch 0,1 % auf der 25 cm langen Teilung. Neuendorff übt mit den Teilnehmern den Gebrauch der Sinus-, Tangens- und Logarithmusskala und erklärt die praktische Bedeutung der verschiedenen auf dem Rechenschieber eingetragenen Konstanten; dabei wird auch der Zweck des Dreistrichläufers erwähnt. Schließlich wird noch die Auflösung von quadratischen und reduzierten kubischen Gleichungen mittels des Rechenschiebers bei „gegenläufiger“ Zungenstellung gezeigt.

1) Der Bericht stützt sich auf Aufzeichnungen von Stud.-Ass. Stüben in Oldenburg (Holstein).



Als Literatur wird empfohlen:

1. A. Rohrberg, Theorie und Praxis des logarithmischen Rechenschiebers. (Math.-Phys. Bibliothek.) Leipzig, B. G. Teubner.
2. Hammer, Der logarithmische Rechenschieber und sein Gebrauch. Stuttgart, K. Wittwer.
3. Runge-König, Numerisches Rechnen. Berlin, J. Springer.

Für die *„praktischen Übungen der Teilnehmer mit den Apparaten für die physikalischen Schülerübungen“* (3 Std.) hatte Stud.-Rat H. Schmidt Apparate aus der Mechanik der festen Körper aufgestellt, ferner einige Apparate zu Versuchen aus der Wärmelehre, Versuchsanordnungen zur Festlegung der magnetischen Kraftlinien und für elektrische Widerstandsmessungen. Außerdem wurden Apparate für die Lichtbrechung und die Newtonschen Farbenringe erprobt. Die Teilnehmer arbeiteten dabei in kleineren Gruppen zusammen und wechselten nach Belieben die auf 10 Schüler-Experimentiertischen aufgestellten Versuchsanordnungen.

Vorträge und Referate.

a) Prof. Neuendorff, Kiel: *Über das verkürzte Rechnen* (2 Std.).[1]

b) Prof. Toeplitz, Kiel: *Entdeckung und Geschichte der Infinitesimalrechnung und ihre didaktische Auswertung* (6 Std.).

Im 1. Teil seines Vortrages setzte Prof. Toeplitz die Berechnung der ersten Logarithmentafeln durch Bürgi und Napier in einer so durchsichtigen, klaren Weise auseinander, wie man sie in keiner der bekannteren Darstellungen der Geschichte der Mathematik findet. Der Vortragende hob das von Napier zur Berechnung der Logarithmen angewandte Verfahren der *Interpolation* als den entscheidenden Fortschritt gegenüber Bürgi hervor, ging auf die Hyperbelquadratur von Gregorius a Sancto Vincentio näher ein und setzte auseinander, wie in der Folge durch de Sarasa und den Holsteiner Nicolaus Mercator die Brücke von der als bestimmtes Integral festgelegten Hyperbelfläche zur logarithmischen Funktion geschlagen wurde.

Die Entdeckung der Infinitesimalrechnung im engeren Sinne behandelte Prof. Toeplitz dann im 2. Teile seiner Vorlesung. In einem großartigen Aufbau legte er die bedeutsamen Leistungen der großen Mathematiker des 16. und 17. Jahrhunderts, soweit sie für die Entdeckung der Infinitesimalrechnung in Betracht kommen, dar (Kepler, Fermat, Galilei, Cavalieri, Pascal, Torricelli), wies die Einflüsse nach, die sich unter ihnen gegenseitig geltend machten und schließlich in Barrow, Newton und Leibniz die Gedanken der Infinitesimalrechnung entstehen ließen. Die Zuhörer bekamen durch diese Ausführungen ein ausgezeichnetes, klares Bild von der Entstehung der Infinitesimalrechnung; man fühlte sich in jene alten Zeiten versetzt und erlebte alle die Entdeckungen auf das lebendigste mit. Die landläufigen Darstellungen über die Entstehung der Infinitesimalrechnung und über den sich anschließenden Prioritätsstreit zwischen Newton und Leibniz, bzw. deren Anhängern, erscheinen danach allerdings in einem andern Lichte.

Im 3. Teile seines Vortrages entwickelte Prof. Toeplitz einige Kernfragen, die sich ihm aus dem ganzen Umfange dieser historischen Betrachtungsweise für die didaktische und methodische Behandlung der Infinitesimalrechnung auf

1) Der Vortrag ist auf S. 201 ff. abgedruckt.

der höheren Schule ergeben. Indem er zunächst die große Gefahr und Schwierigkeit dieser didaktischen Aufgabe klarlegte, gelangte er zu gewissen positiven Vorschlägen über die Art und Weise, in der man die Differential- und Integralrechnung auf der Schule anlegen müßte, wenn man mit ihr dort mehr als einen neuen Formelrechenapparat darbieten wolle.[1])

An diese Ausführungen schloß sich eine sehr lebhafte Aussprache an. Aus ihr verdient hervorgehoben zu werden, daß nach der Ansicht der Versammlung *auf der höheren Schule sehr gut mit der Integralrechnung statt mit der Differentialrechnung begonnen werden kann.* Bei der Erörterung der Frage, ob und warum die Infinitesimalrechnung überhaupt auf die Schule gehöre, wurde der Bildungswert der Differential- und Integralrechnung untersucht. Die formale Technik des Differenzierens und Integrierens darf, wenn sie auch zur Erhöhung der Rechenfertigkeit der Schüler beitragen kann, doch nicht als der eigentliche Zweck der Behandlung der Infinitesimalrechnung auf der Schule gelten. Von manchen wurden als besonders wertvoll ihre Anwendungsmöglichkeiten bezeichnet, weil die Schüler bei der Lösung derartiger Aufgaben sicherlich in erhöhtem Maße das Gefühl produktiver Tätigkeit haben und damit größere Freude an solchen Aufgaben empfinden können. Andere waren der Meinung, daß die Infinitesimalrechnung als das wirkungsvollste Hilfsmittel der modernen Mathematik den Schülern nahe gebracht werden müsse, und daß man bei den Schülern Verständnis und Freude über das zusammenfassende Prinzip, das in der Infinitesimalrechnung liege, erwecken könne. Wieder andere sahen in den unendlichen Prozessen das besonders Wertvolle der Infinitesimalrechnung. Mit Ausnahme von zwei Teilnehmern hielt die Versammlung die verbindliche Einführung der Infinitesimalrechnung in den Lehrplan der höheren Schulen für einen glücklichen Fortschritt.

c) Oberstudienrat P. Meyer, Altona: *Logarithmentafel.*[2])

Referent gibt einen kurzen Überblick über die wichtigsten Logarithmentafeln von Briggs' Arithmetica logarithmica ab bis zur Gegenwart und erörtert, wie man anfangs auf eine Vermehrung der Stellenzahl der Logarithmen bedacht gewesen sei, später aber aus praktischen Gründen die Stellenzahl wieder vermindert habe.

Heute sei ein sehr großer Teil der Fachkollegen der Ansicht, daß die vierstelligen Tafeln für die Schulen vollkommen ausreichten. Für die Einführung der vierstelligen Tafeln sprechen folgende Gründe:

1. Die Stellenzahl ist für die begriffliche Entwicklung des „Logarithmus" gleichgültig.

2. Das Rechnen mit Logarithmen kann an vierstelligen Tafeln ebensogut eingeübt werden wie an fünfstelligen.

---

1) Herr Toeplitz wird seine Darlegungen zur Entdeckungsgeschichte der Infinitesimalrechnung im Rahmen eines Lehrbuches der Infinitesimalrechnung für Studierende und Lehrer der höheren Schulen veröffentlichen; den Plan dieses Lehrbuches hat er in einem auf der Düsseldorfer Naturforscherversammlung im September 1926 gehaltenen Vortrag entwickelt, der in den Jahresberichten der Dtsch. Math.-Ver. demnächst erscheinen wird. Die Folgerungen für die Infinitesimalrechnung auf der höheren Schule wird er als einen der in den Unterrichtsbl. f. Math. u. Naturw. erscheinenden Querschnitte ausführlich darlegen.

2) Der Bericht benutzt zum Teil Aufzeichnungen von Stud.-Rat Hoppe in Marne (Holstein).

3. Beim Rechnen mit vierstelligen Logarithmentafeln erhält man das Resultat mit einer Genauigkeit, die der beim praktischen Messen wirklich erreichbaren Genauigkeit ungefähr entspricht. Nur bei der Lösung von Zinseszinsaufgaben reichen vierstellige Tafeln im allgemeinen nicht aus.

4. Die Arbeit des Herausschreibens ist bei vierstelligen Tafeln geringer als bei fünfstelligen; dadurch wird an Zeit gespart, und außerdem werden die Fehlerquellen herabgemindert.

In der Aussprache waren die Kursusteilnehmer der Ansicht, daß die verbindliche Einführung des Rechnens mit vierstelligen Logarithmen einen Fortschritt gegenüber dem mit fünfstelligen Logarithmen bedeutet. Dann wurde aber betont, daß *die Schüler beim Rechnen mit den Logarithmen unbedingt das Interpolieren lernen und üben müßten.* Dies ist aber nicht in hinreichendem Maße möglich, wenn die vierstelligen Tafeln ausführlich die Logarithmen der Zahlen von 1000 bis 9999 bringen. Solche „engmaschigen" Tafeln sind daher abzulehnen. Weiter sprach sich die Versammlung für die in der Technik übliche Einteilung der Winkelgrade in Minuten aus; auch war die stark überwiegende Mehrzahl der Teilnehmer für die herkömmliche Anordnung der Numeri und Logarithmen, nicht für die von unten nach oben fortschreitende.

Einige vierstellige Tafeln wurden nach diesen Gesichtspunkten besprochen.[1])

d) Oberstudienrat Heller, Schleswig: *Formelsammlung.*

Referent hatte eine verhältnismäßig kurze Formelsammlung zusammengestellt und den Kursusteilnehmern vorgelegt. Es zeigte sich in der Aussprache, daß selbst diese sehr knappe Sammlung von Formeln manchen Kollegen noch als zu umfangreich erschien; es wurde die Streichung derjenigen Formeln gewünscht, die zum eisernen Bestand des mathematischen Wissens gehören. Wo aber hier die Grenze liegt, ist natürlich schwer zu sagen, weil die verschiedenartigsten Unterrichtserfahrungen und persönliche Momente dabei mitsprechen.

In der Aussprache wurden folgende zwei Punkte hervorgehoben:

1. *Die Benutzung einer Formelsammlung soll nur für die Oberstufe in Betracht kommen.*

2. Auch nach Einführung einer Formelsammlung ist nicht darauf zu verzichten, daß bestimmte, in der Sammlung enthaltene Formeln zunächst von den Schülern gelernt und eine Zeitlang für den Gebrauch gedächtnismäßig festgehalten werden. Daher erscheint es geboten, daß, wo eine gedruckte *Formelsammlung* eingeführt wird, diese *nicht mit der Logarithmentafel zusammengebunden* wird, sondern daß sie von ihr getrennt bleibt, so daß die Schüler bei einer Klassenarbeit die Logarithmentafel allein benutzen können.[2])

e) Prof. Toeplitz, Kiel: *Vom Grundgedanken der Idealtheorie und von der methodischen Bedeutung dieses Gedankens für die Schulmathematik.*[3])

---

1) Herr Toeplitz, der die Debatte damals leitete, hat seine Darlegungen in einer Sitzung des mathematisch-didaktischen Kolloquiums in Kiel am 5. Februar 1927 ausführlicher entwickelt. Dieser Vortrag, der aus der mathematisch-physikalischen Unterrichtswoche hervorgegangen ist, findet sich auf S. 203 ff. abgedruckt.

2) Was die Anschaffung einer Formelsammlung durch den Schüler betrifft, so kann man der kürzlich wieder durch P. Epstein geäußerten Ansicht (s. Jahresber. d. D. Math.-Ver., 35. Bd., S. *141*) nur beipflichten, daß sich der Schüler selbst die Sammlung im Laufe des fortschreitenden Unterrichts anlegen soll.

3) Der 1. Teil des Vortrags ist S. 211 ff. abgedruckt.

Der 1. Teil des Vortrages hatte auf den Mathematikunterricht der höheren Schule keinen direkten Bezug, insofern er nicht Lehrstoff für ihn liefern wollte; das vorgebrachte Material könnte höchstens teilweise für eine Arbeitsgemeinschaft in Prima in Betracht kommen. Desto eindringender hatte der Redner die *indirekte* Bedeutung seiner Darlegungen für den Schulunterricht herausgearbeitet und im ganzen Aufbau des ersten Teiles seines Vortrages zum Ausdruck gebracht. Bevor man einen Beweis für etwas gibt, muß der Schüler erkennen, was bewiesen werden soll, und daß die Notwendigkeit eines Beweises vorliegt. Solange der Schüler keinen Einblick in die Schwierigkeit eines Problems hat, kann er den Beweis nicht verstehen und würdigen. Weil man es früher häufig anders — verkehrt — machte, ist das „strenge Denken" in der Mathematik in Verruf gekommen. Eine richtige Methode wird dies vermeiden können; der Lehrer muß nur wissen, wo die Probleme liegen, und welche Probleme er den Schülern überhaupt vorsetzen kann, andrerseits auch, welche Probleme er besser gar nicht berührt.

f) Prof. Wernick, Kiel: *Der bildende Wert des Physikunterrichts.*[1])

g) Oberstudienrat Heller, Schleswig und Stud.-Rat Hans Schmidt, Kiel: *Die Einrichtung von physikalischen Schülerübungen.*

Der erste Referent schilderte, wie die O. R. K. (Kiel) unter Überwindung mancher Schwierigkeiten ihre physikalischen Schülerübungen ausgebaut hat und besonders, wie zur Beschaffung einer ausreichenden Zahl von Apparaten die Elternschaft gewonnen wurde. Der zweite Referent sprach über die Beschaffung und Aufstellung der Apparate.[2])

h) Stud.-Rat Hans Schmidt, Kiel: *Ausgewählte Versuche aus der Schulphysik.*[3])

i) Oberstudienrat Heller, Schleswig: *Die mathematisch-physikalische Literatur in den Anstaltsbibliotheken.*

Referent ging von der unbestrittenen Tatsache aus, daß die Anstaltsbibliotheken der allermeisten Schulen hinsichtlich der mathematisch-physikalischen Literatur in einem betrüblichen Rückstande sind. Die von den Richtlinien geforderte historische Einstellung sowie der gewaltige Fortschritt auf allen Gebieten des Wissens, namentlich aber in den Naturwissenschaften, fordern zu einer Revision der Bibliotheksbestände und zu einer zeitgemäßen Ergänzung an neuerer Literatur, die sich der einzelne Fachkollege unmöglich selbst beschaffen kann, heraus. Den Teilnehmern wurde eine Liste der hauptsächlich in Frage kommenden Werke für Mathematik und Physik in die Hand gegeben und im übrigen auf den Literaturnachweis in den Richtlinien, II. Teil, verwiesen.

Sonstige Veranstaltungen.

a) Der *Ausflug nach Eckernförde* zur Besichtigung der Einrichtungen für physikalische Schülerübungen und für Werkstattunterricht im dortigen Reformrealgymnasium.

Nach den Ausführungen des Leiters der Anstalt, Studiendirektors Rasmussen, hat sich die Schule das Ziel gesetzt, sämtliche Schüler nacheinander

---

1) Der Vortrag ist S. 217 ff. vollständig abgedruckt.
2) Der Bericht ist S. 225 ff. abgedruckt.
3) Der Vortrag ist S. 227 ff. auszugsweise wiedergegeben.

an allen Zweigen der Werktätigkeit teilnehmen zu lassen. Für VI und V sind Gartenarbeiten, für IV und UIII Papparbeiten, für OIII und UII Holzarbeiten und für die Oberstufe Metallarbeiten vorgesehen. Ein Gang durch die Schule zeigte, daß dieses Ziel schon zum größten Teil erreicht ist. Die Werkstatt für Papp- und Buchbinderarbeiten umfaßt 16 Arbeitsplätze, die Werkstatt für Holzbearbeitung enthält 12 vollständige Arbeitsplätze, jeder mit einer Hobelbank. Außerdem bekamen die Besucher noch das „Schülerheim" mit Schülerbibliothek, Bühne, Wasch- und Duscheinrichtungen neben der Turnhalle, ein Heim für kleinere Schüler, einen Schlafraum für auswärtige Schüler zu sehen. Die Einrichtungen für Metallbearbeitung sowie für physikalische Schülerübungen sind im Entstehen begriffen; vieles von diesen Einrichtungen wurde und wird von den Schülern selbst hergestellt.

b) Der *Besuch der Sternwarte.* Dank dem Entgegenkommen des Direktors der Sternwarte, Prof. Rosenberg, konnten die Kursusteilnehmer die Sternwarte besichtigen. Von größeren Beobachtungsinstrumenten wurden außer dem sehenswerten Meridiankreis einige ältere Fernrohre gezeigt, auch sahen die Besucher die umfangreiche Bibliothek der Sternwarte. Vor allem bekamen sie aber bei der Betrachtung des Zeißschen Stereokomparators sowie einiger ganz neuer Apparate zur Bestimmung von Lichtintensitäten mit Hilfe von Photozellen einen Begriff, mit welchen feinen Meßmethoden die heutige Astrophysik arbeitet.

Abschluß der Woche. Die mathematisch-physikalische Woche fand ihren Abschluß mit einer Konferenz der Teilnehmer, auf der in Gegenwart von Oberschulrat Consbruch die Ergebnisse der Tagung, soweit sie sich schon übersehen ließen, ferner Anregungen und Wünsche für künftige derartige Veranstaltungen besprochen werden sollten. Zunächst teilte der Leiter der Woche seine Eindrücke mit und führte folgendes aus:

1. Bei den praktischen Übungen mit dem Rechenschieber wäre es sicherlich von Vorteil gewesen, wenn man die Teilnehmer in zwei Gruppen, Anfänger und Fortgeschrittene, eingeteilt hätte. 2. Hinsichtlich der Dauer der Tagung scheinen zehn Tage gerade noch ein erträgliches Maß an Anstrengungen zu bedeuten, die den Kursusteilnehmern zugemutet werden konnten; die Versammlung stimmte der Auffassung zu, daß bei noch längerer Dauer eines solchen Fortbildungskurses die große Gefahr besteht, daß die Aufnahmefähigkeit der Teilnehmer den Darbietungen nicht gewachsen ist.

Aus dem Kreise der Teilnehmer wurden noch folgende Anregungen gegeben: 3. Um bei einer derartigen Tagung den Teilnehmern einmal eine Ruhepause zu gewähren, solle gelegentlich ein Nachmittag ganz frei gehalten werden; auch könnte die Besichtigung wichtiger Betriebe oder Institute in den Plan der Woche aufgenommen werden. 4. Bei den Unterrichtsproben sollte man einmal versuchen, Parallelversuche — gleiche Lehrstoffe nach verschiedenen Methoden — zu veranstalten. Ferner müßte in den Lehrproben auch einmal gezeigt werden, wie sich der Gedanke der philosophischen Durchdringung oder der Gedanke der kulturellen Einordnung verwirklichen läßt. 5. Von verschiedenen Seiten wird die Mitwirkung von Universitätslehrern bei dieser Woche als ganz besonders erfreulich und wertvoll bezeichnet und der Wunsch ausgesprochen, daß die Mitarbeit von Hochschullehrern bei derartigen Kursen nicht nur in Mathematik, sondern auch in andern Fächern angestrebt werden möge. 6. Unter der lebhaften Zustimmung aller Teilnehmer wird der Wunsch ge-

äußert, die Fühlung mit der Universität zu erhalten und weiter auszubauen. Eine Zusammenarbeit von Mathematik- und Physiklehrern mit Universitätslehrern besteht schon seit längerer Zeit im *„Kieler mathematisch-didaktischen Kolloquium“* (seinerzeit von Oberschulrat Zühlke und Prof. Toeplitz gegründet und jetzt von letzterem und Prof. Wernick geleitet). Von den auswärtigen Teilnehmern wird nun angeregt, es möchte der Besuch dieses Kolloquiums auch den außerhalb Kiels wohnenden Kollegen, etwa durch Gewährung von Reisebeihilfen, ermöglicht werden.[1])

Oberschulrat Consbruch schließt nach Worten des Dankes an den Herrn Minister für Wissenschaft, Kunst und Volksbildung für die Bereitstellung der Mittel für diese Woche sowie an alle bei dieser Veranstaltung Beteiligten die mathematisch-physikalische Unterrichtswoche mit dem Wunsche, daß die Teilnehmer die während der Woche empfangenen Anregungen in weitere Kreise tragen und zum Heile der Schule fruchtbar machen möchten.

Über das verkürzte Rechnen.

Von R. NEUENDORFF in Kiel.

Sind irgendwelche Größen physikalisch mit einer Genauigkeit gemessen, die eine halbe Einheit der letzten angegebenen Dezimale offen läßt, und sind mit den so angegebenen Größen Rechnungen auszuführen, so bedient man sich in der Regel des Rechenschiebers, der Logarithmen- und sonstigen Tafeln oder der Rechenmaschinen. Die Schattenseite aller dieser mechanischen Hilfsmittel ist es, daß sie nicht automatisch auf den Genauigkeitswert der verwendeten Zahlen Rücksicht nehmen. Sie liefern ein Ergebnis, ohne irgendeinen Hinweis darauf zu geben, wie viele der gelieferten Ziffern vernünftig sind.

Es ist der Vorzug des *„verkürzten Rechnens“*, sich so gestalten zu lassen, daß es sich der jeweils vorliegenden Genauigkeit anschmiegt und auch das Ergebnis in einem vernünftigen Ausmaß von Stellen mit einem Minimum von Rechenaufwand liefert.

Es soll im folgenden gezeigt werden, wie einfach die Maßnahmen sind, durch die man die passende Verkürzung bei jedem Schritt der Rechnung herausfindet, und wie einfach die Abschätzungen sind, mit denen man den Genauigkeitswert des Endergebnisses voraussagen kann. Das Problem ist also: *es soll eine Rechenmethode angegeben werden, die rein automatisch auch das Ergebnis auf* $\pm$ 0,5 *Einheiten der letzten angebbaren Ziffer genau liefert. Und zwar so, daß man weder mehr noch weniger Stellen als möglich erhält.*

Am einfachsten erledigen sich Addition und Subtraktion. Rundet man sämtliche Summanden bzw. Subtrahenden auf die gleiche Stellenzahl ab, so besitzen n Summanden bzw. $(n - 1)$ Subtrahenden mit einem Minuenden zusammen den Fehler von $\pm n \cdot 0{,}5$ Einheiten der letzten Ziffer; also für $n = 20$ sind es ± 10 Einheiten. Daraus folgt, daß man bei Summen bis zu 20 Sum-

1) Durch das Entgegenkommen des P. S. K. in Schleswig und der Universitätsgesellschaft in Kiel konnte dieser Wunsch bereits erfüllt werden. An den im Laufe dieses Winters stattgefundenen Kolloquien haben jedesmal bis zu 30 auswärtige Kollegen teilgenommen.



manden und Differenzen bis zu 19 Subtrahenden vom Ergebnis die beiden letzten Ziffern zu streichen hat; auch dann noch kann der Fehler bis zu $\pm$ 0,6 Einheiten der letzten verbleibenden Ziffer betragen.

Etwas verwickelter liegt es bei der Multiplikation und Division. Die *erste Multiplikationsregel* heißt: *Multiplikator und Multiplikandus erhalten gleich viele Ziffern. Die letzte Ziffer des Multiplikandus wird aber sofort gestrichen und nur zur Abrundung des ersten Teilproduktes verwendet.*[1])

Dabei ergibt sich ein Gesamtfehler, der aus drei Teilen besteht: δ_1 dem Rechnungsfehler infolge wegfallender Teilprodukte; δ_2 dem Rechnungsfehler infolge der Abrundungen der Teilprodukte; δ_3 dem Formelfehler.

Da die Kommastellung auf die Fehlergröße ohne Einfluß ist, so kann ohne Einschränkung der Allgemeinheit zur Vereinfachung der Darstellung angenommen werden, daß in jedem Faktor nur die Einer vor dem Komma stehen. Die Zahl der Ziffern eines jeden Faktors sei n; die letzte Stelle im vorläufigen Ergebnis sei die 10^kte. Sei $p = a \cdot b$ das Produkt, dann ist bekanntlich[2])

$$\delta_1 < Q \cdot 10^{k-1},$$

wo Q die kleinere der Quersummen von a oder b bedeutet. Weiter ist

$$\delta_2 \leqq | n \cdot 5 \cdot 10^{k-1} |,$$

da n Teilprodukte den Fehler von 5 Einheiten in der 10^{k-1}ten Stelle besitzen können. Endlich ist

$$\delta_3 \leqq | (a + b) \cdot 5 \cdot 10^{k-2} |,$$

da bekanntlich der Formelfehler $a \cdot \Delta b + b \cdot \Delta a$ und hier $\Delta a = \Delta b = 5 \cdot 10^{k-2}$ ist, denn die Faktoren sollen ja eine Stelle mehr besitzen als die Teilprodukte. Daraus folgt als Gesamtfehler

$$\delta < | (Q + 5n + (a + b)\, 0{,}5)\, 10^{k-1} |.$$

Der Fehler wird am ungünstigsten, wenn sämtliche Ziffern der Faktoren Neunen sind, also $Q = n \cdot 9$ und $a + b \approx 20$. Daraus folgt

$$\delta < | (14n + 10)\, 10^{k-1} |.$$

Ist $n = 6$, so wird $\delta < | 94 \cdot 10^{k-1} |$

$n = 13$, so wird $\delta < | 192 \cdot 10^{k-1} |$.

So ergibt sich die *zweite Multiplikationsregel: Man streicht vom vorläufigen Ergebnis 2 Stellen weg, dann beträgt bis zu 6 Ziffern der Faktoren der Fehler höchstens 0,6; bis zu 13 Ziffern höchstens 0,7 Einheiten der letzten verbleibenden Stelle.*

Die Division führt zu genau derselben Fehlerformel, wenn man dem Divisor eine Stelle mehr als dem Dividendus gibt, die letzte Stelle vom Divisor nur zur Abrundung benutzt und die beiden letzten Stellen vom vorläufigen Ergebnis streicht. Dabei muß die erste Ziffer des Dividendus größer als die des Divisors sein, andernfalls ist dem Dividendus eine Mehrstelle zu geben.

---

1) Die weitere Ausführung einer verkürzten Multiplikation wird als bekannt vorausgesetzt.

2) Z. B. Lothar Schrutka, Zahlenrechnen. Leipzig-Berlin 1923, S. 48.

Das Ergebnis ist, daß, bis auf wenige Ausnahmen, nach den gefundenen Regeln automatisch die geforderte Genauigkeit von $\pm$ 0,5 Einheiten erreicht wird. Aber man darf nicht übersehen, daß auch diese Rechenregeln im praktischen Leben fast immer ideale, unerfüllbare sind, weil einfach die erforderliche Stellenzahl gar nicht zur Verfügung steht, um bei strenger Beachtung der Regeln überhaupt zu einem Ergebnis zu kommen. Indem man sich darauf beschränkt, meist nur die letzte errechnete Stelle zu streichen, begnügt man sich mit einem *wahrscheinlich* richtigen Ergebnis, richtig in dem Sinne, daß eben der Fehler nicht mehr als $\pm$ 0,5 Einheiten beträgt.

Wenn auch die Begründung des verkürzten Rechnens durch Fehlerabschätzung in der Schule wünschenswert und in Oberklassen, z. B. in Arbeitsgemeinschaften, sicher durchführbar ist, so kann doch anderseits schon sehr früh anschaulich und ganz elementar, wie öfters gezeigt, das verkürzte Rechnen gelehrt werden. Verwiesen sei außer auf das Buch von Lothar Schrutka noch auf:

E. Kullrich, Die abgekürzte Dezimalbruchrechnung. Programm. Schöneberg 1898.

R. Neuendorff, Praktische Mathematik. 1. Teil. 2. Aufl. Leipzig-Berlin 1917.

A. Witting, Abgekürzte Rechnung. (Math.-Phys. Bibl.) Leipzig-Berlin 1922.

Zur Theorie und Praxis der Logarithmentafeln.

Von O. TOEPLITZ in Kiel.

Mit 2 Figuren im Text.

Der Übergang von den fünfstelligen Tafeln zu den vierstelligen, für den A. Schülke jahrzehntelang gestritten hat, ist im Prinzip vollzogen. Indessen geben einige Punkte des noch im Fluß befindlichen Übergangs Anlaß zum Denken — es sei hier nur der eine Punkt herausgehoben, daß man mancherorts solche vierstelligen Tafeln eingeführt hat, die aus fünfstelligen durch Wegstreichen der letzten Stelle fabriziert sind, aber ebenso viele Mantissen enthalten, wie die fünfstelligen — und diesen Punkten seien die folgenden Betrachtungen gewidmet.

Es geschieht dies um so lieber, als ich in diesem etwas unscheinbar und rein technisch anmutenden Gegenstande eine Stelle des Schulunterrichts sehe, an der ein zweckmäßiger Unterbau für die später zu lehrende Infinitesimalrechnung begonnen werden kann, eine erste Bekanntschaft mit dem Umgehen mit kleinen Größen, aus deren numerischer Praxis und Anschauung später ein wirkliches und inneres Verständnis der Differentiale erwachsen könnte. Denn wenn die Schule die infinitesimalen Dinge der allgemeinen Bildung als einen wesentlichen Bestandteil einverleiben will, so kann es weder die Absicht sein, ein abstraktes Gebäude zu errichten, das vor die Hörer mathematischer Universitätsvorlesungen gehört, noch andererseits sich mit dem rein formalen Rechenapparat und der Freude daran zu begnügen, sondern sie muß sich das Ziel setzen, von dem wirklichen Sinn der Infinitesimalrechnung, wie ihn ihre Entdecker sich gedacht haben, einen ungefähren Begriff zu geben; und der Weg, den die geschichtliche Entwicklung von Napier und Kepler über Mercators Logarithmotechnia gegangen ist, verlockt zu seiner Nachahmung in der didaktischen Praxis. Zu diesem Ziel einen wohlumgrenzten, partiellen Beitrag zu

liefern, soll im folgenden versucht werden, während eine vollständige Behandlung des eben berührten umfassenden Problems einer späteren Gelegenheit vorbehalten bleibe.

Es soll allerdings zunächst weniger von diesen späteren Zielen die Rede sein, als von der praktischen Gestaltung der Tafeln. Aber um zu klaren Kriterien über den Wert der einzelnen technischen Details zu gelangen, müssen wir uns die theoretische Struktur der Tafeln kurz vergegenwärtigen, um so mehr, als die Enzyklopädien der Elementarmathematik an diesem Punkte vorbeigegangen sind, der ihrem Bereich ausgesprochenermaßen angehört. Es wird sich dabei herausstellen, wie überraschend einfach es ist, zu einer völligen Klarheit über die theoretische Konstruktion der verschiedenen Tafeln zu gelangen — insofern wird hier ein Gegenstück zu den Ausführungen von Neuendorff über das abgekürzte Rechnen geliefert werden.

I. Von dem präzisen Sinn der Tafeln.

Wenn man eine Tafel zur Hand nimmt, so steht man vor der Frage, vor der auszuweichen wir von unserer Schulzeit her alle systematisch erzogen worden sind, was man eigentlich von der Tafel erwarten kann. Es sind nun in Wahrheit nur zwei Punkte, über die man sich prinzipiell Klarheit verschaffen muß, um die Leistungsfähigkeit der Tafel in ihrem vollen Umfange übersehen zu können. Und, wie man sehen wird, ist es leicht, diese beiden Punkte in einer solchen Weise zu überblicken, daß man jede Art von Tafeln nach einer einfachen Regel durchprüfen kann.

1. Die lineare Interpolation.

Daß weder der Schulunterricht noch die technische Praxis sich mit anderer als *linearer* Interpolation zu befassen hat, bedarf keiner Erörterung. Höhere Interpolation, die mit Differenzen höherer Ordnung operiert, wird immer nur Sache spezieller astronomischer, geodätischer oder abstrakt-mathematischer Unternehmungen sein. Man wird deshalb von jeder Tafel zu fordern haben, daß die lineare Interpolation statthaft ist, ohne die Leistung der Tafel zu gefährden. Wollte man z. B. eine Tafel der Kuben, die so anhebt

1,00	1,000 00
1,01	1,030 30
1,02	1,061 21
. . .	. . . .

linear interpolieren, so würde man für 1,005 den Wert 1,015 15 erhalten, während der wahre Wert 1,015 08 lautet; also kaum die 4., geschweige denn die 5. Stelle wird durch lineare Interpolation richtig geliefert. Die Tafel ist zu weitmaschig, um lineare Interpolation auf 5 Stellen zuzulassen; wäre sie engmaschiger, enthielte sie zwischengeschaltet auch die Kuben von 1,001; 1,002; . . .; 1,009 usw., so läge das anders. Oder anders gewendet: würden wir in die rechte Kolumne der obigen Tafel nicht den exakten Wert der Kuben, sondern nur 3 Stellen hinter dem Komma aufnehmen, dann wäre die obige Interpolation im Rahmen dieser 3 Dezimalen statthaft gewesen. Es wird auf Grund dieses

Beispiels einleuchten, was damit gemeint ist, *die lineare Interpolation solle im Rahmen der in der Tafel gegebenen Dezimalen statthaft sein.*

Um allgemein für eine Tafel, die irgendeine Funktion $f(x)$ tabelliert, den Schaden abzuschätzen, den das lineare Interpolieren anrichten kann, haben wir die maximale Abweichung zu betrachten, die $f(x)$ in einem kleinen Intervall a, b von der die Endwerte verbindenden Sehne aufweist, also die Größe

$$\mu(a, b) = \text{Max} \left| f(x) - \frac{(b-x) f(a) + (x-a) f(b)}{b-a} \right|.$$

Nach den Regeln der Differentialrechnung wird dieses Maximum an derjenigen Stelle t des Intervalls a, b erreicht werden, an der die Ableitung dieses Ausdrucks nach x verschwindet,

$$f'(t) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}. \qquad (1)$$

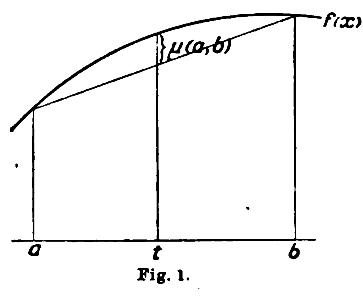


Fig. 1.

Was uns interessiert, ist aber weniger diese Stelle t, als der Wert μ, der an dieser Stelle angenommen wird; dieser ist

$$\begin{aligned} \mu(a, b) &= f(t) - t\frac{f(b) - f(a)}{b-a} - \frac{bf(a) - af(b)}{b-a} \\ &= f(t) - t\frac{f(b) - f(a)}{b-a} + a\frac{f(b) - f(a)}{b-a} - f(a) \\ &= [f(t) - f(a)] - (t-a)\frac{f(b) - f(a)}{b-a}, \end{aligned}$$

und dies ist wegen (1) und auf Grund der Taylorschen Entwicklung

$$\begin{aligned} &= f'(a)(t-a) + \tfrac{1}{2} f''(a)(t-a)^2 + \cdots \\ &\quad - (t-a)[f'(a) + f''(a)(t-a) + \cdots] \\ &= -\tfrac{1}{2} f''(a)(t-a)^2 + \cdots; \end{aligned}$$

nun folgt andererseits aus (1) durch Taylorsche Entwicklung

$$f'(a) + f''(a)(t-a) + \cdots = f'(a) + \tfrac{1}{2} f''(a)(b-a) + \cdots,$$

mithin, daß $(t - a)$ angenähert die Hälfte von $(b - a)$ ist, daß also die Linearität der Interpolation immer ungefähr in der Mitte zwischen den beiden Tafelwerten, zwischen denen interpoliert wird, am meisten gefährdet ist; für $\mu(a, b)$ folgt somit der Näherungsausdruck

$$\mu(a, b) = -\tfrac{1}{8} f''(a)(b-a)^2 + \cdots, \qquad (2)$$

passen höhere Glieder für unseren Zweck, wo $(b - a)$ im Verhältnis zu a stets außerordentlich klein sein wird, immer weggelassen werden können — die Formeln sind absichtlich so arrangiert, daß eine exakte Abschätzung dieser Vernachlässigung mittels des Taylorschen Restgliedes unmittelbar zu geben wäre.

Ein Beispiel mag den Nutzen dieser allgemeinen Formel erläutern. Sei $f(x) = \log x$ der dekadische Logarithmus von x, also

$$f'(x) = \frac{M}{x}, \; f''(x) = -\frac{M}{x^2},$$

wo $M = 0{,}434\ldots$; mögen die Tafeln die Mantissen der Zahlen von 100 bis 1000 enthalten (gewöhnlich steht am Rande: von 10,0 bis 99,9; das ist natürlich dasselbe; die Hauptsache, ist *wie viele* Mantissen die Tafel im ganzen enthält). Sei nun a irgendeine der ganzen Zahlen von 100 bis 1000, b die nächste, so daß $b - a = 1$ ausfällt, so wird $\mu(a, a+1) = \frac{1}{8} M \frac{1}{a^2}$[1], wird also am größten sein, wenn a möglichst klein ist, also $a = 100$:

$$\mu(100{,}101) = \tfrac{1}{8} \cdot 0{,}434 \cdots\ 100^{-2} = 54 \cdot 10^{-7}. \tag{3}$$

In der Tat entnimmt man aus siebenstelligen Tafeln

$$\log 100 = 2{,}000\,000\,0$$
$$\log 101 = 2{,}004\,321\,4$$

und würde daraus durch lineare Interpolation erhalten

$$2{,}002\,160\,7,$$

während die Tafeln liefern $\log 100{,}5 = 2{,}002\,166\,1$,

also genau 54 Einheiten der 7. Dezimale mehr. Verfolgt man die Interpolation durch alle Zehntel hindurch, so sieht man, wie genau diese Abweichung in der Mitte ihr Maximum hat und sich um dieses zu beiden Seiten symmetrisch verteilt.

Das Ergebnis ist, *daß Tafeln des dekadischen Logarithmus, die die Mantissen aller Zahlen von 100 bis 1000 geben, bei linearer Interpolation keinen größeren Fehler als 0,54 Einheiten der 5. Dezimale darbieten können;* dies ist nur $\frac{1}{10}$ des Fehlers, den das Abrunden der 4. Stelle bedeutet; *Tafeln der Zahlen 100 bis 1000 dürfen also bis zu vier Stellen gehen, ohne daß das lineare Interpolieren bedenklich wäre; bei fünf Stellen wären sie schon etwas zu weitmaschig.*

2. Das Aufschlagen des Numerus.

Weit einfacher ist der Fehler abzuschätzen, der sich beim Aufschlagen des Numerus einstellt. Wenn die Tafel des dekadischen Logarithmus z. B. angibt, es sei $\log 2 = 0{,}3010$ auf 4 Stellen, so besagt dies nur, aber dies mit völliger Präzision, daß $\log 2$ zwischen $0{,}300\,95$ und $0{,}301\,05$ gelegen ist; weiß man also von einer Mantisse umgekehrt, daß sie 3010 im eben angegebenen Sinne lautet, so kann man daraus nicht schließen, daß der zugehörige Numerus exakt $= 2$ sei, sondern nur, daß er in einem gewissen Intervall um 2 herum gelegen sein muß. Die Größe dieses Intervalls mit einer kurzen, für die ganze Tafel einheitlich geltenden Regel abzuschätzen, ist die Aufgabe. Ist — um sie alsbald allgemein zu erledigen — in einer Tafel der Funktion $f(x)$ zu einem Funktionswert $f(a)$ der Numerus a aufzusuchen, und weiß man genau genommen nicht, daß $f(x) = f(a)$ ist, sondern nur, daß $f(x)$ zwischen $f(a) - d$ und $f(a) + d$ gelegen ist, so folgt, daß höchstens

$$f(x) - f(a) = f'(a)(x - a) + \cdots = d$$

sein kann, also angenähert $x - a \leqq \pm d/f'(a)$. (4)

1) Diese spezielle Formel (ohne die hier daraus gezogenen Schlußfolgerungen) findet sich, wie ich nachträglich bemerke, schon bei J. E. A. Steggall, Edinb. M. S. Proc. **10**, 1892, p. 35—37.



Eine Tafel für die Funktion $f(x)$ liefert zu einem Funktionswert, der mit der Genauigkeit $\pm d$ bekannt ist, den Numerus angenähert mit der durch (4) *gegebenen Ungenauigkeit.*

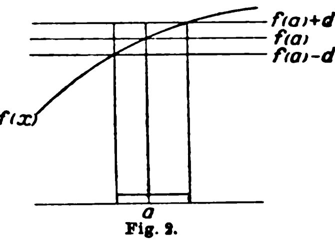


Fig. 2.

Für den dekadischen Logarithmus z. B. ist also der Fehler des Numerus angenähert

$$a \cdot d \cdot 1/M = a \cdot d \cdot 2{,}30 \ldots,$$

also proportional zu a, er beträgt einen gewissen Prozentsatz des gesuchten Numerus a — eine Besonderheit der Logarithmentafeln, die vom Rechenschieber her wohl bekannt ist. Im günstigsten Falle des Aufschlagens eines exakt gegebenen Numerus hat man bei einer vierstelligen Tafel $d = \frac{1}{2} \cdot 10^{-4}$, also als den Normalfehler für den Numerus den Betrag $a \cdot 0{,}000115 \ldots$ oder prozentual ausgedrückt 1,15 auf 10000. Will man nicht den prozentualen Fehler, sondern ein Maximum des absoluten Fehlers, so hat man als Ungünstigstes am oberen Ende der Tafel für $a = 1000$ den Fehler $0{,}115 \ldots$, also rund $\frac{1}{10}$ Einheit der in der Tafel unmittelbar, ohne Interpolation, gegebenen Stelle.

3. Die Leistungsfähigkeit der Tafel.

Es ist nun das wesentliche, daß man allein aus den Formeln (2) *und* (4) *bei jeder mit der Tafel zu lösenden Aufgabe eine präzise Abschätzung für den Wert des Resultats erhält.* Führt man z. B. eine Multiplikation zweier exakt gegebener Zahlen mit einer Tafel dekadischer Logarithmen aus, so sucht man zuerst die Mantissen der beiden Faktoren auf; diese sind eine jede auf eine halbe Einheit der 4. Stelle genau; bildet man jetzt deren Summe, so ist diese bis auf den doppelten Betrag davon bestimmt, d. h. es ist bei dem nun folgenden Numerusaufschlagen $d = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10^{-4}$, mithin der Numerus mit einem prozentualen Fehler von 2,3 auf 10000 bestimmt; das dabei zugleich notwendige lineare Interpolieren kann an d nur eine Änderung um $\frac{1}{10}$ von $\frac{1}{2} \cdot 10^{-4}$ bewirken und also entsprechend das Verhältnis 2,3 auf 10000 in höchstens 2,53 auf 10000 verschlechtern. Größer kann der gesamte Fehler gewiß nicht sein.

Die genauere Begründung dieser Regel und ihre Durchführung für alle in den der Schule dienenden Tafeln tabellierten Funktionen würde den Rahmen dieses Vortrags überschreiten und soll bei anderer Gelegenheit gegeben werden Hier sollte nur das Prinzip verdeutlicht werden.

II. Was von den Tafeln vom Standpunkt der Praxis und der Schule zu fordern ist.

1. *Die Genauigkeit der Tafeln soll zu der der gemessenen Größen in einem vernünftigen Verhältnis stehen.* Franz Neumann soll einmal gesagt haben: die Logarithmentafeln bringen immer erst die Genauigkeit in die physikalischen Messungen. Diese Äußerung stammt aus der Epoche der siebenstelligen Tafeln, aber sie zeigt in drastischer Weise, wie sinnlos es ist, Tafeln zu verwenden, die für die in Betracht kommenden Zwecke zu genau sind. Das Gegenspiel dazu

ist die selbstverständliche Forderung, daß die Tafeln nicht durch Ungenauigkeit die Feinheit der Messungen gefährden dürfen.

Es ist sicher zutreffend, daß vierstellige Tafeln für die üblichen Zwecke von Technik und Schule genügen. Analysiert man aber die Tafelausgaben mit den oben in I gegebenen Regeln, so erheben sich eine Reihe von Einzelfragen, die eine noch genauere Klärung vertragen würden. Z. B. werden vielfach für die Logarithmen der Zahlen 1000 bis 1100 und für die trigonometrischen Funktionen kleiner Winkel besondere Tafeln gegeben. Hier wäre die genaue Frage zu stellen, ob die geodätischen und anderen beobachtenden Aufgaben der Schule wirklich solche Maßnahmen erforderlich machen. Tafeln des log sin etwa, die vierstellig sind, werden in Rücksicht auf die lineare Interpolation in der Nähe von 0^0 unbrauchbar, aber nicht etwa bei 5^0 — auch fünfstellige von Minute zu Minute fortschreitende Tafeln können zur Not sogar bis 2^0 linear interpoliert werden —, sondern, sei es daß sie nach Zehntel Graden, sei es daß sie von 10 zu 10 Minuten fortschreiten, ungefähr bei 3^0 und ernstlich erst bei 2^0 in der 3. Stelle usw. Hier wäre also zu fragen, ob die Triangulationen der Schule damit nicht auskommen, und zwar die wirklich in Schülerübungen zu messenden; denn um ausgedachter Aufgaben willen kann man nicht Sondertafeln aufnehmen, sondern wird besser sich andere Aufgaben ausdenken, die zur Einübung der normalen Tafeln dienen.

Eine Debatte über die Genauigkeiten, die die Schule wirklich braucht, wäre also hernach gewiß sehr lehrreich. Sie setzt aber voraus, daß wir überhaupt imstande sind, bei jeder vorgelegten Tafel leicht zu erkennen, welches Maß von Genauigkeit sie liefert. Ich komme damit auf den Hauptpunkt meiner Ausführungen.

2. *Die Tafeln müssen erkennen lassen, welchen Genauigkeitsforderungen sie gewachsen sind.* Wir benutzen die Tafeln, wie wir in einen Eisenbahnzug einsteigen, darin plaudern, essen, arbeiten und am Ziel aussteigen können, ohne auch nur einen Blick durch die Fenster hinausgetan zu haben. Wir erhalten ein Resultat, aber wir haben keine Ahnung, wie weit dieses durch die Tafeln belastet worden ist. Ich habe oben gezeigt, wie einfache Regeln sich für die Leistung der Tafeln jeder Art aufstellen lassen. Es wäre eine Kleinigkeit, bei jeder Tafel unten auf der Seite oder auf einer Extraseite für das ganze Tafelheft diese beiden Genauigkeitsabschätzungen fertig ausgerechnet (wie es oben für je ein Beispiel geschah) anzumerken. Dies würde niemanden zu etwas im Unterricht verpflichten. Aber es würde (wenn auch zunächst vielleicht nur in Arbeitsgemeinschaften und gewiß nicht im ersten Unterricht in den Tafeln) die Möglichkeit geben, mit Schülern Genauigkeitsfragen zu erörtern. Dies ist nicht etwa so schwierig, wie es bisher wohl manchmal angesehen worden ist, sondern es lassen sich sehr einfache Aufgabenreihen daraus bilden, daß ausgeführte Rechnungen einer Kontrollrechnung bezüglich Genauigkeit unterworfen werden. Das Bewußtsein vom Rechnen mit kleinen Größen würde durch solche Übung ungemein gefördert werden. Es ist angewandte Mathematik im echten Sinne, die hier gerade an eine Stelle treten soll, wo der öde Formalismus bisher allein geherrscht hat.

3. *Es soll nur linear interpoliert werden und die partes proportionales sollen nicht mehr als zweistellig sein.*

Diese Forderung ist durch psychologische Gründe motiviert. Insbesondere

ist dreistellige Interpolation nicht mehr im Kopfe ausführbar und für Schule und normalen technischen Gebrauch unzweckmäßig, didaktisch von keinerlei Wert.

Dazu treten die rein didaktischen Forderungen:

4. *Das Prinzip des logarithmischen und trigonometrischen Rechnens soll an den Tafeln auf die einfachste Weise lehrbar sein.*

5. *Die Idee und Praxis des Interpolierens zu lehren ist ein Hauptzweck der Tafeln.* So wenig die erste Unterweisung im Gebrauch der Tafeln mit der Schikane des Interpolierens zu belasten ist, so wenig hat das Tafelrechnen auf der Schule eine volle Existenzberechtigung, wenn es überhaupt am Interpolieren vorübergeht.

III. Einige praktische Folgerungen.

1. Aus den Forderungen von II kann man wie aus einem vollen Axiomsystem alles ableiten, was von dem Bau der Tafeln zu wünschen ist. Als erstes ergibt sich die Schülkesche Forderung, in der Schule nur vierstellige Tafeln zu benutzen. Es ergibt sich zugleich, daß diese Tafeln nicht so engmaschige sein dürfen, daß ein Interpolieren dabei überhaupt kaum in Betracht kommt, also z. B. nicht alle vierstelligen Logarithmen aller Zahlen von 1000 bis 10000 enthalten sollen. Solche Tafeln verfehlen nicht nur den Sinn der unter 5. aufgeführten Forderung, sondern sie sind auch in sich unrationell, indem sie nicht entfernt an die Grenze des im Rahmen der linearen Interpolation Möglichen herangehen.

2. Die dritte Forderung ermöglicht es, die partes proportionales auf einem ausklappbaren Streifen zu vereinigen, wie es in einigen der neuesten Tafeln geschieht. Überhaupt hat die äußere Technik der Tafeln außerordentliche Fortschritte gemacht — vielleicht wäre es möglich, auf der Rückseite jeder der so praktischen Randleisten den vollen Titelindex nochmals abzudrucken, damit man auch beim Rückwärtsblättern ebenso bequem greift, wie beim Vorwärtsblättern.

Eine zweckmäßige Maßnahme ist es auch, daß man in den p. p. die Dezimalteile und das Komma, das zu so vielen Verwirrungen im Unterricht Anlaß gibt, wegzulassen beginnt. Es ist daraus aber beim Numerusaufschlagen eine Inkonvenienz entstanden, indem man bei den zu den Differenzen unter 10 gehörigen p. p. mehrfach die Wahl zwischen mehreren Möglichkeiten behält, zwischen denen man sehr wohl unterscheiden könnte, wenn man die Stelle hinter dem Komma hätte. Ich glaube, daß man diesem entschiedenen Übelstande durch eine sehr einfache Maßnahme abhelfen kann: *Man unterstreiche von mehreren einander gleichen Ziffern in diesen p. p. immer diejenigen im Druck, die beim Aufschlagen des Numerus zu nehmen sind.* Also z. B. bei den p. p. für die Differenz 6 folgendermaßen:

$$1 \quad \underline{1} \quad \underline{2} \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad \underline{4} \quad \underline{5} \quad 5.$$

Ein völliges Weglassen dieser ersten p. p. unter 10 wäre weniger zu empfehlen.

3 Die Logarithmentafeln sollen die Mantissen der Zahlen von 100 bis 1000, nicht von 1 bis 1000 enthalten. Eine nochmalige Aufführung der Mantissen von

1 bis 100 mit der gleichen Zahl von 4 Stellen hat nicht nur keinen Sinn, sondern führt über die Bedeutung der Tafeln irre. Wünscht man aus irgendwelchen Gründen diese Mantissen der Zahlen von 1—100 besonders aufgeführt, so gebe man sie dreistellig an — denn sonst sind sie als solche nicht linear interpolierbar und für nichts zu gebrauchen. Oder besser, man setze an den gewonnenen Platz, wie es einige wenige Ausgaben tun, die Logarithmen der Zahlen 1000 bis 1100 auf 5 Stellen und hebe dabei typographisch hervor, daß dieser Teil eine Sonderrolle auf dem Blatt spielt.

4. Einige Tafelsorten, wie Quadrat- und Kubiktafeln, erfordern ein „Absetzen", d. h. einen Wechsel der aufgeführten Stellen inmitten der Tafel. Z. B. die Quadrattafeln pflegen bei 3,16, d. h. bei dem der Quadratwurzel aus 10 nächstgelegenen Tafelwert, eine Stelle abzustreichen, so daß alle Mantissen die gleiche Ziffernzahl aufweisen; ähnlich sind die Kubiktafeln vielfach bei $\sqrt[3]{10}$ und $\sqrt[3]{100}$ abgesetzt, die Tafeln des reinen tg x bei 45^0. Dies motiviert sich durch die in I, 2 ausgeführte Regel mit quantitativ übersehbarer Genauigkeit; aber es wäre gut, im Druck dieses Absetzen und die veränderte Bedeutung der Stellen möglichst klar hervortreten zu lassen, anstatt sie, wie es die meisten Ausgaben tun, nach Möglichkeit zu verschleiern wie einen Schandfleck, der nun einmal da ist und möglichst verdeckt werden muß. Typographisch ist es durchaus möglich.

Derselben Absicht, den Sinn der Tafeln durch die Druckart noch vollkommener hervortreten zu lassen, entspringt der Vorschlag, bei Quadrattafeln die erste Kolumne, die die Quadrate 100, 121, 144, ... enthält, konform den anderen Kolumnen

100,0 121,0 144,0

zu drucken. Das Weglassen der Null hinter dem Komma, das *kolumnenweise* berechtigt wäre, entspricht nicht dem horizontalen, *zeilenweisen* Gebrauch der Tafel und erschwert das Interpolieren in einer durch keinen Nutzen gerechtfertigten Art.

5. Bei den Kubiktafeln ist es besonders beliebt, die vollen Werte zu drucken und damit Tafeln zu geben, die in keiner Weise linear interpolierbar sind. Ich glaube, daß die Schule selten zahlentheoretische Studien macht, die die exakten Werte der Kuben erfordern. Noch weniger kann ich mir vorstellen, wo in der Technik solche zahlentheoretischen Notwendigkeiten auftreten und was die Herausgeber der Hütte veranlaßt, hier eine interpolatorisch unmögliche Tafel in zäher Tradiiton festzuhalten.

6. Bei den Tafeln für log sin x, für log tg x und für ctg x werden die Mantissen in der Nähe von 0^0 interpolatorisch unmöglich. In den ctg-Tafeln oder, was dasselbe ist, den tg-Tafeln pflegt man von 45^0 an die 4. Stelle und späterhin noch mehr Stellen wegzulassen, wenn die Zahlen gar zu groß werden. In den Tafeln für log sin x und log tg x pflegen die meisten Ausgaben die vollen 4 Stellen bis zum Ende durch anzugeben. Alles dieses wäre nach den Forderungen der linearen Interpolation sinngemäß umzugestalten. Es ist unter II schon einiges über die Grenzen angegeben worden, von denen ab ein Weglassen von Ziffern einzusetzen hat. Jetzt findet es an der einen Stelle zu früh, an der anderen zu spät statt.

Man wird vielleicht dagegen einwenden, daß etwa bei den log sin x die Homogeneität der Tafel leiden würde. Das wäre nur von Vorteil. Denn es würde bei der Multiplikation eines Sinus irgendeines Winkels mit dem Sinus

eines kleinen Winkels eben dazu zwingen, eventuell und ganz automatisch die Mantisse, die zwecklos viele Stellen enthält, auf weniger Stellen abzurunden.

Das aber ist die Absicht dieser Ausführungen, die Tafeln aus dem Dornröschenschlaf einer besinnungslosen, rein mechanischen Verwendung zu erwecken und dort, wo dies mit einfachen Regeln möglich ist, sie allmählich und mit Vorsicht mit ein wenig Leben zu erfüllen.

Vom Grundgedanken der Idealtheorie.

Von O. TOEPLITZ in Kiel.

Von dem Grundgedanken, mit dem Kummer an die Idealtheorie herangetreten ist, möchte ich versuchen, Ihnen in ein paar kurzen Strichen einen Begriff zu geben, der etwas schärfer ist als das, was gelegentlich über diesen Gegenstand in gemeinverständlicher Weise zu erzählen unternommen worden ist. Nicht nur wegen der außerordentlichen Schönheit des Kummerschen Ideenganges möchte ich diesen Versuch vor Ihnen unternehmen, sondern zugleich, um auf einen wunden Punkt des Schulunterrichts den Finger zu legen, oder, um mich vorsichtiger auszudrücken, um Sie einen Blick auf die Abgründe tun zu lassen, die hinter einem scheinbar harmlosen Punkt des Schulunterrichts verborgen sind.

Es handelt sich um eine Sache, die beim Kürzen der Brüche zum ersten Male in Erscheinung tritt und nachher noch öfters vorkommt, jedesmal wenn von den ganzen Zahlen und ihrer Teilbarkeit etwas Wesentliches ausgesagt wird, wie etwa bei dem Beweise, daß $\sqrt{2}$ eine irrationale Zahl ist. Bleiben wir beim Kürzen der Brüche. Daß man $^{52}/_{91}$ mit 13 kürzen kann, ist klar, auch daß der sich ergebende Bruch $^{4}/_{7}$ nicht weiter gekürzt werden kann. Aber daß man $^{52}/_{91}$ nicht vielleicht anders als mit 13 kürzen kann und daß man dabei vielleicht einen anderen gekürzten Bruch als $^{4}/_{7}$ als Ergebnis erhalten könnte, pflegt nicht weiter erörtert zu werden. Gewiß, im vorliegenden Zahlenbeispiel wäre das leicht, wo wir alle Teiler von 52 und von 91 übersehen. Aber seien wir einmal ganz ehrlich: wenn es uns glücklich gelungen ist, eine große Zahl wie 30031 in die beiden Faktoren $59 \cdot 509$ zu zerlegen, woher nehmen wir eigentlich die Sicherheit, daß es nicht noch eine andere Zerlegung von 30031 in zwei Faktoren gibt, in der 59 nicht vorkommt?

Es wird Ihnen dabei irgend etwas gegen Ihr Gefühl gehen, gegen das Gefühl von „den" Primfaktoren, die in einer Zahl „darinstecken". Es ist das Ziel der folgenden Ausführungen, Ihnen bewußt zu machen, wie schlecht dieses Gefühl in Wahrheit begründet ist.

Wir wollen, um aller verführerischen Gefühle ledig zu sein, uns in ein anderes fremdartiges Reich begeben, in das Reich der Zahlen von der Form $a + b\sqrt{6}$, wo a, b irgend zwei gewöhnliche ganze Zahlen sind. Also z. B. $12 + 5\sqrt{6}$ oder $\sqrt{6} - 2$ werden solche Zahlen sein, mit denen wir uns jetzt befassen wollen. Die gewöhnlichen ganzen Zahlen werden dadurch übrigens keineswegs ausgeschlossen sein; im Gegenteil, sie begreifen sich sämtlich diesem Zahlenreich unter, für $b = 0$ nämlich; unser Zahlenreich ist lediglich eine Erweiterung der Gesamtheit der gewöhnlichen ganzen positiven und negativen Zahlen.

Es ist leicht, sich in diesem Reich ebenso zu bewegen, wie im Bereich der gewöhnlichen ganzen Zahlen. Wie man zwei solche Zahlen zu addieren und zu subtrahieren hat, ist nach dem Muster

$$(3+\sqrt{6})+(5+\sqrt{6})=8+2\sqrt{6}$$

wohl unmittelbar klar; aber auch das Multiplizieren üben wir leicht an ein paar Beispielen ein:

$$\begin{aligned}
&(3+\sqrt{6})(3-\sqrt{6})=9-6=3,\\
&(\sqrt{6}+2)(\sqrt{6}-2)=6-4=2,\\
&(3+\sqrt{6})(\sqrt{6}-2)=3\sqrt{6}-6+6-2\sqrt{6}=\sqrt{6},\\
&(3-\sqrt{6})(\sqrt{6}+2)=\sqrt{6},\\
&(3+\sqrt{6})(2+\sqrt{6})=\quad 12+5\sqrt{6},\\
&(3-\sqrt{6})(\sqrt{6}-2)=-12+5\sqrt{6}.
\end{aligned}$$

Ich hoffe, diese paar Beispiele werden genügen, um Ihnen zu zeigen, wie leicht man sich in diesem fremdartigen Reich zurechtfindet; wenn man aus irgendeinem Grunde wollte, könnte man gern Tertianer dieses Rechnen einüben lassen, sie würden sich bald daran gewöhnt haben. — Von dem Dividieren reden wir selbstverständlich nicht; das würde ebenso wie bei den gewöhnlichen ganzen Zahlen manchmal gehen und manchmal nicht. Was uns interessiert, ist die Zerlegung in Faktoren.

Wir gehen von der sehr einfachen und auf den ersten Blick sehr peinlichen Bemerkung aus, daß

$$6=2\cdot 3=\sqrt{6}\cdot\sqrt{6} \tag{1}$$

ist und stehen vor der Tatsache, daß 6 hier außer der üblichen Faktorenzerlegung noch eine ganz andere gestattet. Wir denken an die eingangs gestellte Frage, ob 30031 außer $59\cdot 509$ etwa noch eine andere Faktorenzerlegung gestattet, in der ganz andere Faktoren vorkommen; fast scheint es, daß wir hier vor einem derartigen Vorkommnis stehen.

Der Fall klärt sich aber in natürlicher Weise auf, und zwar auf eine Art, die im folgenden unser besonderes Interesse in Anspruch nehmen wird. Die Zahlen 2 und 3 sind zwar Primzahlen im gemeinen Sinne, d. h. nicht in gewöhnliche ganze Zahlen zerlegbar; aber sie lassen sich sehr wohl in Faktoren von der Form $a+b\sqrt{6}$ zerlegen. Ein Blick auf die Beispiele, die wir zur Einübung der Multiplikation gerechnet haben, lehrt es; da haben wir

$$2=(\sqrt{6}+2)(\sqrt{6}-2),\quad 3=(3+\sqrt{6})(3-\sqrt{6}).$$

$6=2\cdot 3$ zerfällt also in Wahrheit gar nicht in zwei unzerlegbare Faktoren, sondern in vier:

$$6=(\sqrt{6}+2)(\sqrt{6}-2)(3+\sqrt{6})(3-\sqrt{6})$$

und die beiden verschiedenen Zerlegungen, die wir zuerst wahrnahmen, waren nichts als Zusammenfassungen dieser vierteiligen Zerlegung zu je zwei Faktoren, einmal des 1. und 2. sowie des 3. und 4. Faktors, das andere Mal des 1. mit

dem 4. und des 2. mit dem 3. Faktor. Es ist klar, daß sogar noch eine dritte Zusammenfassung möglich wäre, an die wir gar nicht gedacht haben, nämlich des 1. mit dem 3. Faktor und des 2. mit dem 4.; auch hierzu war alles Nötige in den obigen Beispielen gerechnet; die dritte Zerlegung heißt

$$6 = (12 + 5\sqrt{6})(-12 + 5\sqrt{6})$$

und bestätigt sich leicht durch nochmalige direkte Ausrechnung.

Der Fall ist also aufklärbar, und es wäre nicht sehr schwer, ihn restlos aufzuklären und zu zeigen, daß die vier Faktoren von 6, die sich nun ergeben haben, einer weiteren Zerlegung nicht mehr fähig sind.

Wir werden uns jetzt aber in einen anderen Bereich begeben, den der Zahlen $a + b\sqrt{-10}$, und werden hier nicht imstande sein, eine entsprechend einfache Bemerkung in einer entsprechenden Weise aufzuklären; im Gegenteil, wir werden den Beweis führen können, daß dies hier nicht möglich ist. Nachdem wir uns in dem Reich der Zahlen $a + b\sqrt{6}$ so leicht zurechtgefunden haben, wird es an sich keine Schwierigkeit haben, unser Medium schon wieder zu wechseln. Ich hätte übrigens genau so gut in das Reich $a + b\sqrt{+10}$ übergehen können; ich tue es nur deswegen nicht, weil der zu führende Unmöglichkeitsbeweis dadurch etwas umständlicher werden würde; sachlich wäre es genau so gut möglich.

Die entsprechende Bemerkung lautet hier offenbar

$$10 = 2 \cdot 5 = -\sqrt{-10} \cdot \sqrt{-10}. \tag{2}$$

Wir werden suchen, 2 und 5 und $\sqrt{-10}$ ihrerseits in Faktoren zu zerlegen; aber bei diesem Versuch wird sich herausstellen, daß er unausführbar ist.

Wir machen uns zur bequemeren Durchführung dieser Betrachtung einen Hilfsbegriff zurecht. Unter der „Norm" der Zahl $a + b\sqrt{-10}$ verstehen wir ihr Produkt mit $a - b\sqrt{-10}$, also

$$N\{a + b\sqrt{-10}\} = (a + b\sqrt{-10})(a - b\sqrt{-10}) = a^2 + 10\,b^2;$$

die Norm ist also selbst eine gemeine ganze, sogar positive Zahl. Von ihr gilt der Hilfssatz, daß die Norm des Produkts zweier Zahlen unseres Reiches gleich dem Produkt ihrer Normen ist. In der Tat, es ist

$$\begin{aligned} &N\{(a + b\sqrt{-10})(c + d\sqrt{-10})\} \\ &= [(a + b\sqrt{-10})(c + d\sqrt{-10})][(a - b\sqrt{-10})(c - d\sqrt{-10})] \\ &= (a + b\sqrt{-10})(a - b\sqrt{-10})(c + d\sqrt{-10})(c - d\sqrt{-10}) \\ &= N\{a + b\sqrt{-10}\}\, N\{c + d\sqrt{-10}\}. \end{aligned}$$

Wäre nun 2 in zwei Faktoren unseres Reiches zerlegbar,

$$2 = (a + b\sqrt{-10})(c + d\sqrt{-10}),$$

so wäre $\quad N\{2\} = N\{a + b\sqrt{-10}\} \cdot N\{c + d\sqrt{-10}\}.$

$N\{2\}$ ist nichts anderes als $2 \cdot 2 = 4$, und es wäre

$$4 = (a^2 + 10b^2)(c^2 + 10d^2).$$

Eine solche Zerlegung von 4 in zwei gewöhnliche ganze Zahlen ist auf zwei Weisen möglich. Entweder beide Faktoren sind gleich 2, oder der eine ist 4, der andere 1. Beides aber ist hier nicht möglich. Denn weder 1 noch 2 kann in der Form $x^2 + 10y^2$ erscheinen, 2 überhaupt nicht, und 1 nur in der Weise, daß $x = 1$, $y = 0$ ist; also kann 2 nur so in zwei Faktoren zerlegt werden, daß einer von beiden $1 + 0\sqrt{-10} = 1$ ist. Diese banale Zerlegung werden wir so wenig als Zerlegung ansehen, wie wir $5 = 1 \cdot 5$ als eine Zerlegung der Primzahl 5 betrachten. Wir werden auch in unserem Reich eine Zahl unzerlegbar nennen, wenn sie keine anderen Zerlegungen als solche, wo ein Faktor 1 ist, gestattet.

In genau derselben Weise überzeugt man sich, daß auch 5 und $\sqrt{-10}$ nicht zerlegbar sind; statt 4 hätte man in diesen Fällen 25 bzw. 10 zu zerlegen.

Wir stehen also hier vor der durch (2) gegebenen Tatsache, *daß eine Zahl zwei verschiedene Zerlegungen in unzerlegbare Faktoren besitzt.* Es ist daher ganz gewiß nicht angängig, es für logisch selbstverständlich zu nehmen, daß neben einer solchen Zerlegung keine andere möglich ist, wenn es sich um die gewöhnlichen ganzen Zahlen handelt; denn wäre es eine *logische* Selbstverständlichkeit, so müßte es auch in unserem zuletzt betrachteten Reich gelten. Wenn es bei den gewöhnlichen ganzen Zahlen trotzdem gilt, so ist dies eine Besonderheit der ganzen Zahlen, die auf Grund besonderer Eigenschaften derselben bewiesen werden muß.

Es ist eine merkwürdige Tatsache, daß die griechischen Mathematiker, aus bloßer logischer Unbefangenheit und Klarheit heraus und vermutlich ohne Gegenbeispiele wie das eben geschilderte zu kennen, instinktiv die Notwendigkeit verspürt haben, die in Rede stehende Eindeutigkeit der Zerlegung zu beweisen. Euklid führt diesen Beweis mit Hilfe desjenigen Verfahrens, das zugleich zur Ermittelung des größten gemeinsamen Teilers dient und das unter dem Namen des Euklidischen Algorithmus bekannt ist. Man kann übrigens diesen Eindeutigkeitsbeweis noch etwas vereinfachen. Doch will ich hier auf diesen Beweis nicht näher eingehen.

Vielmehr will ich den Anlaß etwas genauer schildern, durch den Kummer auf den oben geschilderten Tatbestand gekommen ist. Kummer beschäftigte sich mit dem sogenannten *großen Fermatschen Problem,* d. h. mit der Frage, ob es drei positive ganze Zahlen gibt, für die

$$y^n + z^n = x^n \tag{3}$$

ist. Für $n = 2$ ist dies eine bekannte Aufgabe, und man nennt drei Zahlen, die

$$y^2 + z^2 = x^2 \tag{4}$$

befriedigen, pythagoreische Zahlen; 3, 4, 5 sind z. B. solche. Die Behauptung Fermats ist, daß es für höheres n nie eine Lösung gibt. Fermat hat behauptet, einen Beweis zu besitzen, und diese Behauptung eines so bedeutenden Mathematikers hat Gelehrte wie Laien immer wieder angezogen, den Beweis dieser Behauptung zu erbringen. So ist es auch gelungen, für $n = 3$ und einzelne andere Werte von n den Satz zu beweisen, aber immer nur für einige der niedrigsten, nie für alle.

Kummers Bemühungen zielten darauf ab, es mit einem Schlage für alle n

zu machen. Die Idee, deren er sich dabei bediente, war sehr einfach; ich will versuchen, einen ungefähren Begriff davon zu geben. Dazu wollen wir uns erst erinnern, wie man den Fall $n = 2$ zu lösen pflegt, d. h. wie man einen Überblick über die sämtlichen Tripel von pythagoreischen Zahlen erhält. Man schreibt zu diesem Ende (4) in der Form

$$z^2 = x^2 - y^2 = (x+y)(x-y) \tag{5}$$

und argumentiert nun: wenn irgendeine Primzahl p in $x+y$ aufgeht, so auch in z^2 und somit in z (die eindeutige Zerlegung für gemeine ganze Zahlen setzen wir nun als bewiesen voraus); also geht p in z^2 und somit auch in der rechten Seite von (5) zweimal auf; ginge es aber in dem anderen Faktor $x-y$ auf, so auch in $(x+y)+(x-y) = 2x$ und $(x+y)-(x-y) = 2y$ und also — wir sehen hier von dem Detail ab, daß $p = 2$ sein könnte — in allen drei Zahlen x, y, z; einen solchen gemeinsamen Teiler einer Lösung aber können wir wegkürzen und uns auf die Aufstellung aller Lösungen ohne gemeinsamen Teiler beschränken. Für eine solche also kann p nicht in dem anderen Faktor $(x-y)$ aufgehen und muß daher in dem ersten Faktor $(x+y)$ doppelt aufgehen, und so jeder Primfaktor, der in $(x+y)$ darinsteckt. Eine Zahl aber, die jeden Primfaktor, den sie überhaupt enthält, doppelt oder, wenn noch öfters, in gerader Potenz enthält, ist eine Quadratzahl. Genau so muß auch $(x-y)$ eine Quadratzahl sein, so daß umgekehrt, wenn man die Sonderrolle des Faktors 2 in Rücksicht zieht,

$$\begin{aligned} x &= u^2 + v^2 \\ y &= u^2 - v^2 \end{aligned} \qquad z = 2uv \tag{6}$$

ausfallen. Das war die Analysis der Aufgabe; man überzeugt sich aber leicht durch Einsetzen, daß umgekehrt für irgend zwei Zahlen u, v, deren eine gerade, die andere ungerade ist, (6) in Verbindung mit (5) eine Lösung von (4) ergibt.

Nach demselben Prinzip nun setzte Kummer im Falle der Gleichung (3) für größeres n an:

$$z^n = x^n - y^n = (x-y)(x-jy)\ldots(x-j^{n-1}y), \tag{7}$$

wo j eine $n$te Einheitswurzel, und schloß wieder, daß jeder einzelne Faktor der rechten Seite eine volle $n$te Potenz sein müsse. Wir müssen es uns allerdings hier versagen, auf die Einzelheiten dieses Beweisganges einzugehen; aber soviel leuchtet ein, daß man für $n > 2$, wenn man den dem Übergang zu (6) entsprechenden Schritt vollziehen will, mehr als zwei Gleichungen mit nur zwei Unbekannten aufzulösen hat und daß es darüber zu einem Widerspruch kommt. Das ungefähr war Kummers Grundgedanke.

Kummer teilte diesen Beweisversuch Dirichlet mit. In voller Würdigung der Einfachheit der Idee machte dieser Kummer auf den wunden Punkt des Beweisganges aufmerksam. Wenn, sagte er, es statthaft sein soll, in solcher Weise mit Größen zu operieren, die nicht gewöhnliche ganze Zahlen sind, sondern sich aus der Größe j aufbauen, also z. B. im Falle $n = 4$ von der Form $a + ib$ sind, wenn es erlaubt sein soll, in diesem Bereich mit der Teilbarkeit, mit dem „Darinstecken" von Faktoren in Zahlen so umzugehen, wie bei gemeinen ganzen Zahlen, so müsse man wissen, daß der Satz von der eindeutigen Zerlegung in unzerlegbare Faktoren auch in diesem Reiche richtig ist, und eben dies sei nicht bewiesen.

Gewiß, es ist wohl sogar anzunehmen, daß schon Gauß sich über diese Schwierigkeit im klaren gewesen ist; er hätte sonst seine Theorie der quadratischen Formen vermutlich anders dargestellt. Und nun kommt der Moment, der der psychologisch entscheidende und merkwürdige in dieser ganzen Angelegenheit ist. Kummer selbst bildet sich das Gegenbeispiel, das die Berechtigung von Dirichlets Einwand endgültig dartut und das sich von dem obigen nur ein wenig unterscheidet; aber anstatt nun verzweifelt den ganzen Versuch aufzugeben, geht er zu einem kühnen Beginnen über und wird damit, wenn er auch das Fermatsche Problem nicht ganz lösen kann, der Schöpfer einer viel wichtigeren und größeren Theorie, eines der schönsten Bezirke menschlichen Geistes.

Es ist der ganze Zweck des obigen Arrangements, Ihnen an der Hand desselben eine kleine Andeutung von dem Wege geben zu können, den Kummer beschritt. Ich erinnere Sie an die Aufklärung, die das Dilemma der Gleichung (1) schließlich oben noch gefunden hat: es gelang, die beiden Faktoren weiter zu zerlegen, so daß 6 in Wahrheit Produkt vierer Faktoren war, die bei den beiden Zerlegungen von (1) beide Male nur verschieden zusammengefaßt waren. Bei (2) war das nicht mehr möglich. Aber sollte es, sagte Kummer, nicht auch in diesem Reiche der Größen $a + b\sqrt{-10}$ dadurch möglich werden, daß man diesem Reiche noch neue Größen hinzufügte? War doch schließlich dieser Bereich selbt aus dem der gewöhnlichen ganzen Zahlen dadurch entstanden, daß man ihn erweitert hatte.

Diese Erweiterung geleistet zu haben, ist Kummers eigentliches Verdienst, das hernach durch die Hand von Dedekind und Kronecker den Grad einer weit größeren Allgemeinheit erhielt. In diesem erweiterten Bereich zerlegten sich 2 und 5 in der Tat in Faktoren von dieser hinzugefügten Art — Kummer nannte sie darum „ideale Faktoren" — und der Satz von der eindeutigen Zerlegung war dann gültig. Aber in dem Beweise des Fermatschen Satzes traten gewisse Schwierigkeiten auf, die zur Folge hatten, daß er nur für gewisse Werte von n durchführbar blieb. Für alle n bis zu $n = 100$ gelang es Kummer allerdings, das Problem auf solche Art zu erledigen.

Wenn ich zu unserem Ausgangspunkt zurückkehren darf: eine nebensächlich scheinende Prinzipienangelegenheit ist hier zum Quell einer der größten Schöpfungen mathematischen Genies geworden; sie unbeachtet zu lassen hätte diesen Quell von vornherein verstopft. Der Universitätsunterricht pflegt diese Dinge nur im Rahmen der vollen Zahlkörpertheorie zu bringen, und auch da oft in der Umgebung so abstrakter Dinge, daß ihre Bedeutung für die elementare Mathematik nicht recht bewußt wird; viele Studierende verlassen die Hochschule darum, ohne von diesen prinzipiell bedeutungsvollen Gedankengängen etwas gehört zu haben. Eben deshalb glaubte ich Ihrem Kreise eine solche Skizze vortragen zu sollen, die natürlich nur dadurch möglich wird, daß man einige Dinge in perspektivischer Verkürzung zeigt.[1])

1) Der hier unternommene Versuch ist eine Probe aus einer Vorlesung, die eine Reihe solcher für sich allein verständlicher Gegenstände in einer auch Nichtmathematikern zugänglichen Form vereinigt, und die ich demnächst gemeinsam mit H. Rademacher-Breslau in Buchform der Öffentlichkeit übergeben will. Das vorliegende Thema wird darin naturgemäß in Rücksicht auf nichtmathematische Leser einfacher behandelt werden, als vor diesem Kreise; immerhin gibt auch diese Darstellung hier, die auf Heranziehung anderer Kenntnisse als der unbedingt nötigen systematisch verzichtet, ein ungefähres Bild von der Absicht jener Vorlesungen.

Der bildende Wert des Physikunterrichts.

Von G. Wernick in Kiel.

Der Begriff der Bildung ist ein spezifisch deutscher. Fast alle großen Kulturvölker haben ein Persönlichkeitsideal geprägt, nicht ein allgemeines Menschheitsideal, sondern ein solches, das für die eigenen Volksgenossen Gültigkeit hat, ich denke an den *ἀνὴρ καλὸς κἀγαθός* des Griechen, den gentleman des Engländers, die smartness des Yankees, die âme noble des Franzosen — der Deutsche aber will gebildet sein. Wir alle stehen unter dem faszinierenden Einfluß dieses Zieles; als ungebildet angesehen zu werden, gilt jedem von uns als schwere Kränkung, und auch die breiten Massen unseres Volkes empfinden es als schmerzlichen Mangel, in dieser Hinsicht den Bevorzugten nicht gleichzustehen, als einen Mangel, der auch durch den Besitz politischer oder wirtschaftlicher Macht nicht ausgeglichen werden kann (hier eine Quelle der deutschen Volkshochschulbewegung!). Dieses Ideal ist von *Nietzsche* mit ätzendem Spott überschüttet worden, auch mag es uns bisweilen im Wettbewerb der Völker mehr gehemmt als gefördert haben, jedenfalls ist es ein Teil unseres Schicksals gewesen und wird es voraussichtlich auch in Zukunft sein.

Es ist selbstverständlich, daß auch die deutsche Schule dieser tief in uns wurzelnden Wertauffassung Rechnung trägt, und wir betrachten es insbesondere als ein Ziel der höheren Schule, daß die von ihr erzogenen als gebildete Menschen entlassen werden. Wir scheiden scharf zwischen Schulen, die sich dieses Ziel gesetzt haben, und zwischen technischen Lehranstalten. Wie fragwürdig aber gegenwärtig die Verhältnisse liegen, erkennt man, wenn man eine konkrete Frage aufwirft, z. B. die, ob unsere technischen Hochschulen Bildungsanstalten oder eben technische Anstalten sind. Wir brauchen uns hier um diese Frage nicht zu bemühen, dagegen soll einmal die Frage aufgeworfen werden, ob und in welchem Maße die einzelnen an der höheren Schule betriebenen Fächer diesem Ziele dienstbar gemacht werden können. Geschichtlich gegeben ist hier ohne Zweifel eine Klassifizierung, bei der die Physik im Vergleich mit den sogenannten kulturkundlichen Fächern nicht günstig abschneidet. Noch vor wenig Jahrzehnten würde kaum jemand, der auf den Namen des Gebildeten Anspruch macht, zugegeben haben, daß ihm *Goethes* Faust oder *Goethes* Lyrik nichts bieten, oder daß er den Hamlet nicht kennt, weil er mit einem solchen Eingeständnis sich aus der Reihe der Gebildeten ausgeschlossen hätte, während er aus dem gleichen Grunde keine Bedenken zu haben brauchte, zu erklären, daß er nicht wisse, was ein Vektor ist, oder wie das *Ohm*sche Gesetz lautet. Und wenn wir noch weiter zurückgehen bis in die klassische Zeit unserer Literatur und wir hätten etwa *Goethe* gefragt, ob die Physik bildenden Wert hat, so hätte dieser intimste Feind der theoretischen Physik sicher sein olympisches Haupt zu einem entschiedenen Nein geschüttelt. Ja, auch die ministerielle Denkschrift, so sehr sie bemüht ist, den Grundsatz von der Gleichwertigkeit der vier Typen der höheren Schule durchzuhalten, läßt gelegentlich doch diese Anschauung durchschimmern, so z. B. wenn sie für die Oberrealschule eine Umstellung der mathematisch-naturwissenschaftlichen Fächer verlangt, und zwar in dem Sinne, daß unter Zurückdrängung der fachlichen Ein-

stellung gezeigt werden soll, wie diese Wissenschaften an der Entstehung des modernen Geistes beteiligt sind, da erst durch Anschluß an die Kulturkunde der physikalische und mathematische Unterricht seinen bildenden Wert entfalten könne. (Neuordnung usw. S. 48.)

Fragen wir, worauf dieser Zweifel an dem bildenden Wert der Physik beruht, so muß er, wie ich glaube, letzten Endes auf die Tatsache zurückgeführt werden, daß die Physik es mit der toten Materie und ihren Erscheinungen zu tun hat, mit Erscheinungen, die wir allerdings erkennen, indem wir sie beobachten, registrieren, allgemeinen Gesetzen unterordnen, von denen wir jedoch durch die Kluft des Nichtverstehens getrennt sind. Der Term des Verstehens spielt in der heutigen Philosophie eine große Rolle, was ich aber meine, wenn ich das Erkennen vom Verstehen scheide, ist wohl ohne philosophische Erörterung „*verständlich*". Wir können es verstehen, daß *Friedrich* an Österreich den Krieg erklärt, daß *Cäsar* den Rubikon überschreitet, daß die Beschäftigung mit den Griechen das Kunstschaffen unserer Klassiker beeinflußt hat, wir können es aber nicht verstehen, daß das Potential umgekehrt proportional der ersten Potenz der Entfernung, oder daß der Ausdehnungskoeffizient der Gase $^{1}/_{273}$ ist, haben vielmehr diese Tatsachen als etwas Sinnfreies hinzunehmen. Zwar hat man in der Zeit der Romantik versucht, auch die physikalische Wirklichkeit dem Verständnis zu erobern, ich denke an die Willensmetaphysik *Schopenhauers*, die Naturphilosophie *Schellings* u. ä., für die heutige physikalische Wissenschaft aber haben diese Versuche keine Bedeutung. So steht uns der Gegenstand der Physik als fremd gegenüber, als dasjenige, von dem aus keine Brücke zu unserer eigenen Persönlichkeit hinüberführt. Da aber Bildung, wie nicht zweifelhaft, eine Angelegenheit eben dieser Persönlichkeit ist, wie sollte sie dann durch Beschäftigung mit dem schlechthin Unpersönlichen zu gewinnen sein! Schon die Biologie steht in dieser Hinsicht günstiger da, in ihr haben wir es wenigstens mit Wachstum, mit Entfaltung von innen heraus zu tun, und eben dieses rückt sie unserem eigenen Wesen etwas näher. Die Physik aber scheint die Menschheitsbildung nur insofern zu fördern, als sie die Technik, ohne welche die Kultur in ihrer heutigen Form nicht bestehen könnte, ermöglicht hat; allein in diesem Zusammenhang erscheint sie doch nur als Mittel zum Zweck, als die Bedingung für die Entfaltung von Werten, aber nicht als Eigenwert, und man ist ja nicht müde geworden, in dieser Hinsicht den Unterschied zwischen Kultur und Zivilisation zu betonen, zwischen geistigen Werten und dem, was ihrer Verbreitung dient.

Wenn man in dieser Frage einen bestimmten Standpunkt gewinnen, sich nicht mit geschichtlichen Gegebenheiten begnügen, sondern eine sachliche Prüfung vornehmen will — und ich glaube, daß in der Tat eine ungeschichtliche, sachliche Behandlung möglich ist —, so muß man sich zunächst die Frage vorlegen, was verstehen wir unter Bildung, wann sagen wir, ein Mensch sei gebildet? Ein beliebter und häufig fruchtbarer Ausgangspunkt für derartige Betrachtungen ist dieser, daß man vom Worte ausgeht, sich auf seine ursprüngliche Bedeutung besinnt. Dieser Weg führt aber hier in die Irre. Man würde nämlich, wenn man ihn beschreitet, zu dem Ergebnis gelangen, daß Bildung die Entwicklung, Entfaltung und Formung der im Individuum liegenden Fähigkeiten bedeute. Gewiß ist dieses ein berechtigtes Ziel, und die Einheitsschulbewegung hat sich von Anfang an auf dasselbe berufen. Wir verstehen aber

unter Bildung etwas anderes: ich bin nicht deswegen gebildet, weil ich meine vielleicht dürftigen Fähigkeiten bis zu dem äußersten Grade der Vollkommenheit entwickelt habe. Wenn ein unmusikalischer Mensch dahin gebracht ist, eine einfache Melodie halbwegs richtig zu singen, so mag er diese Grenze erreicht haben, niemand wird ihn aber deswegen als musikalisch gebildet ansehen. Bildung ist nicht allein vom Individuum aus zu bestimmen, sondern ein objektives Gut, das dem einen erreichbar ist, dem anderen nicht. Nicht, als ob dieses Gut durch eindeutig bestimmte Grenzlinien umrissen wäre, es gibt sicherlich viele Wege zur Bildung, für den einen ist dieser, für den anderen jener gangbar, nichtsdestoweniger ist Bildung nicht lediglich von seiten der Tatsächlichkeit des Individuums zu bestimmen. — Man hat häufig hervorgehoben, was Bildung nicht ist. Bildung ist nicht eine Summe von Kenntnissen und Fertigkeiten. Könnte ein Konversationslexikon zum Bewußtsein alles dessen gelangen, was in ihm gedruckt ist, so würde dadurch nicht weniger als ein gebildetes Wesen entstehen. Bildung ist auch nicht Produktivität. Man kann ein feinsinnig gebildeter Mensch und dabei ganz unproduktiv sein. Ja, man könnte sogar in manchen Fällen einen Gegensatz zwischen Bildung und Produktivität annehmen. Die Ansicht ist ausgesprochen — ich will sie mir nicht zu eigen machen —, daß *Schiller* in seiner zweiten Periode produktiver gewesen wäre, wenn er sich weniger mit *Kant*ischer Philosophie und mit Geschichte beschäftigt hätte. Die urwüchsige Kraft, die zur Produktion nötig ist, kann durch Bildung ebensogut gehemmt wie gefördert werden. Bildung ist überhaupt nicht notwendig an intellektuelle Leistungen gebunden; man denke an Herzens-, gesellschaftliche Bildung u. ä. — Was ist nun Bildung in positiver Hinsicht? Ich werde mich in der Beantwortung dieser Frage kurz fassen. Gehen wir von einem bestimmten Beispiel aus! Wann nennen wir jemand musikalisch gebildet? Auch musikalische Bildung ist etwas anderes als musikalische Intelligenz. Ich kann imstande sein, den Aufbau einer Symphonie zu durchschauen, die Durchführung und das Gegeneinanderspielen der Motive zu verfolgen und dennoch musikalisch ungebildet sein. Als musikalisch ungebildet, als roh aber bezeichnen wir sicherlich denjenigen, dem es gleichgültig ist, ob man ihm *Beethoven* oder einen Gassenhauer vorspielt. Wer musikalische Werte wahr und wahrhaftig in sich erlebt, der ist musikalisch gebildet. Daß dieses in den meisten Fällen erst auf Grund von Einsichten möglich ist, ist eine Sache für sich. In der Fähigkeit zum Erleben objektiver Werte erblicke ich also das Kennzeichen des gebildeten Menschen, und ich glaube, daß diese Fähigkeit eine Gemeinsamkeit unter ihnen begründet, daß sie sich an dem Besitz dieser Fähigkeit gegenseitig erkennen. Auch der musikalisch Ungebildete kann objektiv richtige Werturteile fällen, aber nicht auf Grund eigenen Erlebens, sondern aus Zufall oder auf Grund der Unterordnung unter Autoritäten, mögen diese Einzelpersonen oder möge es Masse sein, deren Überzeugung sich ihm aufdrängt. — Und noch ein weiteres müssen wir zur Vollendung des Begriffes hinzufügen. Niemand ist von Natur gebildet, von Natur kann er die Fähigkeit dazu besitzen, aber erst durch Übung im Erfahren von Werten kann diese Fähigkeit entwickelt werden, und hier sehen wir auch die Beziehung, die zwischen intellektueller Leistung und Bildung besteht. Viele Werte können nicht erlebt werden, ohne daß große intellektuelle Leistungen vorausgegangen wären. Wer den ästhetischen Wert eines Dramas von *Äschylus* erleben will, muß griechische Vokabeln lernen, griechische Gram-

matik, griechische Mythologie und vieles andere kennen, er muß in diesen Dingen sich heimisch gemacht haben, ehe ihm das Werterlebnis möglich wird. — Bildung ist also ein objektives Gut, aber ein Gut, das die Objektivität von anderen Gütern voraussetzt, und es gibt so viele Arten der Bildung, als es objektive Werte gibt. Was es aber mit diesen für eine Bewandtnis hat, ob sie von absoluter Gültigkeit oder ob sie geschichtlich bedingt sind, diese Frage ist in der Gegenwartsphilosophie oft behandelt worden, ohne geklärt zu sein, wir setzen hier das Bestehen solcher Werte voraus.

Wenn man mit diesem Begriff der Bildung an die Physik und den Physikunterricht herantritt, so handelt es sich um zwei Fragen: hat die physikalische Wissenschaft Wert, und wenn ja, können wir den Schüler zum persönlichen Erleben dieses Wertes veranlassen? Die erste Frage ist ohne Zweifel mit Ja zu beantworten. Die Physik hat den Wert der Erkenntnis, theoretischen Wert, wie man heute sagt, ja den Wert einer Erkenntnis von sehr ausgeprägter Eigenart. Was aber die zweite Frage betrifft, so glaube ich, daß hier die Verhältnisse für den Physikunterricht besonders günstig liegen. Noch in den Lehrplänen von 1900 ist als Ziel dieses Unterrichtes die Kenntnis der wichtigsten physikalischen Gesetze bezeichnet. Wenn man sich auf dieses Ziel beschränkt, ist der bildende Wert allerdings gleich Null, oder kann es sein, nämlich dann, wenn man die Kenntnisse autoritativ vermittelt, wenn man Kreidephysik treibt, statt Experimente zu machen. In diesem Falle kann der Unterricht Verstand, Gedächtnis, Phantasie entwickeln, aber er hat keinen bildenden Wert. Dieser beginnt erst dann, wenn der Schüler den Weg zur Erkenntnis selber durchschreitet. Denn dieses ist eine Besonderheit des theoretischen (Wahrheits-) Wertes, daß er erlebt wird nur von dem, der ihn selber erzeugt (anders ästhetische und sittliche Werte). In geringem Maße ist das schon dann der Fall, wenn der Schüler das Experiment, das etwa die Antwort auf eine Frage bringt, vor sich sieht, wenn er das Auffinden der Wahrheit als verstehender Zeuge erlebt. Wesentlich vertieft aber wird das Erlebnis, wenn er die Schritte, die zur Erkenntnis führen, selber tut. Diese Schritte sind die Stellung des Problems, die Auffindung der seine Lösung versprechenden Mittel, die Durchführung der Beobachtung und die Gewinnung des allgemeinen Gesetzes. Wonach ich selber frage, was ich mit eigenen Händen aufbaue, mit eigenen Augen beobachte, was ich der eigenen Kritik unterwerfe, hat weit höheren erlebnismäßigen Charakter, als was ich als Zuschauer betrachte. Die Forderung aber, daß der Schüler diese Stufen selber durchschreite, ist nicht verstiegen, sondern kann in gewissen Grenzen erfüllt werden. Nicht als ob er alles allein machen könnte, als ein Durchschnittsbegabter in wenigen Stunden das leisten könnte, was große Forscher in einer Arbeit, die sich auf Jahrhunderte erstreckt, geleistet haben, vielmehr bedarf er immer wieder der Anregung, Leitung und Aufklärung durch den Lehrer, nichtsdestoweniger soll er auf entscheidenden Schritten des Weges sich selbst überlassen sein, so daß er das Bewußtsein hat, selber das Ziel zu erreichen. Dauernd aber muß sein Tun, auch beim eigenen Experimentieren, von dem Bewußtsein erfüllt sein, daß es sich hier letzten Endes nicht um Ein- und Ausübung technischer Fertigkeiten handelt, sondern daß das Streben einem höchsten Ziele gilt, dessen Wert er selbst erlebt, nämlich der Wahrheit. Und hier sei eine Bemerkung über die *Durchführung* von Schülerübungen eingefügt. Man ist im allgemeinen der Ansicht, daß das Üben in gleicher Front erstrebt

werden müsse. Die Vorteile dieser Methode wird niemand verkennen, gleichwohl bin ich der Überzeugung, daß sie besonders in der Oberstufe Gefahren in sich birgt, die mit jeder zu gut durchgeführten Organisation verbunden sind, daß sie nämlich das Geistige tötet. Schülerübungen, bei denen infolge der Vortrefflichkeit der vorhandenen Einrichtungen alles tadellos klappt, haben nur geringen Wert. Gerade die verschiedene Beschäftigung der Gruppen erhöht bei jeder das Gefühl der Verantwortlichkeit, und das Bewußtsein, nicht in Reih und Glied zu marschieren, hat einen bildenden Wert, auf den wir um so weniger verzichten wollen, als er unseren Schülern in wissenschaftlichen Fächern nur selten zuteil wird.

Über die Notwendigkeit von Schülerübungen ist man sich heute einig, und ich stehe nicht an zu behaupten, daß der bildende Wert der Oberrealschule da in Frage gestellt ist, wo diese Übungen nicht oder nicht im rechten Geiste getrieben werden, daß sie erst durch Ausnutzung der in ihnen liegenden Möglichkeiten den geschichtlich älteren Schulgattungen ein gleichwertiges Bildungsmittel an die Seite stellen kann, nichtsdestoweniger wäre die Forderung verfehlt, den gesamten Physikunterricht in Schülerübungen aufgeben zu lassen, weil es dann unmöglich wäre, daß die gewonnenen Erkenntnisse sich zu einem Ganzen zusammenschließen. Wir sind davon überzeugt, daß die Wissenschaft keine bloße Häufung von Einzelerkenntnissen ist, sondern daß diese Erkenntnisse ein System bilden, in welchem jedes einzelne Glied seine bestimmte Stelle hat, jedes auf jedes andere in eindeutigem Sinne hinweist. Das Reich der Wahrheit ist kein Chaos, sondern ein Kosmos. (So ungefähr Husserl in seinen Logischen Untersuchungen.) Die systematische Form ist selbst ein letzter Wert, oder, genauer gesagt, er ist eine wesentliche Seite des theoretischen Wertes. Ich brauche an dieser Stelle nicht auszuführen, wie sehr diese Tatsache gerade in unserer Wissenschaft zum Ausdruck kommt, ja es gibt wohl außer der Mathematik keine Wissenschaft, die es uns so sehr wie die Physik zum Bewußtsein bringt, daß die Systematik kein künstliches, den Tatsachen übergestülptes Netz, sondern daß sie durch diese selbst gefordert ist. Wenn wir die Akustik zu einem Glied der Elastizitätslehre machen oder die Optik gleichsetzen der Elektrodynamik, so beruht das nicht auf einer ästhetischen Liebhaberei unserer Natur, sondern ist sachliche Notwendigkeit. Diese wesentliche Seite der Wahrheit aber bliebe dem Schüler verborgen, wenn der Unterricht sich nur auf Übungen gründete, oder gar sich auf diese beschränkte. Wohl können auch in ihnen gelegentlich verschiedene Gebiete der Physik durch umfassende Gedanken verknüpft werden, etwa indem die teilweise Gleichheit der Gesetze von Schwingungen verschiedener Art — magnetischen, elastischen, solchen im Gravitationsfeld — erkannt wird, allein jeder Versuch, die beherrschende Bedeutung des Systemgedankens empfinden zu lassen, würde an der Lückenhaftigkeit des Materials scheitern, wenn der Lehrer nicht die Möglichkeit hätte, das, was in Übungen erarbeitet ist, durch eigenen Bericht zu ergänzen. Selbstverständlich soll das nicht die Forderung nach systematischer Vollständigkeit bedeuten, die früher allzusehr den Physikunterricht beherrschte und keine Vertiefung ermöglichte. Wir mögen weite Gebiete, deren „Durchnahme“ früher als unerläßlich galt, streichen, aber wir müssen Sorge tragen, daß das, was wir bringen, auch das Systemerlebnis bringt. Ein berechtigtes Ziel aber ist dieses, daß an Stelle der heute üblichen zeitlichen Trennung von Unterrichts- und Übungsstunden

der Übergang von dem Unterricht, in dessen Mittelpunkt der Lehrer steht, zu den Übungen und umgekehrt jederzeit erfolgen kann, wenn es die Sache erfordert.

Unser Begriff der Bildung läßt uns auch die Frage beantworten, ob und inwieweit die Geschichte, sowohl die der eigenen Wissenschaft als auch die fremder Kulturgebiete, heranzuziehen ist. Die Geschichte der Physik ist fast dauernd gesättigt mit dramatischen Spannungen. Mit Einsetzung höchster geistiger Kräfte haben führende Geister die Entscheidung zwischen entgegengesetzten Auffassungen desselben Sachverhaltes herbeizuführen gewußt, wobei der einmal errungene Standpunkt oft genug neue Schwierigkeiten, neue Fragestellungen herbeiführte. Die Größe aber der in einem Kampf aufgewandten Mittel weist hin auf den Wert des umkämpften Gegenstandes. So wird auch für den Schüler das Werterlebnis angeregt und vertieft werden, wenn er mit diesen Kämpfen bekannt gemacht wird, wenn er sieht, daß es sich hier nicht um Dinge handelt, die der Menschheit mühelos in den Schoß gefallen sind. Die Freude am Kampf liegt der Jugend im Blut, und enger als dem Gereiften ist ihr die Beziehung zwischen Kampf und Werterlebnis. So wird wohl jeder Lehrer einen Teil der Optik angliedern an die Entwicklung, die diese Wissenschaft seit *Newton* und *Huyghens,* besonders aber seit Beginn des vorigen Jahrhunderts genommen hat. Ja, wir können noch einen Schritt weitergehen und eingedenk der Tatsache, daß persönliches Erleben sich am stärksten an persönlichem Leben entzündet, unsere Schüler in unmittelbare Berührung mit den Gedanken unserer großen Physiker bringen, indem wir aus ihren Originalarbeiten geeignete Abschnitte vorlesen. Je mehr der Meister des Gedankens gleichzeitig ein Meister der Darstellung ist, um so mehr ist er geeignet, den Geist des Schülers zu bilden. Ich empfehle z. B. die schöne Einführung, die *Helmholtz* in seiner Lehre von der Tonempfindung in die Interferenzerscheinungen gibt, auch die *Discorsi* von *Galilei* kommen vielleicht in Betracht. Es ist selbstverständlich, daß diese Heranziehung des Geschichtlichen keine Zurückdrängung der fachlichen Einstellung, sondern ihre Vertiefung bedeutet. Zurückzuweisen ist dagegen der Gedanke, aus der Geschichte der Wissenschaft grundsätzlich einen Leitfaden für den Unterricht zu machen. Nur wenn man mit *Hegel* glaubt, daß die Geschichte die innere Entwicklung der Idee ist, daß theoretische Werte sich nur in der Geschichte verwirklichen, kann man diese Anknüpfung befürworten. Aber die Voraussetzung trifft nicht zu. Tatsächlich macht die Geschichte zahlreiche Umwege, die sachlich nicht notwendig waren und deren Studium nur da auf Teilnahme rechnen kann, wo das Interesse am Sachlichen bereits lebendig ist. Auch die Anregung der Denkschrift, den bildenden Wert des Physikunterrichts durch Aufdeckung der Beziehungen zwischen Physik und allgemeinem Kulturbewußtsein zu erhöhen, kann nur in sehr geringem Umfang fruchtbar gemacht werden. Daß solche Beziehungen vorliegen, daß in gewissem Sinne auch die Physik ein Ausdruck der jeweiligen Kulturlage ist, ist sicher, aber diese Beziehungen sind zu schwierig, sie setzen in zu hohem Maße gereifte geschichtliche Einsicht voraus, als daß wir unseren Schülern mit ihnen kommen dürften. Nur an wenigen Stellen können Hinweise dieser Art auf Verständnis rechnen, so, wenn der Physiklehrer erklärt, warum das neuzeitliche astronomische Weltbild, wie es durch *Kopernikus* und *Keppler* geschaffen, durch *Bruno* vollendet wurde, sowohl bei der katholischen wie bei der protestantischen Kirche auf schärfsten Widerstand stieß. (Hiermit ist natürlich

nichts gegen den fruchtbaren Gedanken der Querverbindungen gesagt. Nur soll man dieselbe nur dort in Anwendung bringen, wo sie durch die Einzelfächer gefordert werden.) Mit Entschiedenheit aber muß betont werden, daß der Physikunterricht, wenn er bei einseitigster, fachlicher Einstellung keinen bildenden Wert hätte, diesen auch nicht gewinnen könnte durch Anschluß an die „kulturkundlichen“ Fächer.

Die gleichen Forderungen wie für den Physikunterricht werden heute für fast alle Fächer erhoben: statt der Aufnahme von Kenntnissen verlangt man ihren Erwerb aus den Quellen. In der Geschichte soll der Schüler mit Urkunden, in der Erdkunde auf Wanderungen oder Reisen mit mehr oder weniger entfernten Gegenden bekannt gemacht werden. Allein wieviel günstiger liegen hier die Voraussetzungen für den Physikunterricht! Während dort das Schöpfen aus den Quellen von verschwindend geringem Umfang ist gegenüber dem, was auf autoritativem Wege übermittelt werden muß, hat der Physiker die letzte Quelle seiner Wahrheit dauernd zur Hand, die mit geisterhafter Allgegenwart wirkenden, niemals aussetzenden oder versagenden Naturkräfte.

Lassen Sie mich endlich noch auf die eingangs von mir erwähnten Einwendungen eingehen, die man gegen den bildenden Wert der physikalischen Wissenschaft erhoben hat. Gewiß, der Gegenstand der Physik ist das Leblose, Unpersönliche, Wertfreie, und man könnte versucht sein, daraufhin den Wert der Wissenschaft selbst niedriger einzuschätzen. Aber man kann auch den umgekehrten Schluß ziehen. Nicht auf den Gegenstand kommt es an, sondern auf die Leistung, die an ihm vollzogen wird. Der Wert einer Bildsäule ist nicht bedingt durch den Wert des Materials, sondern darauf kommt es an, wie der Künstler das Material formt, wie er es zum Träger des Geistigen, der Idee macht. Die Leistung der Physik aber besteht gerade darin, das Ungeistige, Sinnfreie in ein Geistiges, Sinnvolles umzuschmelzen, und nirgends tritt uns die Souveränität des Geistigen leuchtender entgegen als in dieser Leistung. Das Weltbild, das die theoretische Physik vor unseren Augen erstehen läßt, hat nicht die geringste Ähnlichkeit mit der anschaulichen Sinnenwelt, die uns umgibt; Farben, Töne, Licht und Wärme werden in mathematisch fixierte Begriffe verwandelt, ja, selbst Raum und Zeit werden zu abstrakten Formen, die mit dem, was wir unter diesen Worten verstehen, kaum etwas gemeinsam haben. Daß zur Schaffung dieses Weltbildes ebensosehr Phantasie gehört wie zu der von Kunstwerken, ist oft und mit Recht hervorgehoben worden[1]); wie es aber möglich ist, daß diese Erzeugnisse einer schöpferischen Phantasie trotz ihrer unendlichen Verschiedenheit von den Gestalten der Erscheinungswelt dennoch nicht *nur* Phantasieschöpfungen sind, sondern gleichzeitig Erkenntniswert besitzen, ist eine der tiefsten philosophischen Fragen. Die Einzigartigkeit dieser Leistung kann aber auch in geschichtlichem Sinne verstanden werden. Welche Leistungen unserer westeuropäischen Kulturgemeinschaft wir auch betrachten, fast immer finden wir entsprechendes auch in anderen Kulturen vor. Dramatische und epische Poesie, Mathematik und Architektur, Musik und Malerei sind zu verschiedenen Zeiten auf verschiedenen Stellen unseres Planeten aufgetaucht, theoretische Physik nur ein einziges Mal, in Westeuropa zur Zeit der Renaissance, um alsdann im westeuropäischen Kulturkreis sich weiter zu entwickeln. —

1) Am schärfsten einmal von Herbart, wenn er meint, es sei fraglich, ob *Shakespeare* oder *Newton* mehr Phantasie gehabt habe.



Weiter sagt man, die heutige Zeit sei müde des Rationalen, sie sehne sich nach irrationalen Gütern. Ist diese oft wiederholte Behauptung berechtigt? Gewiß, es ist nicht zu bestreiten, daß ein starkes Verlangen nach dem Irrationalen durch unsere Zeit geht, aber auf der anderen Seite ist doch auch der starke Drang nach rationaler Erkenntnis vorhanden. Wenn man entscheiden will, welche dieser beiden Kräfte die stärkere ist, so sehe ich dazu nur ein einziges Mittel, nämlich zu untersuchen, auf welcher Seite die größere Produktivität herrscht. Wenn ich nun dem, was heutigen Tages etwa auf dem Gebiete der Poesie oder der Malerei oder auf religiösem Gebiet an irrationalen Werten geschaffen wird, und das bei aller Gediegenheit des Wollens doch häufig genug den Charakter des Epigonenhaften trägt, gegenüberstelle die dämonische Kraft, mit der in unseren Tagen die Wissenschaft der Physik von Schöpfung zu Schöpfung geschritten ist, so glaube ich nicht, daß sich die Wagschale zuungunsten des Irrationalen neigt. Häufig ist wohl das Gefühl vorhanden, daß das Rationale etwas spießbürgerlich Bequemes sei, daß es an tiefere Probleme nicht heranreicht, sondern mit wenigen kahlen Abstraktionen an das Wirkliche herantritt, und man denkt dabei mit mehr oder weniger großer Sachkenntnis an das 18. Jahrhundert, an *Wolf, Nicolai* und *Moses Mendelsohn;* aber dieses Zerrbild des Rationalismus darf nicht mit ihm selbst verwechselt werden. Eher könnte man behaupten, daß der Rationalismus, indem er die bunte Mannigfaltigkeit der Erscheinungen durch die Kraft der Vernunft zu beherrschen sucht, auf Kampf eingestellt ist, und zwar auf einen Kampf, der seiner Natur nach schöpferisch und abschlußlos ist. Jedesmal, wenn der physikalischen Erkenntnis die Unterwerfung des Beobachtungsmaterials unter die Theorie gelungen schien, zeigte die Verfeinerung der Beobachtung, die Gewinnung neuer Dezimalstellen, daß das Irrationale nicht erledigt sei, daß es neuer, kühnerer Schöpfungen bedürfe, um die neuen Tatsachen zu fassen. Die Behauptung des Neukantianismus, daß der Gegenstand der Erkenntnis uns nicht gegeben, sondern aufgegeben, daß er nichts anderes als die Richtung eines unendlichen Prozesses sei, scheint gerade durch die Entwicklung der Physik gerechtfertigt zu werden.

Ich bin am Schluß meiner Ausführungen. Es unterliegt keinem Zweifel, daß für die heutige Zeit das alte Bildungsideal zu eng geworden ist, daß eine Erweiterung desselben sich vorbereitet und teilweise schon vollzogen hat. Wir wollen nichts von dem Alten preisgeben, aber wir wollen es durch neue Züge bereichern. Die Überzeugung von dieser Notwendigkeit aber liegt, wie ich glaube, nicht nur als geschichtliche Tatsache vor, sondern sie ist auch sachlich beberechtigt. Gibt es eine Rangordnung der Werte, die in diesen selbst begründet ist? Die Philosophie der letzten Zeit hat sich gelegentlich um die Beantwortung dieser Frage bemüht, ohne damit weit gekommen zu sein. Sollte einer späteren Zeit die Lösung der Aufgabe möglich sein, so wird die physikalische Erkenntnis eine besondere, ihrer Eigenart entsprechende Stelle erhalten. Wenn das aber der Fall ist, so ist nicht abzusehen, weswegen die Beschäftigung mit dieser Wissenschaft nicht ebensogut bildende Kraft haben sollte wie die mit irgendeinem anderen Werte. Und von hier aus können wir, wie ich glaube, das Gemeinsame erfassen, was die Typen der höheren Schule trotz der Verschiedenheit der behandelten Stoffe eint und ihre Wesensgleichheit bedingt. Es ist die persönlich erlebte, autoritätsfreie Stellung zu dem objektiv Wertvollen. Zu der Bestimmung dieses Konvergenzpunktes sollten meine Erörterungen einen Beitrag liefern.

Über die Einrichtung der physikalischen Schülerübungen an der Oberrealschule am Königswege zu Kiel.

Von H. Schmidt in Kiel.

Als um den Anfang unseres Jahrhunderts der Gedanke der physikalischen Schülerübungen lebendig wurde, waren es in der Hauptsache drei führende Männer, die sich die Konstruktion und Zusammenstellung geeigneter Apparate und Hilfsmittel angelegen sein ließen, Hermann Hahn in Berlin, Grimsehl in Hamburg und Noack in Gießen. In der Folgezeit wurde die Herstellung der von ihnen angegebenen und zum Teil auch verfertigten Apparate von einschlägigen Firmen übernommen, so daß man heute bei der Einrichtung von Schülerübungen bereits eine ziemlich reiche Auswahl an fertig käuflichen Apparaten hat. Die Grimsehlsche Sammlung ist inzwischen von K. Hahn und W. Koch (Hamburg) im Sinne ihres Schöpfers wesentlich erweitert worden.[1])

Die Oberrealschule am Königswege zu Kiel besaß bereits seit ihrer vor rund zwei Jahrzehnten erfolgten Gründung Einrichtungen für physikalische Schülerübungen. Diese konnten jedoch den heute in dieser Hinsicht an den Physikunterricht gestellten Anforderungen nicht mehr gerecht werden, zumal die Schülerzahl seit jener Zeit sehr beträchtlich gestiegen ist. Deshalb wurde vor nunmehr gut $1^1/_2$ Jahren zu einer umfassenden Erweiterung der Übungen geschritten.

Zunächst handelte es sich darum, mindestens einer halben Klasse ein gleichzeitiges Arbeiten in gleicher Front zu ermöglichen, was unbedingt nötig ist, wenn die Übungen, wie es jetzt wohl allgemein und mit Recht gefordert wird, mit dem Klassenunterricht in engstem organischen Zusammenhang stehen sollen. Zu diesem Ende wurden, abgesehen von der Schaffung eines größeren und geeigneteren Übungsraumes, den sechs vorhandenen Exemplaren einer jeden Apparatur je vier neue hinzugefügt, so daß jetzt zehn Arbeitsplätze vorhanden sind.

Der andere Teil der Aufgabe bestand darin, die Zahl der von den Schülern auszuführenden Versuche sehr beträchtlich zu erhöhen.

Die an unserer Schule bis dahin vorhandenen Apparate lehnten sich zum großen Teil mehr oder weniger eng an den Hahnschen Typ an. Eine Besichtigung der Originalschöpfungen Grimsehls an der Stätte seines ehemaligen Wirkens, der Oberrealschule auf der Uhlenhorst in Hamburg, bot die Anregung dazu, eine größere Anzahl jener wunderbar einfachen und daher auch verhältnismäßig billig zu beschaffenden Apparate in unsere Schülerübungen aufzunehmen, wodurch der Aufgabenkreis wesentlich erweitert wurde.

Wird dadurch, daß nach der Neuordnung der Physikunterricht bereits in der Untertertia beginnt, schon rein äußerlich eine starke Vermehrung der Aufgaben für die Unterstufe gegenüber früheren Zeiten erforderlich, so scheint mir auch noch ein innerer Grund dafür zu sprechen. Für den jüngeren Schüler liegt die Bedeutung der Schülerübungen meines Erachtens weniger in der Erlangung einer präzisen Meßtechnik — so wichtig an sich auch die Schärfung des quantitativen Beobachtungsvermögens ist —, als vielmehr darin, daß er das

1) Vgl. Hahn-Koch, Physikalische Schülerübungen. Leipzig 1926, B. G. Teubner.

Naturgeschehen, auch nur qualitativ, unmittelbar unter seinen Händen und unter von ihm selbst geschaffenen Bedingungen sich abspielen sieht. Aus dieser Erwägung heraus ist eine Anzahl einfacher Vorrichtungen für kurze qualitative Feststellungen in den Apparatebestand eingefügt worden.

Was nun die Beschaffung der Apparate und sonstigen Vorrichtungen einer solchen Übungssammlung betrifft, so müssen sie zu einem Teil natürlich von einschlägigen Lehrmittelfirmen bezogen werden. Sehr vieles aber kann man in allen möglichen Geschäften zusammenkaufen, in Eisenhandlungen, Hausstandsgeschäften, ja, Spielwarenläden. Tischler, Schlosser, Mechaniker, Glasbläser können manche Einzelteile billig und besonderen Wünschen entsprechend liefern. Vieles kann man auch selbst machen, wenn man sich das nötige Rohmaterial und vor allen Dingen gutes Werkzeug verschafft. Man findet wohl stets einige interessierte und geschickte Schüler, die gern bei solcher Arbeit mittun.

Bei der Zusammenstellung der zu den einzelnen Aufgaben gehörigen Apparaturen ist Bedacht darauf genommen worden, für eine stattliche Anzahl universeller Hilfsgeräte zu sorgen, als da sind Stativstangen, Klammern, Rollen, grobe Gewichtssätze, aus Küchengewichten zusammengestellt, Glasrohrstücke, Schlauchstücke, Wasserbecken, Emaillebecher (vielfach statt der zerbrechlichen Bechergläser zu verwenden) usw. Dahinzu trat dann die zu jeder Aufgabe gehörige Spezialapparatur bis herab zu passend abgemessenen Schnüren usw.

Von großer Wichtigkeit ist gerade bei einer zu Übungszwecken dienenden, umfangreicheren Sammlung die Frage der Unterbringung und Einordnung der Apparate. Diese sollen gegen Verstauben und Beschädigung geschützt, sie sollen leicht auffindbar, leicht zugänglich und leicht und schnell zu verteilen sein. Wir haben in unserer Sammlung das bewährte Grimsehlsche Prinzip durchgeführt, die Apparate bzw. Einzelteile zu je zehn oder nötigenfalls auch fünf gleichen Exemplaren in einzelnen Kästen unterzubringen und diese in passender Weise auf großen Regalen zusammenzustellen. Die nötigen Kästen sind, teils in vorrätigen Größen, teils nach Angaben gearbeitet, von einer Zigarrenkistenfabrik bezogen, einige ganz große auch vom Tischler verfertigt worden. Viele der Kästen mußten mit Scheidewänden oder sonstigen Inneneinrichtungen versehen werden.

Um jeden Kasten nicht nur sofort finden, sondern auch ohne Schwierigkeit wieder richtig einordnen zu können, ist an Regalen und Kästen ein besonderes Numerierungssystem eingeführt worden. Jeder Kasten trägt an der Vorderseite außer dem Etikett mit der Angabe seines Inhaltes noch vier Indizes, welche der Reihe nach Regal, Vertikalreihe, Fach und Kastennummer bezeichnen.

In dem recht großen Übungsraum (8×16 qm) sind die zehn Arbeitstische unter Freilassung eines breiten Mittelganges so in zwei Reihen aufgestellt, daß die Schüler sich frei um sie herumbewegen können und daß auch in der Umgebung der beiden großen Spülbecken nebst Trockengestell gehörig freier Raum bleibt. Die für je eine Gruppe (zwei Schüler) bestimmten Tische sind 2 m lang, haben einen weit überspringenden Rand zum Befestigen von Schraubzwingen und sind mit Gas- und Stromleitung versehen. Sie werden bei Bedarf mittels Schlauch- bzw. Kabelverbindung an Zapfstellen der Wand angeschlossen. Die elektrische Rundleitung erhält über eine Schalttafel mit Regulierwiderständen Gleichstrom von einer Spannung bis zu 110 V. und einer Gesamtstromstärke

bis zu 20 Amp. aus einem rotierenden Umformer. Auch kann die städtische Wechselspannung (220 V.) unmittelbar an die Schalttafel gelegt werden.

In der hier beschriebenen neuen Gestalt werden unsere Schülerübungen seit dem Sommer 1926 betrieben. Es wird eine Aufgabe der kommenden Jahre sein, sie immer weiter im Sinne eines fruchtbaren physikalischen Gesamtunterrichtes auszugestalten.

Ausgewählte Versuche aus der Schulphysik.

Von H. Schmidt in Kiel.

Mit 4 Figuren im Text.

Die im folgenden beschriebenen einfachen Demonstrationsversuche sind keineswegs neu. Ihre Vorführung gelegentlich der Kieler mathematischen und physikalischen Woche geschah lediglich in der Absicht, einige Winke dafür zu geben, wie derartige Versuche mit ganz einfachen Mitteln eindrucksvoll zu gestalten sind. Dabei ist der Grundsatz festgehalten worden, bei aller Einfachheit doch nach Möglichkeit nur „physikalische“ Mittel zu verwenden. Man hat ja bisweilen, zunächst vielleicht aus der Not eine Tugend machend, einen besonderen Vorzug für die Schulphysik, namentlich die der Unterstufe, darin gesehen, daß alles aus möglichst alltäglichen Dingen zusammengebaut wird. Solche sind, wenn man nichts anderes hat, ein Notbehelf, aber sie sind in einem physikalischen Aufbau weder schön, noch werden sie meines Erachtens sonstwie den Schüler wesentlich fesseln. Denn was dem Kinde die Physik interessant macht, ist, wenigstens zunächst, nicht das Walten ihrer Gesetze in der Alltäglichkeit, das sind vielmehr die schönen, sauberen, eigenartigen Apparate, die ihren Zauber wohl nur selten verfehlen. Erst wenn dem Schüler an solchen Apparaten die Naturgesetze eindrucksvoll zur Anschauung gekommen sind, wird er nun auch Freude daran haben, dieselben an den Dingen seiner alltäglichen Umgebung wiederzufinden.

Darum brauchen es nun aber durchaus nicht etwa immer kostbare Apparate zu sein, die wir den Schülern vorführen. Solche, wie sie z. B. in Universitätsvorlesungen gebraucht werden, sind sehr oft für den Schulunterricht viel zuwenig durchsichtig und enthalten viel zuviel verwirrendes Beiwerk. Die Schulapparate müssen oft mehr modellartigen Charakter tragen und können vielfach aus einfachsten Bestandteilen zusammengesetzt sein, nur eben nicht aus Dingen des alltäglichen Gebrauches.

Das wichtigste Erfordernis ist und bleibt jedoch die Deutlichkeit und Klarheit der Apparatur, wozu insbesondere gehört, daß alles, was gesehen werden soll, von hinreichenden Abmessungen ist und sich durch Farbe usw. klar von seiner Umgebung und vom Hintergrunde abhebt. Wer in großen Klassen unterrichtet, muß darauf ganz besonders achten, zumal die käuflichen Apparate oftmals offenbar auf ein kleines Auditorium zugeschnitten sind.

Es möge nun die kleine, in dem oben erwähnten Sinne getroffene Auswahl von Versuchen folgen.

1. *„Galileische Kanone.“* Die unter diesem Namen bekannte Vorrichtung schleudert eine Kugel horizontal fort und läßt gleichzeitig aus derselben Höhe



eine zweite senkrecht herabfallen. Die Kugeln schlagen gleichzeitig auf den Boden auf.

Fig. 1 zeigt eine sehr leicht herzustellende Form des kleinen Apparates. Das Grundbrett enthält für die eine Kugel ein Loch zum Durchfallen, für die andere eine nur eben angedeutete Vertiefung. Der um die Schraube A drehbare, rechtwinklig gebogene Blechstreifen B wird zum „Laden" unter Spannung der Feder C über einen Teil des Loches gebracht und in dieser Lage durch einen um den Nagel D gewickelten Faden festgehalten. Nachdem man die Kugeln (etwa kleine, eiserne Spielkugeln) auf ihre Plätze gelegt hat, löst man die Vorrichtung durch Abbrennen des Fadens aus.

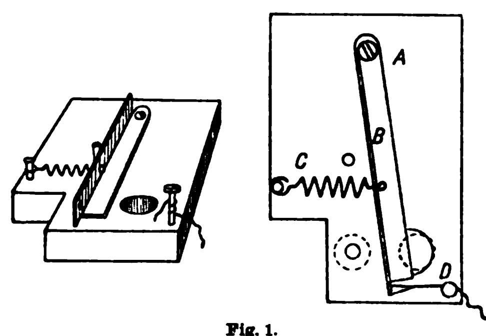


Fig. 1.

2. *Ein Seitenstück zur „chemischen Harmonika"* bildet ein überaus eindrucksvoller und dabei sehr leicht anzustellender Versuch, der schon vor vielen Jahren von Rijke[1]) angegeben worden ist.

In ein etwa 3 cm weites Glasrohr wird ein enges Drahtnetz eine Strecke weit hineingeschoben. Hält man das Rohr in senkrechter Lage über eine Bunsenflamme, bis das Netz erglüht, und entfernt es sodann unter Beibehaltung der vertikalen Lage, so gibt es einen sehr lauten Ton von sich, der, allmählich schwächer werdend, so lange anhält, bis sich das Netz abgekühlt hat. Die im Rohre aufsteigende Luft dehnt sich nämlich beim Hindurchstreichen durch das heiße Netz aus, zieht sich oberhalb desselben wieder zusammen und regt so die ganze Luftsäule im Rohre zu ihrer Eigenschwingung an. Sobald man den Luftstrom durch Horizontalhalten des Rohres unterbricht, hört der Ton auf. Sehr schön läßt sich auch der Einfluß der Temperatur auf die Tonhöhe zeigen, wenn man das tönende Rohr wieder über die Flamme bringt.

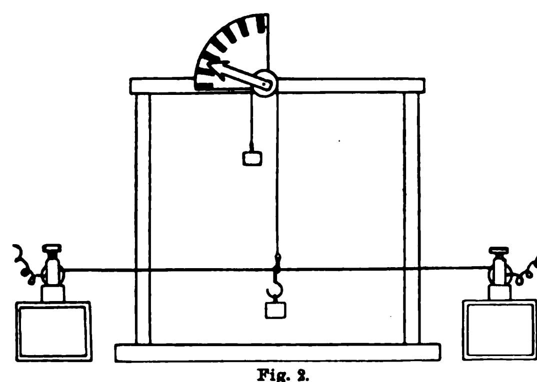


Fig. 2.

3. *Modell eines Hitzdrahtamperemeters, zugleich geeignet zur Demonstration des Umwandlungspunktes des Eisens.* Die Wirkungsweise der in Fig. 2 abgebildeten Anordnung ist ohne weiteres ersichtlich. Als Hitzdraht verwendet man eine zwischen zwei Holtzschen Klemmen ausgespannte Klaviersaite von etwa $1\,^1/_2$ m Länge und 0,5 mm Durchmesser. Für die Zeigervorrichtung kann man den Weinholdschen Rahmen mit angeklemmter Rolle verwenden. Auf letzterer wird der Pappzeiger mit Klebwachs befestigt.

1) Vgl. Chwolson, Lehrbuch d. Phys., Bd. II, S. 88.

Bringt man den Draht auf helle Rotglut und schaltet dann den Strom plötzlich aus, so unterbricht der Zeiger bei der darauffolgenden Abkühlung des Drahtes seine Rückwärtsbewegung plötzlich durch einen kleinen Ruck nach vorwärts (*Umwandlungspunkt des Eisens*). Für den letzterwähnten Versuch hat W. Hillers im Jahre 1924 eine ähnliche Anordnung angegeben.[1])

4. *Bewegung eines stromdurchflossenen Leiters im Magnetfelde* (Fig. 3). Der Versuch ist in dem Schulbuche von Kleiber-Nath[2]) angegeben. Als „Läufer" verwendet man vorteilhaft ein leichtes Messingröhrchen von etwa 5 mm Durchmesser mit aufgesteckten Korkscheiben, deren vordere zur Sichtbarmachung des Rollens eine weiße Papierscheibe mit stark ausgezogenem Durchmesser trägt. Ein großer, drehbarer Papppfeil kennzeichnet die jeweilige Stromrichtung im Läufer. Unter Anwendung eines Kommutators läßt man diesen auf den festen Paralleldrähten zwischen je zwei Anschlägen hin und her rollen.

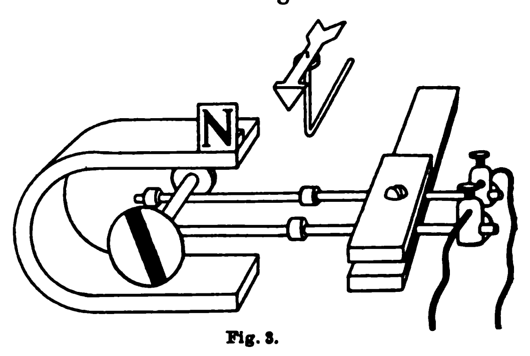
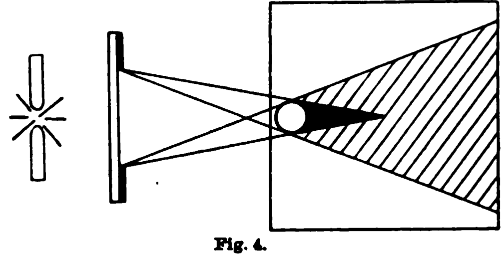


Fig. 3.

5. *Kernschatten und Halbschatten.* Als schattenwerfender Körper dient ein etwa 10 cm langes Papprohr von 4—5 cm Durchmesser. Mittels eines Korkes, aus dem eine Nadelspitze hervorragt, steckt man das Rohr an ein vertikal gestelltes, mit weißem Papier bedecktes Reißbrett. Mit einer Bogenlampe als annähernd punktförmiger Lichtquelle erhält man einen Kernschatten, bei vorgesetzter Mattscheibe Kern- und Halbschatten. Fig. 4 zeigt die Anordnung.


Fig. 4.

6. *Schattenbildung bei eindimensional ausgedehnter Lichtquelle.* Als solche dient eine beleuchtete Mattscheibe, die bis auf einen hinreichend großen Spalt mit schwarzem Papier bedeckt ist. Auf einem Schirm erzeugt dann ein Stab einen scharfen Schatten, wenn er dem Spalte parallel, dagegen einen verwaschenen, wenn er senkrecht zu ihm gehalten wird.

7. *Radiomodell.* Das vorgeführte Modell, eine Vereinigung von Schaltschema und gebrauchsfähiger Apparatur, wird demnächst an anderer Stelle ausführlich veröffentlicht werden.

---

1) W. Hillers, Zeitschr. f. d. physik. u. chem. Unterr. 1924, S. 76.
2) Kleiber-Nath, Physik für die Oberstufe. 11. Aufl. Oldenbourg 1922.

Konstruktion von Krümmungsmittelpunkten ebener Kurven.

Von N. Gennimatás in Athen.

Mit 6 Figuren im Text.

1. Man betrachte die ebene Kurve $y = f(x)$ in rechtwinkligen Koordinaten. Der Krümmungsradius im Punkte $P(x, y)$ der Kurve ergibt sich aus der Formel

$$R = \frac{(1 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}{|\ddot{y}|}, \tag{1}$$

wobei $\dot{y}$ und $\ddot{y}$ die Werte der ersten und zweiten Ableitung von y in bezug auf x für den betreffenden Kurvenpunkt bedeuten. Da nun $\dot{y} = \operatorname{tg} \varphi$, wobei φ der Richtungswinkel der Tangente der Kurve in P, so ist $1 + \dot{y}^2 = \frac{1}{\cos^2 \varphi}$, und da ferner $|\cos \varphi| = |\cos \psi|$, wenn ψ den spitzen oder stumpfen Winkel der Normale in P mit der Ordinatenachse darstellt, so läßt sich (1) schreiben

$$R = \frac{\frac{1}{\cos^2 \varphi}}{|\ddot{y} \cos \psi|}. \tag{A}$$

Diese Formel führt zur folgenden einfachen Konstruktion des dem Kurvenpunkt P entsprechenden Krümmungsmittelpunktes:

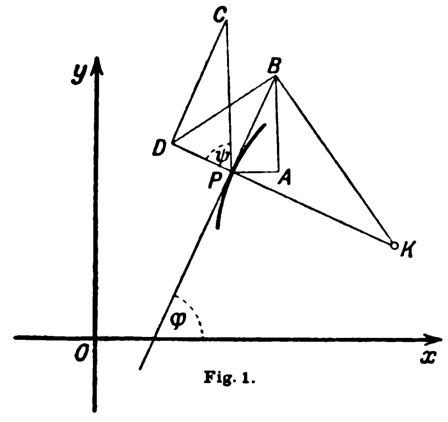


Fig. 1.

Man konstruiert das rechtwinklige Dreieck PAB (Fig. 1), indem man $PA = 1$ nach der Richtuny der zunehmenden x und $AB = |\dot{y}|$ nach der Richtung der zu- bzw. abnehmenden y nimmt, je nachdem $\dot{y}$ positiv oder negativ ist, zieht die Gerade durch P und B, (Tangente der Kurve in P), die entsprechende Normale und die durch P Parallele zur y-Achse; nimmt auf der zuletzt gezogenen Gerade die Strecke $PC = |\ddot{y}|$ nach der k o n v e x e n *Seite der Kurve und projiziert C in D auf die Normale; verbindet D mit B und errichtet in B die Senkrechte zu DB: sie trifft die Normale im gesuchten Krümmungsmittelpunkt K.*

Tatsächlich aus der Figur folgt

$$(PB)^2 = PD \cdot PK, \quad \text{d. i.} \quad \frac{1}{\cos^2 \varphi} = |\ddot{y} \cos \psi| \cdot PK;$$

also nach Formel (A) $\qquad PK = R.$

B e i s p i e l: Besonders einfach gestaltet sich die Konstruktion bei der Exponentialkurve $y = e^x$. Hier ist nämlich $\ddot{y} = \dot{y} = y$, also in Fig. 2 wird $PA = 1$ und $AB = y$ genommen; die Strecke CD senkrecht zur Normale gezogen und in B der rechte Winkel DBK konstruiert.

2. Die ebene Kurve sei nunmehr durch die parametrischen Gleichungen

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t) \tag{2}$$

definiert. Die Formel für den Krümmungsradius lautet

$$R = \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}{|\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}|}, \tag{3}$$

wobei die vorkommenden Ableitungen von x und y in bezug auf den Parameter t zu nehmen sind. Führt man nun die *Vektorsymbolik* ein, so lassen sich die Gleichungen (2) durch die *Vektorgleichung* ersetzen

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{i}x + \mathfrak{j}y, \tag{4}$$

wobei $\mathfrak{r}$ der Radiusvektor $\overline{OP}$ (O der Koordinatenanfang, P der Kurvenpunkt), während $\mathfrak{i}$ und $\mathfrak{j}$ zwei Einheitsvektoren, welche die positiven Richtungssinne der Koordinatenachsen angeben.

Ein erstes und ein zweites Differenzieren der Gleichung (4) nach dem Parameter t ergibt

$$\dot{\mathfrak{r}} = \mathfrak{i}\dot{x} + \mathfrak{j}\dot{y}, \tag{5}$$

$$\ddot{\mathfrak{r}} = \mathfrak{i}\ddot{x} + \mathfrak{j}\ddot{y}. \tag{6}$$

Fig. 2.

Da nun nach (5)

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = |\dot{\mathfrak{r}}|^2,$$

und nach (5) und (6)

$$|\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}| = |[\dot{\mathfrak{r}}\ddot{\mathfrak{r}}]|,$$

wobei $|\dot{\mathfrak{r}}|$ und $|[\dot{\mathfrak{r}}\ddot{\mathfrak{r}}]|$ die absoluten Beträge des Vektors $\dot{\mathfrak{r}}$ und des äußeren Vektorproduktes $[\dot{\mathfrak{r}}\ddot{\mathfrak{r}}]$ bedeuten, so läßt sich Formel (3) kürzer und zugleich ausdrucksvoller schreiben

$$R = \frac{|\dot{\mathfrak{r}}|^3}{|[\dot{\mathfrak{r}}\ddot{\mathfrak{r}}]|}. \tag{7}$$

Die Formel ließe sich übrigens auch direkt, auf rein vektoriellem Wege, ableiten und gilt allgemein nicht nur für ebene Kurven, sondern auch für jede Raumkurve

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{i}x + \mathfrak{j}y + \mathfrak{k}z.$$

Berücksichtigt man die Identitäten

$$\dot{\mathfrak{r}}^2 = |\dot{\mathfrak{r}}|^2, \quad |[\dot{\mathfrak{r}}\ddot{\mathfrak{r}}]| = |\dot{\mathfrak{r}}|\,|\ddot{\mathfrak{r}}| \sin(\dot{\mathfrak{r}}, \ddot{\mathfrak{r}}),$$

so läßt sich Formel (7) nach Entfernung des im Zähler und Nenner vorkommenden Faktors $|\dot{\mathfrak{r}}|$ auf die Form

$$R = \frac{\dot{\mathfrak{r}}^2}{|\ddot{\mathfrak{r}}| \sin(\dot{\mathfrak{r}}, \ddot{\mathfrak{r}})} \tag{B}$$

bringen. Übrigens ließe sich (B) kürzer schreiben

$$R = \frac{\dot{\mathfrak{r}}^2}{\ddot{\mathfrak{r}}\,\mathfrak{n}};$$

dabei ist $\mathfrak{n}$ der den positiven Richtungssinn der Normale angebende Einheitsvektor, also bedeutet das innere Vektorprodukt $\ddot{\mathfrak{r}}\mathfrak{n}$ die Projektion von $\ddot{\mathfrak{r}}$ auf der Normale.

Sind nun die Vektoren $\dot{\mathfrak{r}}$ und $\ddot{\mathfrak{r}}$ im Punkte P der Kurve bekannt, so führt Formel (B) zur folgenden Konstruktion des entsprechenden Krümmungsmittelpunktes:

Man zieht (Fig. 3) die Vektoren $\overline{PA} = \dot{\mathfrak{r}}$, $\overline{PB} = -\ddot{\mathfrak{r}}$ und die Normale in P (senkrecht zu $\dot{\mathfrak{r}}$); projiziert B in C auf die Normale; verbindet C mit A und errichtet in A die Senkrechte zu CA: sie trifft die Normale im gesuchten Krümmungsmittelpunkt K.

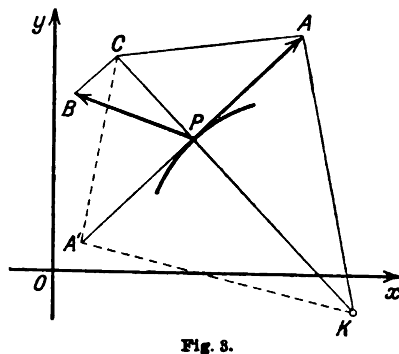


Fig. 3.

Tatsächlich folgt aus der Figur

$$(PA)^2 = PC \cdot PK,$$

d. i. $$\dot{\mathfrak{r}}^2 = |\,\ddot{\mathfrak{r}}\,| \sin(\dot{\mathfrak{r}}, \ddot{\mathfrak{r}}) \cdot PK;$$

also nach Formel (B)

$$PK = R.$$

Es ist wohl bekannt, daß der Vektor $\ddot{\mathfrak{r}}$, vom entsprechenden Kurvenpunkt gezogen, immer nach der konkaven Seite der Kurve liegt, so daß $-\ddot{\mathfrak{r}}$ in Fig. 3 nach der konvexen Seite der Kurve fällt. Da ferner

$$\dot{\mathfrak{r}}^2 = (-\dot{\mathfrak{r}})^2 \quad \text{und} \quad \sin(\dot{\mathfrak{r}}, \ddot{\mathfrak{r}}) = \sin(-\dot{\mathfrak{r}}, \ddot{\mathfrak{r}}),$$

so ist für die Konstruktion gleichgültig, ob man vom Kurvenpunkt P den Vektor $\overline{PA} = \dot{\mathfrak{r}}$ oder $\overline{PA'} = -\dot{\mathfrak{r}}$ (Fig. 3) zieht; man braucht nämlich vom Vektor $\dot{\mathfrak{r}}$ den Absolutbetrag und die Richtung, nicht aber auch den Richtungssinn zu wissen; dies aber bedeutet eine Vereinfachung für die Konstruktion.[1])

Beispiele: *Die Kegelschnitte.* — 1. Man betrachte die Ellipse $(2a, 2b)$, bezogen auf ihre Achsen. Führt man die exzentrische Anomalie v des Kurvenpunktes $P(x, y)$ ein, so erhält man die Vektorgleichung der Ellipse

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{i}a \cos v + \mathfrak{j}b \sin v; \tag{8}$$

und wenn man ein erstes und ein zweites Mal nach v differenziert

$$\dot{\mathfrak{r}} = -\mathfrak{i}a \sin v + \mathfrak{j}b \cos v, \tag{9}$$

$$\ddot{\mathfrak{r}} = -\mathfrak{i}a \cos v - \mathfrak{j}b \sin v. \tag{10}$$

Nun gibt der Vektor $\dot{\mathfrak{r}}$ die Richtung der in P Tangente der Ellipse an, also hat er die Richtung des zum Durchmesser des Punktes P konjugierten Durchmessers; andererseits folgt aus (9)

$$\dot{\mathfrak{r}}^2 = a^2 \sin^2 v + b^2 \cos^2 v = a^2 \cos^2\left(v + \frac{\pi}{2}\right) + b^2 \sin^2\left(v + \frac{\pi}{2}\right),$$

1) Zur Formel (B) nebst entsprechender Konstruktion gelangt auch Dr. W. Michael, auf anderem Wege, in seinem Aufsatz „Tangenten- und Krümmungskreis-Konstruktionen bei ebenen Kurven auf Grund ihrer vektoriellen Gleichung" (Schweizerische Bauzeitung, Bd. 87, Nr. 13, 1926.)

somit hat $\dot{\mathfrak{r}}$ (nach (8)) die Länge eines Ellipsenhalbmessers. Ferner folgt aus (10) die einfache Beziehung

$$-\ddot{\mathfrak{r}} = \mathfrak{r}.$$

Gehen wir nun zur entsprechenden Konstruktion über: In Fig. 4 sind $A'A = 2a$ und $BB' = 2b$ die Achsen der Ellipse; OS, OS' zwei zueinander senkrechte Radien des zur Ellipse umgeschriebenen Kreises, während OP, OP' die entsprechenden Ellipsenhalbmesser, zueinander konjugiert; die Strecke MM' parallel zum Halbmesser OP', gleich $2 \cdot OP'$, wird in P halbiert; der Vektor $\overline{PQ} = \overline{OP} = \mathfrak{r}$ genommen; QL senkrecht zur Normale in P (letztere senkrecht zu MM'), und

$$MK\,(M'K)$$

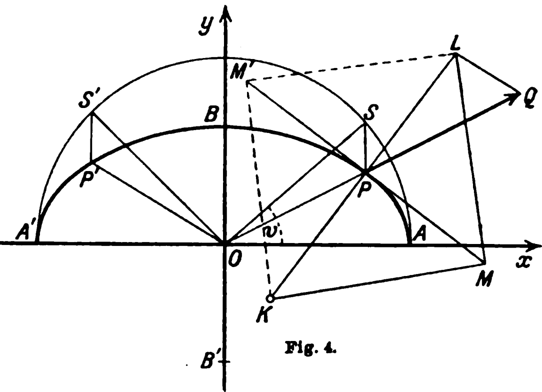


Fig. 4.

senkrecht zu LM (LM') gezogen: K der dem Ellipsenpunkt P entsprechende Krümmungsmittelpunkt.

2. Mit Hilfe der *hyperbolischen* Funktionen erhält man für die Hyperbel (2a, 2b), bezogen auf ihre Achsen, die zur Ellipsengleichung (8) ganz analoge Vektorgleichung

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{i}a \operatorname{Cos} \varphi + \mathfrak{j}b \operatorname{Sin} \varphi. \tag{11}$$

Tatsächlich, da $\operatorname{Cos}^2 \varphi - \operatorname{Sin}^2 \varphi = 1$, aus den Gleichungen

$$x = a \operatorname{Cos} \varphi, \quad y = b \operatorname{Sin} \varphi$$

erhält man $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, die Gleichung der in Betracht kommenden Hyperbel.

Aus (11), wenn man ein erstes und ein zweites Mal nach φ differenziert, erhält man

$$\dot{\mathfrak{r}} = \mathfrak{i}a \operatorname{Sin} \varphi + \mathfrak{j}b \operatorname{Cos} \varphi, \tag{12}$$

$$\ddot{\mathfrak{r}} = \mathfrak{i}a \operatorname{Cos} \varphi + \mathfrak{j}b \operatorname{Sin} \varphi. \tag{13}$$

Ist nun $P(a \operatorname{Cos} \varphi, b \operatorname{Sin} \varphi)$ ein Punkt der Hyperbel (11), so gibt der Vektor $\dot{\mathfrak{r}}$ die Richtung der Tangente in P an; andererseits aus den Koordinaten von $\dot{\mathfrak{r}}$, $\dot{x} = a \operatorname{Sin} \varphi$ und $\dot{y} = b \operatorname{Cos} \varphi$, folgt: $\frac{\dot{x}^2}{a^2} - \frac{\dot{y}^2}{b^2} = \operatorname{Sin}^2 \varphi - \operatorname{Cos}^2 \varphi = -1$ oder $\frac{\dot{y}^2}{b^2} - \frac{\dot{x}^2}{a^2} = 1$, die Gleichung der zur Hyperbel (11) *konjugierten* Hyperbel; so hat $\dot{\mathfrak{r}}$ die Länge eines Halbmessers dieser letzteren Kurve. Ferner folgt aus (13) die einfache Beziehung

$$\ddot{\mathfrak{r}} = \mathfrak{r}.$$

Die Konstruktion des zum Hyperbelpunkt P entsprechenden Krümmungsmittelpunktes K gestaltet sich besonders einfach, wenn man zuerst die Asymptoten gezogen hat: In Fig. 5 sind g und g' die zwei Asymptoten; die Strecke PM parallel zur Asymptote g' gezogen und MS gleich OM gemacht; die Strecke $S'S$, halbiert in P, liegt auf der Tangente der Hyperbel in P, hat also

die Richtung von $\dot{\mathfrak{r}}$, während $S'P = PS = |\dot{\mathfrak{r}}|$. Da nun $-\ddot{\mathfrak{r}} = -\mathfrak{r} = \overline{PO}$, gelangt man zum gesuchten Krümmungsmittelpunkt K, wenn man O in Q auf die Normale in P projiziert und in $S(S')$ den rechten Winkel QSK $(QS'K)$ bildet.

Fig. 5.

Sucht man nach obigen Regeln die in den Scheiteln der Ellipse oder der Hyperbel entsprechenden Krümmungsmittelpunkte, so gelangt man zu bekannten Konstruktionen.

3. Eine Vektorgleichung für die Parabel $y^2 = 2px$ ergibt sich am zweckmäßigsten, wenn man x durch y ausdrückt; so läßt sich die Parabelgleichung $y^2 = 2px$ durch die Vektorgleichung

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{i}\frac{y^2}{2p} + \mathfrak{j}y \tag{15}$$

ersetzen, woraus, wenn man ein erstes und ein zweites Mal nach y differenziert, folgt

$$\dot{\mathfrak{r}} = \mathfrak{i}\frac{y}{p} + \mathfrak{j}, \tag{16}$$

$$\ddot{\mathfrak{r}} = \frac{\mathfrak{i}}{p}. \tag{17}$$

Wie man aus (16) ersieht, hat der Vektor $\dot{\mathfrak{r}}$ die *konstante* Ordinate 1, während nach (17) $\ddot{\mathfrak{r}}$ ein *konstanter* Vektor ist; dabei hat er den Absolutbetrag $\frac{1}{p}$ und die Richtung der Parabeldurchmesser. Die Konstruktion des zum Parabelpunkt P entsprechenden Krümmungsmittelpunktes ergibt sich sehr leicht: In Fig. 6 ist $OX' = OX$ genommen; so ist die durch X' und P gezogene Gerade die Tangente der Parabel in P. Macht man den Vektor $\overline{PQ}$ gleich dem Einheitsvektor $\mathfrak{j}$, so schneidet der durch Q gezogene Durchmesser die Tangente in A, wobei der Vektor $\overline{PA}$ gleich $\dot{\mathfrak{r}}$ ist; $\left(\text{so ist nach (15) } QA = \frac{y}{p}\right)$. Die Normale in P schneidet die Parabelachse in L; dann ist $XL = p$; nimmt man also XM gleich 1 und bildet in M den rechten Winkel LMN, so folgt

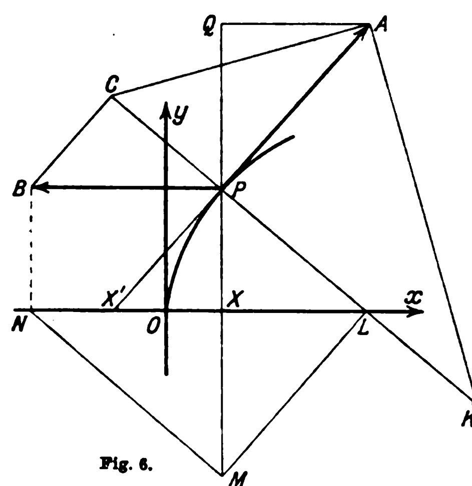


Fig. 6.

$XN = \frac{1}{p}$; daraus, wenn man N in B auf dem durch P gehenden Durchmesser projiziert, erhält man den Vektor $-\ddot{\mathfrak{r}} = PB$. Wenn man nun B in C auf die Normale projiziert und in A den rechten Winkel CAK bildet, so gelangt man zum gesuchten Krümmungsmittelpunkt K. Will man den dem

Scheitel O der Parabel entsprechenden Krümmungsmittelpunkt haben, so ist $\dot{\mathfrak{r}} = \mathfrak{j}$ zu nehmen, und die Konstruktion ergibt sofort $R = p$.

3. Zum Schluß soll gezeigt werden, daß die Konstruktion von Nr. 1 als ein besonderer Fall von der in Nr. 2 angegebenen zu betrachten ist: Die Gleichung $y = f(x)$ der Kurve läßt sich durch die *Vektorgleichung*

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{i}x + \mathfrak{j}f(x) \tag{18}$$

ersetzen. Daraus, wenn man ein erstes und ein zweites Mal nach x differenziert:

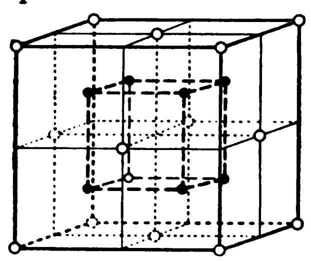
$$\dot{\mathfrak{r}} = \mathfrak{i} + \mathfrak{j}\dot{f}(x), \tag{19}$$

$$\ddot{\mathfrak{r}} = \mathfrak{j}\ddot{f}(x). \tag{20}$$

So hat der Vektor $\dot{\mathfrak{r}}$ die *konstante* Abszisse 1, während $\ddot{\mathfrak{r}}$ parallel zur Ordinatenachse ist. Wendet man nun die Konstruktion von Nr. 2 an, so erkennt man gleich, daß im vorliegenden Falle Fig. 3 auf Fig. 2 zurückgeführt wird.

Kleine Mitteilungen.

Die Struktur des Flußspats. (Mit 1 Figur im Text.) Nach W. H. und W. L. Bragg ist die Struktur des Flußspats gegeben durch einen Würfel von $5{,}44 \cdot 10^{-8}$ cm Kantenlänge, in dessen Ecken und Flächenmitten die Kalziumatome sitzen; teilt man diesen Würfel durch Ebenen parallel den Seitenflächen in acht gleiche Würfel von halber Kantenlänge, so liegen die Fluoratome in den Mitten dieser kleinen Würfel. Jedes der in den Würfelecken sitzenden Kalziumatome beteiligt sich beim Aufbau des Kristalls an acht benachbarten Würfeln, ist also bei der Berechnung des Verhältnisses der Atomzahlen als $\frac{1}{8}$ Ca anzusehen. Die acht in den Würfelecken liegenden geben zusammen 1 Ca, die sechs in den Würfelflächen $\frac{6}{2} = 3$ Ca, somit $4\,\mathrm{Ca} : 8F = \mathrm{Ca} : 2F$.



Dieses Verhältnis kann noch auf andere Art berechnet werden. Wenn alle Kalziumatome für voll gelten, geben sie zusammen

$n = 1$: $\qquad 2^3 + 3 \cdot 2 = 14.$

In einem Würfel mit doppelt so großer Kante zählen wir

$n = 2$: $\qquad 3^3 + 3 \cdot 4 \cdot 3 = 63.$

Bei n-facher Kantenlänge ist die Zahl der Würfelecken $(n+1)^3$. Die Mitten der Würfelflächen liegen in drei Zügen von je $(n+1)$ parallelen Ebenen, die den drei verschiedenen Stellungen der Würfelflächen entsprechen. Ihre Anzahl ist $3(n+1)n^2$. Das gesuchte Verhältnis ist somit $\frac{(n+1)^3 + 3n^2(n+1)}{8n^3}$, dessen Wert für $n = \infty$ in $\frac{1}{2}$ übergeht; $n = 10$ gibt $\frac{4631}{8000} = 0{,}579$. F. Rinne (Beiträge zur Kenntnis des Feinbaus der Kristalle. Neues Jahrb. f. Mineralogie. Jahrg. 1916, S. 70) berechnet für „den Würfel von $5{,}44 \cdot 10^{-7}$ cm" $\frac{36{,}51}{63{,}49} = 0{,}575$, ohne anzugeben, auf welche Art diese Zahlen gewonnen sind.

Stuttgart. F. Haag.

Aufgaben-Repertorium.

Redigiert von Studienrat M. Brettar in Viersen (Burgstr. 2c).

(Alle das Aufgaben-Repertorium betreffenden Zusendungen und Anfragen sind an die Adresse dieses Herrn zu richten.)

A. Auflösungen.

897. Folgende Reihen sind zu summieren:

I) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots\frac{1}{m(m+1)}$,

II) $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\cdots\frac{1}{(m-1)\,m\,(m+1)}$,

III) $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}+\cdots\frac{1}{(m-1)\,m\,(m+1)\,(m+2)}$,

IV) $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}+\cdots\frac{1}{(m-2)\,(m-1)\,m\,(m+1)\,(m+2)}$.

(1926, Heft 1, Klobasa-Troppau.)

Lösung. Durch Partialbruchzerlegung findet man, wenn n die Anzahl der Glieder und z das n^{te} Glied ist,

$$S_{\mathrm{I}} = 1 - n\cdot z = \frac{m}{m+1},$$

$$S_{\mathrm{II}} = \frac{1}{4} - \frac{n}{2}\cdot z = \frac{(m-1)(m+2)}{4m(m+1)},$$

$$S_{\mathrm{III}} = \frac{1}{18} - \frac{n}{3}\cdot z = \frac{(m-1)(m^2+4m+6)}{18\,m\,(m+1)\,(m+2)},$$

$$S_{\mathrm{IV}} = \frac{1}{96} - \frac{n}{4}\cdot z = \frac{(m-2)\,(m+3)\,(m^2+m+4)}{96\,(m-1)\,m\,(m+1)\,(m+2)}.$$

Oder: $S_{\mathrm{II}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{m(m+1)}\right)$, $S_{\mathrm{III}} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{m(m+1)\,(m+2)}\right)$,

$$S_{\mathrm{IV}} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4!} - \frac{1}{(m-1)\,m(m+1)\,(m+2)}\right),$$

woraus Gesetz und Grenzwert sofort ersichtlich sind.

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdots 2n}+\frac{1}{2\cdot 3\cdots(2n+1)}+\cdots\frac{1}{[m-(n-1)]\,[m-(n-2)]\cdots m\cdots(m+n)}$$
$$=\frac{1}{2n}\left(\frac{1}{(2n)!}-\frac{1}{[m-(n-1)]\cdots m\cdots(m+n)}\right).$$

Man vgl. Lieber-Müsebeck, Aufg. über kub. Gl. usw., Berlin 1898, S. 112, Aufg. 13. — Schlömilch, Übungsbuch z. Stud. d. höh. Anal. I, 5. Aufl., 1904, S. 286. — Knopp, Theorie der unendl. Reih., 1. Aufl., 1922, S. 95. — Fladt, Unendliche Reihen, S. 8. — Nyt Tidskrift for Math., A, I, 1890, S. 58. — Stern, Lehrb. der alg. Anal. 1860, Nr. 39, S. 447. — Diese Zeitschrift XXIV, S. 468, Aufg. 627—629 und XX, 513—514. — Zeitschr. f. österr. Mittelsch., 1898, S. 287.

Bauer. Braun. Brehm. Conrad. Diez. Fried. M. Goeb. Griebenow. Groner. Hoffmann. Jacob. Jonas. Kasper. Klobasa. Lohnes. Mahrenholz. Mertens. Michnik. Münst. Peters. Rall. Ruff. Scharffetter. Sós. Stiegler Walz. Wöhrle.

898. Wenn die Fläche eines Kugeldreiecks ABC gleich $\frac{1}{4}$ der Kugeloberfläche ist, so ist $\frac{c}{2} + t_c = 180^0$. (1926, Heft 1, Michnik-Beuthen.)

Lösung. Sind A_1 und B_1 die Diametralpunkte zu A und B, so besteht zwischen den Winkeln der Dreiecke ABC und A_1B_1C die Beziehung $\alpha + \beta + \gamma = 4R - (\alpha_1 + \beta_1 - \gamma_1)$, was wegen $\alpha + \beta + \gamma = 4R$ übergeht in $\alpha_1 + \beta_1 = \gamma_1$. Demnach liegt C auf dem kleinen Kugelkreis über dem sphärischen Durchmesser A_1B_1. Der sphärische Mittelpunkt D_1 dieses Kreises ist der Mittelpunkt von A_1B_1. Sein Diametralpunkt D ist Mittelpunkt von AB. Durch D und D_1 lege man den Hauptkreis DCD_1. Dann ist $DD_1 = 180^0$ oder $D_1C + DC = 180^0$. Nun ist $D_1C = D_1A_1 = AD = \frac{c}{2}$, $DC = t_c$, mithin $\frac{c}{2} + t_c = 180^0$.

Conrad. Diez. Fried. Hoffmann. Mahrenholz. Mertens. Michnik. Münst. Rall. Rulff. Stiegler.

Vgl. Killing und Hovestadt, Handb. d. math. Unt. II, S. 431; sphärische Dreiecke, deren Winkelsumme $4R$ beträgt. Mahrenholz.

899. Gegeben ist die Funktion

$$px^2 + qxy + rx + sy^2 + ty + s = 0.$$

Welchen Bedingungen müssen die Koeffizienten genügen, damit reelle Geraden durch sie dargestellt werden? (1926, Heft 1, Brettar.)

Lösung. Man vgl. Krüse, Diskuss. u. Anwend. d. allg. Kegelschnittsgl., diese Zeitschr. Bd. 40, 1909, S. 295. — Schlömilch, Einf. in d. anal. G. (Berlin 1925), S. 142 u. 144. — Gräfe, Aufg. aus d. anal. G. d. Kegelschn. Aufg. 301.

Die notwendige und hinreichende Bedingung für ein Geradenpaar ist $\Delta = \begin{vmatrix} 2p, & q, & r \\ q, & 2s, & t \\ r, & t, & 2s \end{vmatrix} = 0$. Für *reelle* Geraden außerdem $\begin{vmatrix} 2p, & q \\ q, & 2s \end{vmatrix} < 0$. Ist diese Determinante $= 0$ und ist $\frac{r}{2} > \sqrt{p \cdot s}$ und $2s < t$, dann sind die Geraden parallel. Mit $q = r$ fallen sie zusammen.

Bauer. Brehm. Conrad. Fried. Groner. Hoffmann. Jacob. Kasper. Lohnes. Mahrenholz. Mertens. Münst. Peters. Ruff. Sós. Stiegler.

B. Neue Aufgaben.

954. Soll man eine Hyperbel aus einer Asymptote, einem Brennpunkt F_1 und einem Kurvenpunkt P zeichnen, so ist der Mittelpunkt O der Hyperbel der Mittelpunkt eines Kreises, der durch den Fußpunkt des von F_1 auf die Asymptote gefällten Lotes geht und den Kreis mit dem Durchmesser F_1P berührt. Die Scheitel aller Hyperbeln mit gemeinsamer Asymptote und gemeinsamem Brennpunkt F_1 liegen auf einer geraden Strophoide, deren Asymptote der Ort des zweiten Brennpunktes ist. Mithin kann P nicht beliebig angenommen werden. Auf welche Gebiete der Ebene ist P beschränkt? Mahrenholz-Kottbus.

955. Auf der Kreisfläche πr^2 soll — unter Ausschluß der Form des abgestumpften Kegels — ein Rotationskörper von der Höhe h und dem Volumen V



($< \pi r^2 h$) errichtet werden. Wie heißt die Gleichung des Kurvenabschnitts, durch dessen Rotation um h der Mantel des Rotationskörpers gebildet wird? (Der Kurvenbogen soll keinen Wendepunkt haben.) JACOB-Elsterwerda.

956. Die innerhalb des Scheitelkreises gelegenen Stücke der Tangenten einer Ellipse oder einer Hyperbel mit vertikaler Hauptachse werden von einem fallenden Punkte in derselben Zeit zurückgelegt, wie der Abstand der Brennpunkte. MICHNIK-Beuthen.

957. Für den Inhalt V eines beliebig abgeschnittenen Prismas, dessen Schnittebenen sich nicht innerhalb des Körpers schneiden, gilt $V = Qs$, wo Q den Inhalt eines Normalschnittes, s den Abstand der Schwerpunkte der Schnittfläche bedeuten. G. Holzmüller (Elemente der Stereometrie, Leipzig 1900, 2. Teil, S. 77) knüpft daran die Bemerkung, daß dieser Schwerpunktsabstand beim dreiseitigen Prisma gleich dem arithmetischen Mittel der drei Kantenlängen sei. Bei welchen n-seitigen Prismen ($n > 3$) gilt ebenfalls für den Abstand der Schwerpunkte irgend zweier sich nicht durchsetzender ebener Schnittfiguren die Beziehung $s = \frac{k_1 + k_2 + k_3 \cdots k_n}{n}$? RUHM-Bonn-Poppelsdorf.

Briefkasten zum Aufgaben-Repertorium.

Bis zum 26. Mai gingen an Auflösungen ein: Bolduan-Chemnitz 945 (und Ergänzung). Diethelm-Schwyz 944. Ernst-Wien 939. Förster-Haspe 897 (zu spät). Hoffmann-Ravensburg 947. 948. Klobasa-Troppau 941. 944. 947. Lohnes-Offenbach 947. Mahrenholz-Kottbus 938. 941. 942. 944—948. Meyrich-Leipzig 936. Michnik-Beuthen 941. 943—948. Neubauer-Naumburg 944. 947. Neumann-München 933. Nikol-München 947. Ostermeyer-Ratibor 929. 930. 933. 947. Ruff-Wien 944. 947. Schlosser-Tetschen (Böhmen) 897 (zu spät). Stiegler-Madrid 927. 945—948. *Ohne Namen sind eingegangen* 931. 940. 944. (Der Poststempel ist nicht zu entziffern.)

Neue Aufgaben mit Lösung sandten ein: Ernst-Wien (1), Koethke-Malaga (7), Lohnes-Offenbach (2), Michnik-Beuthen (1), Ruff-Wien (2).

Ich bitte die Manuskripte nur **einseitig** zu beschreiben. Allen Anfragen ist Rückporto beizufügen.

Berichte.

Organisation, Verfügungen.

Die Richtlinien für die gesetzliche Regelung des österreichischen Mittelschulwesens. Mit der preußischen Denkschrift vom Jahre 1924 verglichen, nimmt sich ihr österreichisches Gegenstück, die zum neuen Jahre vom Bundesministerium für Unterricht herausgegebenen „Richtlinien“ sehr bescheiden aus. 3 Seiten nehmen die Richtlinien selbst in Anspruch, 3 Seiten die Stundentafeln, 1 Seite die schematische Darstellung des nach den Richtlinien geplanten Aufbaues des österreichischen Mittelschulwesens und 3 Seiten die Erläuterungen zu den Richtlinien. Der Ausgestaltung der Bürgerschule sind weitere 3 Seiten gewidmet.

Wie der Umfang ist auch der Inhalt. Im Stile eines österreichischen Erlasses sind Richtlinien und Erläuterungen gehalten, so daß man zwar erfährt, wie sich das Ministerium die gesetzliche Regelung vorstellt, nicht aber, oder wenigstens nicht ausreichend, was der Anlaß zu diesem oder jenem Punkte ist

und wie es sich mit den entgegenstehenden Meinungen der theoretischen oder praktischen Pädagogik auseinandersetzt. Insbesondere fehlt die Auseinandersetzung mit der bisherigen österreichischen Schulreform, die, über die deutsche Mittelschule als einheitlicher Unterstufe der höheren Schulen, die allgemeine Mittelschule als Einheitsschule für die 11—14jährigen erstrebte, und die noch im September 1926 die ersten Klassen *aller* Wiener Realgymnasien und Realschulen umwandelte. Es heißt lediglich, daß die Richtlinien von dem Grundsatze ausgehen, die geplante Regelung „müsse auf dem Wege organischer Weiterbildung der Richtung der historischen Entwicklung folgen bzw. diese aufsuchen". Dies letztere tat man auch und ging dabei so weit zurück, daß man die deutsche Mittelschule mit den zugehörigen Schulformen nicht mehr zu sehen brauchte, also in eine Zeit, in der es nur Gymnasien, Realschulen und Bürgerschulen gab; nicht einmal zu den Realgymnasien und Reformrealgymnasien von 1908 will man sich bekennen. Von den Schulen nach dem Umsturz findet nur die *Frauenoberschule* Gnade.

Auch für die beiden anerkannten Typen der höheren Schulen, den Gymnasien und den Realschulen, wird eine besondere pädagogische Idee als Grundlage nicht gesucht. Es sind höhere Schulen, die den traditionellen Unterrichtsstoff bringen und, weil sie auch *erziehen* sollen, auf diese Aufgabe ausdrücklich verweisen und Gesang, Handarbeit neben den bereits anerkannten körperlichen Übungen als Pflichtfächer treten lassen. Beide Schulformen sind einander im Aufbau stark angeglichen, es hat sicher das Bestreben vorgeherrscht, durch einen möglichst gleichartigen Bildungshabitus, die Kluft im Lager der höher Gebildeten zu schließen oder wenigstens zu verengen; als Nebenerfolg ergaben sich dabei leichtere Übergangsmöglichkeiten von einer Schule in die andere und damit eine Schwächung der Position der Reformer um die deutsche Mittelschule herum, für die der Aufschub der Schulbahnwahl ein wichtiges Werbemittel bedeutet.

Beide Schulen sind achtklassig; das bedeutet für die Realschule die Hinzufügung von einem Jahr. Die Angleichung an die deutschen höheren Schulen durch die Hinzufügung eines 9. Schuljahres mied man aus wirtschaftlichen Gründen; im übrigen werden die reichsdeutschen Verhältnisse stark beachtet. Die österreichischen Mittelschulen sind (nach den Richtlinien) grundsätzlich für höhere Schulen das 5. bis 12. Schuljahr; sie müssen damit grundsätzlich an die 4. Stufe der Volksschule anschließen; ihr Ziel sind die Voraussetzungen der Hochschulen.

Die wöchentliche Pflichtstundenzahl ist in der 1. Klasse auf 28, in der 2. auf 29, in allen übrigen auf 30 gehalten. Hiezu kommt in allen Klassen ein Nachmittag für verbindliche körperliche Übungen und in den 1.—3. Klassen aller Mittelschulen sowie in der 4. Klasse der Realschulen ein Nachmittag für Handarbeit. Nicht einbezogen sind hier der relativ-obligate Englischunterricht auf der Oberstufe in den 5.—8. Klassen der Gymnasien, der Stenographieunterricht und die übrigen Freigegenstände, unverbindliche Fachübungen und Arbeitsgemeinschaften, für die eine obere Grenze nicht aufgestellt ist und deren Besuch auch keine Kompensation im Pflichtunterricht auslöst.

Die Klassen 1—3 sind bis auf die Fremdsprache in allen Mittelschulen völlig gleich. Auch für die Fremdsprache, Latein in den Gymnasien und den Lateinrealschulen, Französisch in den eigentlichen Realschulen, sind in diesen Klassen die Stundenzahlen gleich. Die Lateinrealschulen sind Realschulen, die an

Stelle des Französischen Latein führen; sie sollen wohl die bisherigen Realgymnasien ersetzen, denn das Zurückgehen auf den Weg der historischen Entwicklung konnte solche Realschulen in Österreich nicht finden lassen; immer war die Lateinlosigkeit charakteristisch für die österreichische Realschule, die ausschließlich in den Kulturgütern des modernen Europa ihre Rechtfertigung suchte.

Die erste Fremdsprache selbst (Latein oder Französisch) soll im 2. Semester der 1. Klasse mit 3 Stunden, die der Deutschunterricht abzugeben hat, einsetzen, in den Klassen 2—4 sechs Wochenstunden haben, dann im Gymnasium auf 5, in den Realschulen auf 4 und schließlich auf 3 heruntergehen. Dieser Beginn der Fremdsprache im 2. Semester soll den Deutschunterricht von der Vorarbeit für die Fremdsprache befreien, und damit autonom machen. In der Praxis dürfte aber gerade das Gegenteil sich ergeben, da die Abgabe von 3 Deutschstunden im 2. Semester vielfach die Notwendigkeit zeitigen wird, den Deutsch- und Fremdsprachunterricht in einer Hand zu vereinigen. Es dürften diese 3 Stunden in der 1. Klasse übrigens kaum ehrlich gemeint sein; wahrscheinlich haben sie nur den Zweck, bei den Verhandlungen mit den politisch-mächtigen Vertretern der deutschen Mittelschulen, die den Fremdsprachenbeginn in die 3. Klasse setzen, eine gewisse Nachgiebigkeit des Ministeriums zu ermöglichen.

Vergleichen wir das Gymnasium der „Richtlinien“ mit den bisherigen österreichischen Gymnasien, dann bemerken wir außer der neuen verbindlichen Führung von Gesang und Handarbeit in den ersten 3 Klassen eine bedeutsame Stärkung des Deutschunterrichts (+ 6½ Wochenstunden), der Mathematik (+ 5 St.) und der Naturwissenschaften (+ 6 St.), die außer durch die Erhöhung der Stundenzahlen ausschließlich von Latein (— 8½ St.) und Griechisch (— 3½ St.) getragen werden. Den preußischen Gymnasien der „Denkschrift“ von 1924 bringen die Richtlinien die österreichischen Gymnasien in Deutsch, Geschichte, Geographie, Mathematik, Singen und durch die relativ-obligate Führung einer modernen Fremdsprache zweifellos näher; ein anders als durch das fehlende 9. Jahr begründetes Minus ergibt sich auf österreichischer Seite in Latein, Griechisch und Zeichnen, dem ein starkes Plus in den Naturwissenschaften, in Philosophie und in dem Handarbeitsunterricht der ersten 3 Klassen gegenübersteht.

Die neue Realschule erzielt eine Stundenvermehrung durch die Hinzufügung des 8. Schuljahres bei allen Gegenständen, ausgenommen bei der Mathematik und der darstellenden Geometrie, die zusammen einen Verlust von 3½ Stunden erleiden und bei dem Freihandzeichnen, das 3 Stunden verliert. Neu ist außer der verbindlichen Führung von Gesang und Handarbeit in den unteren Klassen ein philosophischer Einführungsunterricht mit 3 Stunden in der 8. Klasse. Von der preußischen Oberrealschule der „Denkschrift“ von 1924 unterscheidet sich die österreichische Realschule außer durch den verbindlichen Handarbeitsunterricht der ersten 4 Klassen nur mehr bemerkenswert durch ein Minus in Französisch, Englisch, Geschichte, Geographie und Mathematik und durch ein geringes Plus (trotz der 9-Stufigkeit der preußischen Schulen!) in den Naturwissenschaften (1 St.), Philosophie (1 St.) und Zeichnen (2 St.).

Die Stundenzahlen für Mathematik und die Naturwissenchaften sind in den

Gymnasien:

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
Mathematik	4	4*	4*	4*	4	3	3	2
Naturgeschichte	3	2	—	} 2	0/3**	3	2	—
Chemie	—	—	—		3/0**	—	—	1
Physik	—	—	3	2	—	2	2	3

Realschulen:

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
Mathematik	4	4*	4*	4*	4	3	3	3
Darst. Geometrie	—	—	—	—	2	2	2	2
Naturgeschichte	3	2	—	} 3	2	2	2	2
Chemie	—	—	—		—	2	2	2
Physik	—	—	3	3	—	2	3	3

* Einschließlich des Geometrischen Zeichnens.

** Die Zahl vor dem Bruchstrich bezieht sich auf das 1. Halbjahr, die hinter dem Bruchstrich auf das 2. Halbjahr.

Bei der Mathematik fällt die nach dem Beispiel der deutschen Mittelschule durchgeführte Einbeziehung des geometrischen Zeichnens auf der Unterstufe auf und ebenso die fast völlige, und nur aus dem Streben nach einem einheitlichen Bildungshabitus erklärliche Übereinstimmung der Stundenzahlen in beiden Schulformen. Die darstellende Geometrie wird als besonderes Unterrichtsfach wie bisher nur an den Realschulen betrieben. Da hier der selbständige Unterricht im geometrischen Zeichnen auf der Unterstufe fehlt, die Zahl der Stunden auf der Oberstufe lediglich auf 4 Jahre verteilt und nicht vermehrt wurde, erscheint es kaum möglich, die bisherige Höhe dieses Unterrichts aufrechtzuerhalten. Die naturwissenschaftlichen Fächer schneiden günstiger ab als in den bisherigen Typen, in Einzelheiten ungünstiger als in den deutschen Mittelschulen und einzelnen der zu ihr gehörigen Oberschulen. Auch mancher Wunsch der Fachleute ist erfüllt, wie der der Chemiker an den Realschulen, die ihren Unterricht nun in höheren Klassen angesetzt sehen. Inwieweit die vorliegende Stundenverteilung das Richtige trifft, läßt sich, da die Lehrpläne selbst fehlen, noch nicht überblicken.

Außer für Gymnasien und Realschulen bringen die Richtlinien die Stundentafel für eine *Aufbauschule*, die die an der Volks- oder Bürgerschule verbliebenen Begabungen in 5 bzw. 4 Jahren zur Hochschulreife führen soll. Wie die bisherigen *Reformrealgymnasien* vermitteln sie eine lebende Fremdsprache und Latein. Die Stundenzahlen für Mathematik und die Naturwissenschaften sind hier:

	Übergangskl.	V	VI	VII	VIII
Mathematik	6	4	3	3	2
Naturgeschichte	—	0/3*	2	2	2
Chemie	2	3/0	—	—	1
Physik	—	—	2	2	3

* Die Ziffer vor dem Bruchstrich bezieht sich auf das 1. Halbjahr, die hinter dem Bruchstrich auf das 2. Halbjahr.

Der *Bürgerschule* kommt nach den Richtlinien eine etwas gehobenere Stellung zu, da sie 4 jährig wird und Aufnahmeprüfungen abhalten kann; auch ist der Übertritt aus der Bürgerschule in die nächsthöhere Klasse einer Mittelschule möglich lediglich auf Grund einer Aufnahmeprüfung aus der Fremdsprache und einer halbjährigen Bewährungsfrist an der Mittelschule. Neben der Bürgerschule bleibt die Volksschule für Schüler, die sich für die Bürgerschule nicht eignen, bis zum 14. Lebensjahre offen.

Die Aufnahme dieser Richtlinien in den Interessentenkreisen ist eine geteilte. Starke Ablehnung finden sie bei den Lehrern der Volks- und Bürgerschulen, ebenso den Lehrern an den deutschen Mittelschulen und Bundeserziehungsanstalten. Doch auch die Lehrer der Gymnasien und Realschulen treten nicht einhellig für sie ein, da unter ihnen viele eine Reform mit Zugrundelegung der deutschen Mittelschule wünschen, andere wieder die Opfer der charakteristischen Fächer der grundlegenden Typen, der klassischen Sprachen einerseits, der Mathematik andererseits ablehnen.

Die oberste Schulbehörde des Landes Wien, der Wiener Stadtschulrat, verlangt die Fortsetzung der bisherigen Schulreform und lehnt die „Richtlinien" grundsätzlich ab.

Spielen pädagogische Erwägungen gewiß eine Rolle, so fällt die Entscheidung, ob „Richtlinien" oder die bisherige Schulreform Trumpf bleiben, doch auf politischem Gebiete.

Wien. J. JAROSCH.

Aus der Forschung.

Kathodenzerstäubung. Merkwürdigerweise ist die Kathodenzerstäubung ein ebenso bekannter wie bisher unerforschter Effekt. Zuletzt 1912 von Kohlschütter untersucht, von dem auch ein zusammenfassender Bericht über sämtliche früheren Ansätze vorliegt[1]), wurde er erst jetzt der Vergessenheit entrissen, einerseits durch Güntherschulze[2]), andererseits durch v. Hippel und Blechschmidt.[3])

Die Glimmlichterscheinungen sind abhängig von Spannung, Stromstärke, Gasdruck (zwei dieser Größen bestimmen die dritte), Gasart, Form der Röhre, Abstand der Anode von der Kathode; außerdem kommen speziell für die Kathodenzerstäubung Kathodenfall und Kathodenmaterial in Betracht. Zur exakten Definition und zur Reproduzierbarkeit der Erscheinungen ist Betrieb mit Gleichspannung und größte chemische Reinheit des Kathodenmaterials und des Füllgases erforderlich. Nimmt man niedrigen Gasdruck, so entweichen aus Metall und Röhrenwand Fremdgase, die bei der geringen Menge des Füllgases stark verunreinigend wirken. Aus diesem Grunde arbeitet Güntherschulze mit hohem Gasdruck, während v. Hippel und Blechschmidt das mit allen chemischen Mitteln gereinigte Gas stationär durch die Entladungsröhre strömen lassen. Als Maß der Zerstäubung kann der Gewichtsverlust der Kathode (Güntherschulze) oder die Schichtdicke des auf einer Glasplatte vor der Kathode aufgefangenen Niederschlags (v. Hippel und Blechschmidt) gelten.

1) Kohlschütter, Jahrbuch der Radioaktivität 9, 355, 1912.
2) Güntherschulze, Zeitschr. f. Phys. 36, 563, 1926; 37, 868, 1926; 38, 575, 1926.
3) v. Hippel, Ann. d. Phys. Bd. 80, 1926; 81, 1926; Blechschmidt, Ann. d. Phys. Bd. 81, 1926.

Untersucht man dann die Abhängigkeit der Zerstäubung von ihren einzelnen Parametern bei jeweiliger Konstanz der übrigen, so ergibt sich folgendes:

1. Kathodenmaterial. Die Reihenfolge der Elemente, geordnet nach abnehmender Zerstäubungsintensität, ist unabhängig vom Füllgas und von Spannung und Stromstärke:

(C) (As) (Te) (Sb) (Bi) Ag Tl Zn Cu Cn An Au Pb Sn Fe Ni Al Co Mn Mo Cr Mg W Cd Ed Ta (Güntherschulze).

Die eingeklammerten Elemente ergaben abnorm hohe Zerstäubung. Außerdem erstreckte sich bei ihnen der Beschlag auf der Rohrwandung bis zur Anode im Gegensatz zu den folgenden. Bei diesen Versuchen war die Röhre mit H_2 gefüllt. Nun existieren leichtzersetzliche H-Verbindungen der ersten vier Elemente (Wismutwasserstoff wurde hier überhaupt zum ersten Male hergestellt!) und die Zerstäubung vollzieht sich hier auch sekundär, indem die — wie man von den Kanalstrahlenuntersuchungen her weiß — im negativen Glimmlicht gebildeten H-Ionen beim Auftreffen auf die Kathode sich mit den ausgelösten Metallatomen verbinden und diese in den gesamten Gasraum diffundieren, wo sie überall durch Stoß zerlegt werden können, so daß das Metall sich auf der ganzen Rohrwandung und auch auf der Anode niederschlagen kann. Derartige Reaktionen der Gasionen mit dem Kathodenmaterial trüben das Bild der reinen Kathodenzerstäubung. Andererseits zeigen Metalle, die zur Bildung von Oxydschichten neigen, meist eine zu geringe Zerstäubung. Eine Temperaturänderung der Kathode um 500° hat auf die Zerstäubung keinen Einfluß.

2. Gasart. Versuche mit Wasserstoff, Stickstoff und Argon als Füllgas zeigen, daß die Zerstäubung mit zunehmendem Atomgewicht des Gases zunimmt.

3. Kathodenfall. In 10 Metallen in Wasserstoff findet Güntherschulze strenge Proportionalität der Zerstäubung mit dem Kathodenfall bis zu 1800 V. Und zwar schneidet die Gerade, die diese Abhängigkeit graphisch darstellt, die Achse der Kathodenfallwerte im Punkte des normalen Kathodenfalls. As, Sb, Bi zeigen schon beim normalen Kathodenfall beträchtliche Zerstäubung, und zwar in der genannten Reihenfolge abnehmend im Einklang mit der Stabilität der Wasserstoffverbindungen AsH_3, SbH_3, BiH_3; mit zunehmendem Kathodenfall steigen die Kurven an und gehen erst allmählich bei höheren Kathodenfallwerten in Gerade über. An 17 Elementen, gemessen in den Gasen H, N, Ar bis zu 4500 V, findet Blechschmidt, daß die Beschlagsintensität der Auffangplatte mit sinkender Spannung zunächst angenähert proportional zum Kathodenfall abnimmt, sich dann aber *asymptotisch* dem Werte 0 nähert, ohne diesen beim normalen Kathodenfall zu erreichen. In der Tat läßt sich hier eine geringe, nicht mehr meßbare Zerstäubung feststellen. Die Kurven zeigen für alle untersuchten Elemente (unter ihnen Sb und Bi!) in allen drei Gasen denselben Verlauf.

4. Form der Röhre. Stellt man auf die Kathodenfläche Glaszylinder verschiedener Weite, die bis zur Anode reichen, so nimmt die Beschlagsintensität der von der Kathode aufgestellten Auffangplatte zu mit wachsendem Abstand der Gefäßwand von der Zerstäubungsbahn bei gleichbleibender Kathoden- und Anodenfläche. Mit zunehmender Kathoden- und Anodenfläche nimmt die Zerstäubung zu.

5. Abstand Kathode-Anode. Je näher die Anode an die Kathode heranrückt, um so stärker wird die Zerstäubung Q. Sind die Gefäßwände von der Entladungsbahn sehr weit entfernt, so gilt bei planparallelen Elektroden streng

$$Q \cdot c = \text{const.} \tag{1}$$

Stellt man innerhalb des Dunkelraums einen kleinen Schirm auf, so entsteht auf der Kathodenfläche ein entsprechend großer Fleck, von dem aus kein Kathodenmaterial zerstäubt ist, wie man aus der Beschaffenheit der Oberfläche erkennt. Im allgemeinen ist die Kathode nach der Entladung mit feinem, leicht abwischbarem Staub von Kathodenmaterial bedeckt.

Auf Grund dieser Tatsachen kommt man zu folgender Vorstellung von der Kathodenzerstäubung: Die wesentlich im negativen Glimmlicht erzeugten Kationen fliegen ziemlich geradlinig (Schattenwirkung!) auf die Kathode zu und erzeugen durch Aufprall Metallgas, welches von der Kathode hinwegdiffendiert. Das besagt die Gleichung (1). Wenn nämlich ein Gas mit einem gewissen Partialdruck an der Kathode existierte, das an der Anode den Partialdruck 0 hätte, so würde, unter Voraussetzung planparalleler Elektroden, für die von der Kathode zur Anode hinüberdiffundierende Gasmenge Gleichung (1) gelten. Diese Gasmenge ist dem Druck p des Gases, durch das sie diffundiert, umgekehrt proportional. Es gilt somit auch

$$Q \cdot c \cdot p = \text{const.}$$

Die Konstante der Diffusionsgleichung[1]) ist dem Partialdruck des Metallgases an der Kathode und der Diffusionskonstante des Metallgases im Füllgas proportional. Die Menge des gebildeten Metallgases, d. h. sein Partialdruck an der Kathode, ist abhängig von der Aufprallenergie der Kationen, d. h. vom Kathodenfall. Multipliziert man die zu einer Anzahl von Kathodenfallwerten gehörigen Q, c, p-Werte und trägt diese Produkte als Ordinaten zu den betreffenden Kathodenfallwerten V auf, so erhält man eine Gerade. Als Gesetz der zerstäubten Menge pro Amp.-Std. ergibt sich somit

$$Q = \frac{C \cdot V}{c \cdot p} \text{ mg/Amp.-Std.}$$

Die Konstante C hängt nur ab vom Kathodenmaterial und vom Gas. Für Silber in Wasserstoff z. B. ist $C = 0{,}868$. Kennt man C, so läßt sich die Zerstäubungsmenge pro Amp.-Std. für irgendeinen Kathodenfall, Elektrodenabstand und Gasdruck für planparallele Elektroden berechnen. Für andere Elektrodenformen ist diese Berechnung ein reines Diffusionsproblem.

Der auf der Kathode abgelagerte Metallstaub beweist, daß ein Teil der zerstäubten Menge zurückdiffundiert. Das erklärt auch die unter 4. und 5. erwähnten Erscheinungen. Unmittelbar läßt sich das zeigen, wenn man einen dünnen Draht als Kathode nimmt. Je dünner er ist, um so weniger Wahrscheinlichkeit besteht für ein emittiertes Metallatom, ihn wieder zu erreichen. Daher zeigt sich eine starke Zunahme der Zerstäubung mit abnehmendem Drahtdurchmesser. Wird der Drahtdurchmesser von der Größenordnung der freien Weglänge des Metallgases, so findet eine Rückdiffusion überhaupt nicht statt. (Glühlampentechnik.)

1) Z. B. O. E. Meyer, Kinetische Theorie der Gase.

Ein Versuch einer mehr ins Detail gehenden und quantitativen Theorie der Kathodenzerstäubung liegt von v. Hippel vor. Die grundlegende Vorstellung ist die, daß das Kation an der Aufprallstelle einen lokalen Verdampfungsprozeß hervorruft, bereits eine alte Hittorffssche Ansicht. Die Energie des Kations läßt sich leicht angeben, da das Feld nach Messungen v. Aston von der Dunkelraumgrenze, wo es 0 ist, bis zur Kathode linear ansteigt. Da das Glimmlicht die wesentlichste Kationenquelle ist, durchfallen alle Kationen den gesamten Dunkelraum. Das Feld ist so stark, daß die freien Wege zwischen zwei Zusammenstößen in die Feldrichtung umgebogen werden, so daß die Kationen geradlinig in parallelen Bahnen vom Glimmlicht auf die Kathode fallen. Bei einem Zusammenstoß mit einem Molekül verliert das Kation $\frac{1}{4}$ seiner Energie. Die so zu berechnende Aufprallenergie der Kationen hat v. Hippel mit den durch Anlegen eines Gegenfeldes gemessenen Werten verglichen und, entsprechend den Voraussetzungen der Theorie, gefunden, daß die theoretischen Werte Höchstwerte sind, während die mittleren Werte um beträchtliches unter ihnen liegen. Der quantitativen Erfassung des Verdampfungsvorganges liegt folgende Idealisierung zugrunde: Die Aufprallenergie u eines Kations erhitzt einen kleinen Teil der Kathode auf die Temperatur T. Dessen Größe ΔF hängt von der spezifischen Wärme, der Wärmeleitfähigkeit und der Eindringtiefe der Kationen, d. h. von der Gitterstruktur des Kathodenmaterials ab. Über diesem Gebiet soll Sättigungsdampfdruck bestehen während eines Zeitmoments Δt, das so lang ist, daß *die* Zerstäubung erreicht wird, die wirklich statthat. Dann ergibt sich die Anzahl zerstäubter Atome proportional zu $T^{-1} e^{-\frac{q}{RT}} \Delta F \Delta t$, wo q die Verdampfungswärme des Kathodenmaterials ist. Da ΔF und Δt von T implizite abhängen und weiterhin die Funktion $T(u)$ nicht angebbar ist, entzieht sich diese Theorie bis jetzt noch einem beweiskräftigen Vergleich mit der Erfahrung; sie zeigt aber, von welchen Materialkonstanten der Kathode die Zerstäubung abhängt.

Weil sie methodisch interessant ist, sei noch die erste Arbeit von v. Hippel erwähnt, die es sich zur Aufgabe macht, festzustellen, ob die von der Kathode weggehenden Teilchen Atome sind oder größere Komplexe. Wenn es Atome sind, so muß sich ihr Dampfdruck bestimmen lassen. Der Dampfdruck in einem gewissen Abstande von der Kathode läßt sich auf Grund der Diffusionsgleichung aus der Zerstäubung bestimmen. Andererseits findet hier zum ersten Male die Methode einer spektroskopischen Dampfdichtebestimmung Anwendung. Größenordnungsmäßig — und das genügt hier — führen beide Methoden zu demselben Wert, wodurch der atomare Charakter des Staubes erwiesen ist. Die spektroskopische Methode beruht auf folgendem: Die Intensität einer Spektrallinie ν_{ik} ist gegeben durch

$$I = h\nu_{ik} N_k a_{ik},$$

wo N_k die Anzahl der Atome im angeregten k-Zustande, a_{ik} die spontane Übergangswahrscheinlichkeit in den Normalzustand ist. Wenn N Atome überhaupt da sind, so ist

$$N_k = g_k \cdot N \cdot f(k),$$

wo g_k das Quantengewicht und $f(k)$ die Anregungsfunktion; also bei thermischer Stoßanregung $f(k) = e^{-\frac{u_k}{kT}}$. Sind zwei verschiedene Atomarten von den

Anzahlen N und N' vorhanden, so ist das Intensitätsverhältnis zweier entsprechender Spektrallinien ν_{ik} und ν'_{ik}

$$\frac{I}{I'} = \frac{\nu_{ik} g_k N a_{ik} f(k)}{\nu'_{ik} g'_k N' a'_{ik} f'(k)}.$$

Vermeidet man starke Felder und Stöße zweiter Art, so sind Quantengewicht und Übergangswahrscheinlichkeit von den Betriebsbedingungen unabhängig. Sorgt man dafür, daß die Anregungsfunktion für beide Atomarten ungefähr gleich ist und nimmt man zwei entsprechende Spektrallinien von benachbarter Frequenz, so ist näherungsweise

$$\frac{I}{I'} = C \frac{N}{N'}.$$

Wenn das Intensitätsverhältnis der beiden Spektrallinien, die Konstante C und die Anzahl N', d. h. der Druck der einen Atomart bekannt ist, so läßt sich der Dampfdruck der anderen Atomart bestimmen. Alle obigen Forderungen sind am besten erfüllt bei den $1{,}5\,S - 2p_2$ Linien der homologen Elemente Hg und Cd, 2537 und 3261. Cd wurde als Kathode genommen, die Röhre mit gesättigtem Hg-Dampf gefüllt, und das von einer bestimmten Stelle von der Kathode herrührende Spektrum photometriert und die Intensitäten der beiden Linien gemessen.

Hamburg. B. Lammert.

Bücherbesprechungen.

Die Preise der besprochenen Bücher sind nach den Mitteilungen der Verlagsanstalten im Erscheinungsmonat angegeben. Da die Buchhandlungen sich Änderungen vorbehalten, kann keine Sicherheit dafür geboten werden, daß die angegebenen Preise auch heute noch gelten.

F. Breusch, Ziele und Wege des Unterrichts in Mathematik und exakten Naturwissenschaften, I. Mathematik. (Wissen und Wirken, Bd. 35.) 97 S. Karlsruhe i. B. 1926, Braun. Geh. RM 1.80.

Der den Lesern unserer Zeitschrift nicht unbekannte Verfasser tritt in der vorliegenden Schrift lebhaft für die Oberrealschule als das mathematisch-naturwissenschaftliche Gymnasium ein, das neben dem neusprachlich-historischen und dem altsprachlich-humanistischen stehen und „das Studium unserer Produktionsführer vorzubereiten [hat]: Ingenieure, Elektrotechniker, Architekten, Chemiker, Physiker, Geologen und Biologen, Mathematiker". Für den mathematischen Lehrplan fordert er: „ein nennenswertes Stück Kombinatorik, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Fehlerausgleichsrechnung" („im Widerspruch gegen eine derzeit herrschende Strömung"), analytische Geometrie (nicht nur der Ebene), darstellende Geometrie, Infinitesimalrechnung (auch Funktionen mehrerer Veränderlicher). Nicht notwendig sind nach ihm Zahlentheorie, Kettenbrüche und diophantische Gleichungen, kubische, biquadratische Gleichungen („persönlich als Mathematiker bedauere ich das"), synthetische und projektive Geometrie („mit demselben Bedauern"). Als Zeit für das aufgestellte Programm der Oberklassen sind 5 Wochenstunden und dazu 2 Wochenstunden darstellende Geometrie erforderlich.

In den mit kräftigen Strichen ausgeführten Unterrichtsbeispielen fällt stofflich die Bevorzugung der Vektorrechnung und der Determinantenlehre auf.

Die Lektüre des anregenden Schriftchens werde empfohlen.

Göttingen. W. Lietzmann.

Zeitschriftenschau.

Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität. — V. Band, 3. Heft. — B. van der Waerden, Differentialkovarianten von n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten in Riemannschen m-dimensionalen Räumen. — O. Schreier, Die Untergruppen der freien Gruppen. — M. Bauer, Über die Norm eines Ideals. — B. van der Waerden, Ein Satz über Klasseneinteilungen von endlichen Mengen. — W. Blaschke, Zur Geometrie der Funktionen zweier komplexer Veränderlicher I. — E. Hecke, Theorie der Eisensteinschen Reihen höherer Stufe und ihre Anwendung auf Funktionentheorie und Arithmetik. — E. Artin und O. Schreier, Eine Kennzeichnung der reell abgeschlossenen Körper. — E. Sperner, Note zu der Arbeit von Herrn B. L. van der Waerden. — O. Schreier, Die Verwandtschaft stetiger Gruppen im Großen. — E. Artin, Über einen Satz von Herrn J. H. Maclagan. — E. Artin, Zur Theorie der hyperkomplexen Zahlen. — E. Artin, Zur Arithmetik hyperkomplexer Zahlen. — H. Behnke, Über analytische Funktionen mehrerer Veränderlicher II.

Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft. — 26. Jahrg., 1. Stück. — M. Herzberger, Über einige Fragen der geometrischen Optik. — O. Mühlendyck, Über eine Familie dreidimensionaler Somenmannigfaltigkeiten. — O. Mühlendyck, Beitrag zur Differentialgeometrie der regulären dreidimensionalen Somenmannigfaltigkeiten.

Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften. — 33. Jahrg., Nr. 4. — H. Wieleitner, Isaak Newton. — W. Zabel, Über die wissenschaftliche Zuverlässigkeit der mathematischen Schulbuchliteratur. — H. Weinreich, Ein Beispiel für die Befolgung der sokratischen Methode im mathematischen Unterricht.

Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik. — 7. Bd., 1. Heft. — N. K. Bose, Beiträge zur Ärodynamik des Doppeldeckers. — M. Ono, Über die Strömungsvorgänge um Kreiszylinder. — W. Müller, Zylinder in einer unsteten Potentialströmung. — V. Bjerknes, Die atmosphärischen Störungsgleichungen. — H. Fromm, Berechnung des Schlupfes beim Rollen deformierbarer Scheiben. — H. Pollaczek-Geiringer, Über die Gliederung ebener Fachwerke. — O. Föppl, Berechnung der Biegungsschwingungszahl einer Welle, die mit mehreren Lasten behaftet ist. — E. Waelsch, Schraubflächen und Nullsystem in kotierten Rissen.

The American Mathematical Monthly. — Vol. 34, Nr. 2. — E. T. Bel, Successive generalizations in the theory of numbers. — A. Emch, The Value of mathematical models and figures. — S. Gandz, Three interesting terms relating to area. — H. S. Vandiver, The least multiple of an integer expressible as a definite quadratic form.

Mathematics Teacher. — Vol. 20, Nr. 2. — R. Schorling, General Mathematics. — E. R. Bowker, Rigor versus expediency in the proof of locus originals. — W. Beyer, Proof of an original exercise. — G. W. Myers, The arithmetical productiveness of utilitarian, social and scientific ideals: viewed historically. — E. H. Taylor, The use of problems in teaching elementary algebra. — W. A. Snyder, The middle of the road.

Vol. 20, Nr. 3. — G. W. Evans, Some of Euclids algebra. — V. A. Richmond, A number of things for beginners in geometry. — W. D. Reeve, Objectives in teaching intermediate algebra. — J. J. Birch, The problem of algebra instruction. — P. Stroup, Direct cultural motivation for demonstrative geometry.

Annalen der Physik. — IV. Folge, 82. Bd., Heft 2. — Hipp, Ponderomotorische Wirkungen des Schalles auf Luftresonatoren. — T. Engset, Die Bahnen und die Lichtstrahlung der Wasserstoffelektronen. — F. Schmidt und W Zimmermann, Untersuchungen über die Gültigkeit der Stokeschen Regel bei Phosphoren. — G. Borelius und Sven Lindblom, Durchgang von Wasserstoff durch Metalle. — M. Trautz, Die Reibung, Wärmeleitung und Diffusion in Gasgemischen I. — G. Tammann, Über die Schmelzkurve des Heliums. — R. Fleischer, Der Einfluß des Sauerstoffs auf das optische Absorptionsvermögen und die lichtelektrische Elektronenemission des Kaliums. — G. Hoffmann, Über den Elektronenaustritt aus Metallen unter Wirkung hoher Feldstärken. — E. Schrödinger, Über den

Compton-Effekt. — E. Schrödinger, Der Energieimpulssatz der Materiewellen. — Fr. Klingelfuß, Entwicklung einer Exponentialgleichung zur Darstellung des Funkenpotentials nach experimentellen Unterlagen, unter Berücksichtigung einer Elektrodenfunktion.

82. Bd., Heft 3. — E. Salzwedel, Der Einfluß einer Bestrahlung der Kathode mit ultraviolettem Licht auf die selbständige Glimmentladung. — A. Wintner, Über gewisse Eigenschwingungen mit kontinuierlichem Spektrum. — A. Unsöld, Beiträge zur Quantenmechanik der Atome. — E. Frankenberger, Die anomale Dispersion einer Silikatlösung zwischen 50 und 60 cm Wellenlänge. — G. Hoffmann, Das Verhalten von Stoffen verschiedener Ordnungszahl gegenüber der Hesschen Ultra-γ-Strahlung und die Eigenaktivität der Elemente. — J. Kluge, Einfluß des Gasgehaltes auf die Geschwindigkeitsverteilung lichtelektrischer Elektronen bei Platin, Aluminium und Palladium.

82. Bd., Heft 4. — C. H. Johansson und J. O. Linde, Gitterstruktur und elektrisches Leitvermögen der Mischkristallreihen Au-Cu, Pd-Cu und Pt-Cu. — S. Weber, Über die Wärmeleitfähigkeit der Gase. — L. Bergmann, Messungen im Strahlungsfelde einer in Grund- und Oberschwingungen erregten stabförmigen Antenne. — H. Liebster, Über den Widerstand von Kugeln. — R. Wierl, Über die Intensitätsdissymmetrie beim Wasserstoffstarkeffekt. — F. G. Slack, Die Intensitätsdissymmetrie beim Wasserstoffstarkeffekt.

Physikalische Zeitschrift. — 28. Jahrg., 4. Heft. — F. Henning, Ludwig Holborn †. — P. Debye, Wellenmechanik und Korrespondenzprinzip. — A. Schleede und H. Buggisch, Zur Frage der Richtung des „gleichgerichteten" Stromes beim Kristalldetektor.

28. Jahrg., 5. Heft. — W. Hardmeier, Anomale Zerstreuung von α-Strahlen. — J. Dejmek, Zur Theorie der Wirbel. — L. Prandtl, Berichtigung zu Band II des „Handbuchs der Physik". — H. Sack, Über die Dielektrizitätskonstanten von Elektrolytlösungen bei geringen Konzentrationen. — J. Würschmidt, Anfangspermeabilität. — H. Maurer, Die Stromrichtung in Blitzen.

28. Jahrg., 6. Heft. — H. Lüke, Über unipolare Leitung des Bleisulfids. — M. N. Saha und B. B. Ray, Über das Mainsmith-Stonersche Schema des Aufbaus der Atome. — Rehfeld, Reduktion der Trägheitsmomente materieller Systeme auf vier gleiche Punktmassen. — A. Sommerfeld, Zum gegenwärtigen Stande der Atomphysik.

28. Jahrg., 7. Heft. — A. Schmutzer, Über die Verwendung der Geigerschen Spitzenkammer zur Zählung und Reichweitenbestimmung von H-Strahlen. — U. Gerhardt, Über den Polarisationszustand des von Quecksilberteilchen im Dunkelfeld abgebeugten Lichtes. — I. Tichanowsky, Die Bestimmung des optischen Anisotropiekoeffizienten der Luftmoleküle durch Messungen der Himmelspolarisation. — H. Benndorf, Die Erhaltung der Erdladung durch den Blitzstrom. — A. Wigand, Erdladung, Blitzstrom und Niederschlagsstrom.

Zeitschrift für Physik. — 41. Bd., 6. u. 7. Heft. — M. v. Laue u. L. Meitner, Die Berechnung der Reichweitestreuung aus Wilson-Aufnahmen. — O. Klein, Elektrodynamik und Wellenmechanik vom Standpunkt des Korrespondenzprinzips. — G. Beck, Zur Theorie des Photoeffekts. — H. Rademacher und F. Reiche, Die Quantelung des symmetrischen Kreisels nach Schrödingers Undulationsmechanik. II. Intensitätsfragen. — G. I. Pokrowski, Beobachtungsergebnisse über die Lichtzerstreuung in Suspensionen. — A. Larsson, Experimentelle Untersuchung über Brechung und Dispersion der Röntgenstrahlen bei Kristallreflexion in Kalkspat. — G. Kellström, Präzisionsmessungen in der K-Serie der Elemente Palladium und Silber. — I. Wennerlöf, Präzisionsmessungen in der L-Serie des Elements Tantal. — H. Rothe, Eine neue Schaltung zur Messung des Abkühlungseffektes. — R. Seeliger, Zur Theorie des Kathodendunkelraumes. — M. Bodenstein, Oxydation von Phosphordämpfen bei niedrigen Drucken. Bemerkung zur gleichbenannten Abhandlung von Chariton und Walta.

41. Bd., 8./9. Heft. — A. Leu, Versuche über die Ablenkung von Molekularstrahlen im Magnetfeld. — O. Stern, Bemerkungen über die Auswertung der Aufspaltungsbilder bei der magnetischen Ablenkung von Molekularstrahlen. — E. Wrede, Über die magnetische Ablenkung von Wasserstoffatomstrahlen. — P. Ehrenfest und G. E. Uhlenbeck, Zum Einsteinschen „Mischungsparadoxon". —

R. L. Hasche, M. Polanyi und E. Vogt, Spektrale Intensitätsverteilung in der *D*-Linie der Chemilumineszenz des Natriumdampfes. — H. Sponer, Die Absorptionsbanden des Stickstoffs. — F. G. Houtermans, Zur Frage der lichtelektrischen Ionisierung des Quecksilberdampfes. — P. Höflich, Wahrscheinlichkeitstheoretische Begründung der Ergodenhypothese. — B. Quarder, Über Polarisation bei Stoßleuchten. I. — G. I. Pokrowski, Die spektrale Verteilung der Polarisation bei der Zerstreuung des Lichtes in trüben Medien im Hinblick auf das Himmelslicht. — G. I. Pokrowski, Die Isophoten auf einer Kugel. — A. E. van Arkel und P. Koets, Das Wesen der Rekristallisationskerne bei Metallen. — F. Ehrenhaft, Zur Antwort von J. Mattauch auf meine Bemerkungen zu seiner Arbeit „Zur Frage nach der Existenz von Subelektronen". — P. Gruner, Kurze Bemerkung über das Führungsfeld der Quantenmechanik.

41. Bd., 10. Heft. — P. Jordan, Über die thermodynamische Gleichgewichtskonzentration der kosmischen Materie. — A. Güntherschulze, Der Gradient in der positiven Säule der Glimmentladung. I. Stickstoff, Wasserstoff, Neon. — M. Jakob, Ein einfacher Beweis der Ungültigkeit des Daltonschen Gesetzes für wirkliche Gase. — M. Jakob, Über einen Druckeffekt beim Mischen von Gasen. — G. v. Gleich, Der Siriusbegleiter und die Relativitätstheorie. — H. B. Dorgelo und J. H. Abbink, Das „rote" und „blaue" Argonspektrum im äußersten Ultraviolett. — F. M. Penning, Messungen über die Potentialdifferenz zwischen den positiven Schichten in Argon und Neon. — G. Schweikert, Erzwungene Schwingungen unter dem Einfluß angrenzender Lufträume. — W. Nieuwenkamp, Messungen über den Einfluß der Temperatur auf die Lichtabsorption. — N. K. Sur, Über das Bogenspektrum des Zinns. — St. Rybár, Bemerkung zu der Arbeit: „Torsionsmodul und Zugfestigkeit bei Ein- und Vielkristalldrähten" von J. Koenigsberger.

41. Bd., 11./12. Heft. — P. Jordan, Anmerkung zur statistischen Deutung der Quantenmechanik. — A. Jönsson, Eine Ausnahme von den Intensitätsregeln im Röntgengebiet. — F. Simon, Zum Prinzip von der Unerreichbarkeit des absoluten Nullpunktes. — E. Thönnessen, Über die Beeinflussung des Leitvermögens von Cadmium-, Kalium-, Natrium- und Quecksilberjodid in Alkohol- und Acetonlösungen durch Jodzusätze. — G. Wentzel, Über die Richtungsverteilung der Photoelektronen. — K. Przibram, Verfärbung und Lumineszenz durch Becquerelstrahlen. II. — L. S. Ornstein, Zur Theorie der Brownschen Bewegung für Systeme, worin mehrere Temperaturen vorkommen. — Th. Wereide, Die elektrische Doppelbrechung des kolloiden Benzopurpurins. Versuch einer systematischen Untersuchung. — Th. Wereide, Herstellung kolloider Silberhalogene durch Elektrolyse. — W. Geiss und J. A. M. v. Liempt, Das erweiterte Gesetz von Matthiessen. — W. Bothe, Ein Versuch zur magnetischen Beeinflussung des Comptoneffekts. — v. Göler und G. Sachs, Walz- und Rekristallisationstextur regulär-flächenzentrierter Metalle. I. — v. Göler und G. Sachs, Walz- und Rekristallisationstextur regulär-flächenzentrierter Metalle. II. — I. W. Obreimow und L. W. Schubnikoff, Über eine optische Methode der Untersuchung von plastischen Deformationen in Steinsalz. — N. Akulov, Über den Einfluß der stehenden Wellen in dünnen Schichten auf die Photostromstärke. — K. Schaposchnikow, Grundlagen einer Elektronen- und Lichtquanten-Dynamik.

42. Bd., 1. Heft. — L. Vegard und Th. Hauge, Mischkristalle und ihre Bildung durch Kontakt fester Phasen und durch Fällung von Lösungen. — G. Cario, Die Wellenlänge der grünen Nordlichtlinie. — G. Cario und W. Lochte-Holtgreven, Eine neue Lichtquelle zur Anregung von Resonanzspektren. — W. Harries, Über den Energieverlust langsamer Elektronen beim Zusammenstoß mit Molekülen. — H. Schmidt, Über die erzwungenen Schwingungen eines linearen harmonischen Oszillators. — A. Predwoditelew und W. Blinow, Über den Einfluß des Kristallwassers auf den photoelektrischen Effekt in den Kristallhydraten. — A. Fillippov und E. Gross, Über Feinstruktur im Funkenspektrum des Caesiums. — W. Kast, Dielektrische Untersuchungen an der anisotropen Schmelze des para-Azoxyanisols. — G. Beck, Über die Strahlungsreibung in der Quantenmechanik. — W. Anderson, Über die Lichtbrechung im reinen Elektronengas. — W. Kast, Dritte Bemerkung zu der Arbeit des Herrn G. Szivessy: „Zur Bornschen Dipoltheorie der anisotropen Flüssigkeiten."

42. Bd., 2./3. Heft. — F. Hund, Zur Deutung der Molekelspektren. II. — M. Guillery, Über den Bau der sogenannten dritten positiven Stickstoffgruppe. (NO-Banden.) — H. Beining, Zeemaneffekt am Wolfram. — M. Opladen, Die Abhängigkeit des Brechungsexponenten der Gase vom Druck zwischen 1 und 10 Atm. — R. Ritschl, Über den Bau einer Klasse von Absorptionsspektren. — W. Kleinewefers, Neumessungen an Normalen zweiter Ordnung aus dem Bogenspektrum des Eisens von λ 5167 bis λ 6678 Å.-E. — K. Becker, Eine Methode zur Untersuchung der einzelnen Schichten eines Werkstoffes. — K. Becker, Der röntgenographische Nachweis von Kornwachstum und Vergütung in Wolframdrähten mittels des Debye-Scherrer-Verfahrens. — H. Schiller, Über die Natur der dielektrischen Verluste.

Zeitschrift für technische Physik. — 8. Jahrg., 3. Heft. — M. Jakob, Zum 25jährigen Bestehen des Laboratoriums für technische Physik der Technischen Hochschule zu München. — H. Müller, Die experimentelle Bestimmung der Stirn der Wanderwellen. — W. Miehr, Die Methoden zur Untersuchung von feuerfesten Rohstoffen und Erzeugnissen. — A. Klughard, Über die Bestimmung des Glanzes mit dem Stufenphotometer. — W. Fehse, Wolframspiralöfen für sehr hohe Temperaturen.

Die Naturwissenschaften. — 15. Jahrg., 9. Heft. — J. Hellerich, Johann Georg Hagen zu seinem 80. Geburtstag.

15. Jahrg., 10. Heft. — (**Runge**-Heft.) — L. Prandtl, Carl Runge †. — R. Courant, C. Runge als Mathematiker. — F. Paschen, C. Runge als Spektroskopiker. — H. Gieseler und W. Grotrian, Über die Aufstellung eines großen Rowlandschen Konkavgitters nach der Methode von Runge und Paschen. — J. Franck, Über eine Rotverschiebung der Resonanzfluoreszenz durch wiederholte Streuung. — M. Born, Quantenmechanik und Statistik. — H. Kienle, Die Gestalt der kugelförmigen Sternhaufen.

15. Jahrg., 11. Heft. — H. v. Klüber, Das Zeiß-Planetarium. — L. Prandtl, Beitrag zum Härteproblem. — E. Woldering, Zur Frage der Halbzahligkeit des Oszillationsterms. — K. Spangenberg, Lichtbrechungsbestimmungen an den Erdalkaliverbindungen von O, S, Se und Te. — C. Richter, Über das Bogenspektrum des Germaniums. — E. A. Hylleraas, Parameterbestimmung mit Hilfe der optischen Eigenschaften des Kristalls.

15. Jahrg., 12. Heft. — A. Einstein, Newtons Mechanik und ihr Einfluß auf die Gestaltung der theoretischen Physik. — M. v. Laue, Aus Newtons Optik. — E. Zilsel, Über die Asymmetrie der Kausalität und die Einsinnigkeit der Zeit. — A. Wegener, Die Geschwindigkeit großer Meteore. — E. Herlinger, Über Kristallbau und optische Aktivität.

15. Jahrg., 13. Heft. — F. Trendelenburg, Über Schallfeldprobleme.

Zeitschrift für den physikalischen und chemischen Unterricht. — 40. Jahrg., 1. Heft. — W. Bastiné, Seifenhäutchen. — K. Wildermuth, Quantitative Versuche mit Schulelektromagneten. — H. Zeitler, Neue Versuche mit Thermit. — H. Thorade, Einfacher Apparat zur Bewegungslehre. — P. Werner, Zur Anwendung des Maxwellschen Schwungradversuches auf die Pendelbewegung. — F. Berlage, Eine Apparatur zur experimentellen Feststellung der metazentrischen Höhe. — P. Hauck, Die Elektronenröhre als Erzeuger von Hörfrequenzschwingungen. — O. Thomas, Zweihandregel. — A. Sonnefeld, Das Schleifengalvanometer der Firma C. Zeiß. — E. Giebe und A. Scheibe, Leuchtende piezoelektrische Resonatoren.

40. Jahrg., 2. Heft. — K. Metzner, Hermann Hahn zu seinem 70. Geburtstage. — Cl. Schaefer, Grundlagen und Kritik der Ostwaldschen Farbensystematik. — E. Hiedemann, Das Arbeitsbrett. — W. Kramer, Zeichnerische Lösung der Grundaufgaben der mathematischen Erd- und Himmelskunde. — W. Flörke, Einfache Versuche zur Polymorphie. — W. Charbonnier, Das optische Analogon zur Methode des Drehkristalls in der Röntgenspektroskopie. — R. Nelkenbrecher, Die Thoriumröhren. — A. Scheer, Ein neues Hilfsmittel für den erdkundlichen Unterricht.

Naturwissenschaftliche Monatshefte für den biologischen, chemischen, geographischen und geologischen Unterricht. — VII. Bd, der ganzen Folge XXIV. Bd., 3. Heft. — Fr. Foerster, Die ultravioletten Strahlen der Quarzlampen und ihre biologisch-chemischen Anwendungen. — A. Ungerer, Das Episkop und seine Ver-

wendung im Schulunterricht. — M. Herberg, Ein neues Schulmikroskop. — R. Winderlich, Kritisches über das Deutsche Museum.

Das Wetter. — 44. Jahrg., 1. Heft. — A. u. W. Peppler, Dr. Otto Salle †. — H. Voigts, Meteorologie und Wetterkunde in den physikalischen Lehrbüchern für höhere Schulen.

44. Jahrg., 2. Heft. — R. Fischer, Sehr milde und sehr kalte November seit 1826 in Frankfurt a. M. — C. Kaßner, Schneebeseitigung auf dem Fall River Hochpaß in Colorado. — C. Kaßner, Babylonische und assyrische Wetterregeln.

Physik und Chemie (Wien). — 27. Jahrg., 2. Heft. — H. Kellermann, Ein Wellenschreiber. — O. Myrbock, Einige neue Forschungsergebnisse über kosmische Wettereinflüsse. — A. Carraro, Fata morgana inmitten der Großstadt. — R. Beranek, Die drahtlose Bildsendung.

Aus verschiedenen Zeitschriften. — St. Davidovič, Geometrische Ableitung der Formeln für die Umwandlung von $\sin\alpha \pm \sin\beta$ und $\cos\alpha \pm \cos\beta$ in ein Produkt (Zeitsch. f. d. österr. Mittelschulen 8 [1926/27] 1. Heft). — J. Larink, Die Veränderlichkeit der Erdrotation (Die Himmelswelt 37 [1927] Heft 4/5). — D. J. E. Schreck, Het Meraner leerplan, zijn geschiedenis en zijn invloed op het duitsche Wiskunde-Onderwijs (Weekblad voor Gymnasiaal en Middelbaar Onderwijs 1927). — H. Weinreich, Unsere allgemeinbildenden höheren Schulen und die Welt der Technik (V. D. J.-Nachrichten 7 [1927] Nr. 14 u. 15). — L. J. Brueckner, Certain arithmetic abilities of second-grade pupils (The Elementary School Journal Vol. 27 [1927] Nr. 6). — P. Kiesling, Elementarer Beweis eines Satzes von der Kugel (Lehrproben und Lehrgänge 1927, Heft 1). — M. Blume, Physikalischer Unterricht und Praxis (Ebenda).

Sonderschriften. — Zeit- und Schulfragen aus dem Gebiet der Mathematik und Naturwissenschaften (Zacharias, Gauß und die höhere Schule; Stock, Das Problem des Kontinuums bei Leibniz; Friemann, Aus der Werkstätte der funktionalistischen Pädagogik). Fünf Beiträge, den Teilnehmern der Tagung des Deutschen Vereins zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts in Frankfurt a. M. vom 10. bis 14. April 1927 gewidmet, Frankfurt a. M., Diesterweg. — E. Bergfeld, Die Axiome der euklidischen Geometrie, psychologisch und erkenntnistheoretisch untersucht (Neue psychologische Studien, herausgeg. von F. Krüger, III. Bd., 2. Heft, München, Beck, 1927). — Fitting, Die geschlossenen Rösselsprünge des 36-feldrigen quadratischen Brettes (Autographiertes Manuskript).

Neuerscheinungen.[1])

Sammelwerke.

Der mathematische Gedanke. Sterkrade, Osterkamp.

Nr. 3. W. Dieck, Entstehung und Zweck des logarithmischen Rechenschiebers. 22 S. Geh. RM —.80.

Funk-Taschenbuch, herausgeg. vom Funktechnischen Verein. 8°. Berlin, Weidmann. Je RM 2.—.

IV. F. Weichart, Die physikalischen Grundlagen der Rundfunktechnik. 1. Hälfte. 152 S. 1925.

V. F. Weichart, Die physikalischen Grundlagen der Rundfunktechnik. 2. Hälfte. 1. Abt. 126 S. 1926.

VI. F. Weichart, Die physikalischen Grundlagen der Rundfunktechnik. 2. Hälfte. 2. Abt. 167 S. 1926.

Sammlung Göschen. Berlin, de Gruyter. Geb. RM 1.50.

768. L. Bieberbach, Einführung in die konforme Abbildung. 2. Aufl. 130 S. 1927.

953. L. Zipperer, Technische Schwingungslehre I. 111 S. 1927.

1) An dieser Stelle werden alle bei der Schriftleitung einlaufenden Bücher, soweit sie überhaupt den Stoffkreis der Zeitschrift berühren, angezeigt. Eine ausführliche Besprechung der unverlangt einlaufenden Bücher behält sich die Schriftleitung vor. Eine Rücksendung kann in keinem Falle erfolgen.

Die Schriftleitung.

Wissen und Wirken, herausgeg. von E. Ungerer. Karlsruhe i. B., G. Braun. Bd. 36. Fr. Breusch, Der Unterricht in Chemie. 92 S. 1927. Geh. RM 1.80. Bd. 39. Rud. Carnap, Physikalische Begriffsbildung. 65 S. 1926. Geh. RM 1.20.

Mathematische Wissenschaft.

W. Betz, Über Korrelation (Beihefte zur Zeitschr. f. angewandte Psychologie Nr. 3). 2. Aufl. 65 S. Leipzig 1927, Barth. Geh. RM 3.60.

J. L. Coolidge, Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung. Deutsch von F. M. Urban. (Sammlung mathematisch-physikalischer Lehrbücher 24.) 212 S. Leipzig 1927, B. G. Teubner. Geb. RM 10.—.

A. Emming, Eine Umwälzung in der Mathematik und ihren Anwendungen. 76 S. München 1927, Pflaum. Geh. RM 3.20.

F. Enriques, Zur Geschichte der Logik. Deutsch von L. Bieberbach. (Wissenschaft und Hypothese 26). 240 S. Leipzig 1927, B. G. Teubner. Geb. RM 11.—.

O. Perron, Algebra. I: Die Grundlagen. 307 S. Geh. RM 10.—. II: Theorie der algebraischen Gleichungen. 243 S. Geh. RM 8.—. Berlin 1927, de Gruyter.

Revue semestrielle des publications mathématiques. Tome XXXII. 2. Partie. 166 S. Groningen 1927, Noordhoff.

C. Schoy, Die trigonometrischen Lehren des persischen Astronomen Abu'l-Raihan Muh. ibn Ahmad Al-Biruni, dargestellt nach al-Qanum al-Mas' udi, herausgeg. von J. Ruska und H. Wieleitner. 108 S. Hannover 1927, Lafaire. Geh. RM 16.—.

F. Wenner, Praktische Rechenbildkunde (Nomographie). 78 S. Aachen 1926, Verlags-Gesellschaft.

Mathematischer Unterricht.

P. B. Fischer, Rechenbuch. I. Teil: Lehrstoff der Sexta. 5. Aufl. 102 + 14 S. Kart. RM 2.—. II. Teil: Lehrstoff der Quinta. 5. Aufl. 108 + 14 S. Kart. RM 2.20. III. Teil: Lehrstoff der Quarta. 5. Aufl. 86 + 23 S. Leipzig 1927, B. G. Teubner. Kart. RM 2.—.

W. Lietzmann, Mathematisches Unterrichtswerk für höhere Knabenschulen. Leipzig, B. G. Teubner:

W. Lietzmann, Aufgabensammlung und Leitfaden für Arithmetik, Algebra und Analysis. Ausg. A f. gymn. Anst., Unterstufe. 6. Aufl. 220 + 70 S. 1927. Geb. RM 4.80.

——, Dass. für Geometrie. Dies. Ausg. 5. Aufl. 233 + 61 S. 1927. Geb. RM 4.80.

—— und P. Zühlke, Geometrische Aufgabensammlung. Ausg. B f. real. Anstalten, Oberstufe. 4. Aufl. 211 S. 1927. Geb. RM 3.80.

——, Aufgabensammlung für Arithmetik, Algebra und Analysis. Dies. Ausg. 7. Aufl. 242 S. 1927. Geb. RM 4.20.

F. Malsch, Zahl und Raum, Lehr- und Übungsbuch der Mathematik für höhere Schulen. 6. Heft: Geometrie. 3. Teil. 163 S. Leipzig 1927, Quelle & Meyer.

H. Müller, Mathematisches Unterrichtswerk. Neu herausgeg. von E. Kullrich. Leipzig, B. G. Teubner:

E. Kullrich u. C. Tietze, Lehrbuch der Arithmetik, Algebra und Analysis. Unterstufe. 12. Aufl. 64 S. 1926. Kart. RM 1.40.

——, Dass. Oberstufe B. 8. Aufl. 122 S. 1926. Kart. RM 2.60.

——, Lehr- und Übungsbuch der Geometrie. Unterstufe B. 13. Aufl. 177 S. 1927. Geb. RM 3.60.

——, Dass. Oberstufe B. 8. Aufl. 234 S. 1927. Geb. RM 4.60.

Müller-Kutnewsky-Fischer, Aufgabensammlung zur Arithmetik, Algebra und Analysis. Unterstufe. 15. Aufl. 221 S. 1927. Geb. RM 4.20.

——, Aufgabensammlung zur Geometrie. Unterstufe B. 14. Aufl. 196 S. 1927. Geb. RM 4.—.

——, —— Bahrdt, Aufgabensammlung zur Arithmetik, Algebra und Analysis. Oberstufe B. 8. Aufl. 126 S. 1927. Geb. RM 2.40.

H. Oehler und K. Fladt, Lehr- und Übungsbuch der Analysis (Differential- und Integralrechnung). 198 S. Stuttgart 1927, Bong. Geb. RM 5.—.

O. Richter, Leitfaden für den Rechenunterricht. 3. Aufl. 70 S. Leipzig 1927, B. G. Teubner. Kart. RM 1.40.

——, Rechenbuch. I. Teil: Lehrstoff der Klasse VI. 3. Aufl. 102 + 14 S. Kart. RM 2.—. II. Teil: Lehrstoff der Klasse V. 3. Aufl. 108 + 14 S. Kart. RM 2.20. III. Teil: Lehrstoff der Klasse IV. 3. Aufl. 86 + 23 S. Leipzig 1927, B. G. Teubner. Kart. RM 2.—.

K. G. Waldeck u. W. Quast, Mathematisches Unterrichtswerk für Heeres- und Marinefachschulen, Polizeiberufsschulen, Volksschulen und für den Selbstunterricht. Frankfurt a. M., Diesterweg:
1. Teil: K. G. Waldeck, Raumlehre. 1. Bd. 144 S. 1927.
2. Teil: W. Quast: Arithmetik. 1. Bd. 143 S. 1927.

Naturwissenschaften.

P. ten Bruggencate, Sternhaufen, ihr Bau, ihre Stellung zum Sternsystem und ihre Bedeutung für die Kosmogenie. (Naturwissenschaftliche Monographien und Lehrbücher, herausgeg. von der Schriftleitung der „Naturwissenschaften", Bd. 7.) 158 S. Berlin 1927, J. Springer. Geh. RM 15.—.

O. D. Chwolson, Die Physik 1914—1926. Siebzehn ausgewählte Kapitel. Deutsch von G. Kluge. 696 S. Braunschweig 1927, Vieweg & Sohn. Geh. RM 35.—.

E. Freundlich, Das Turmteleskop der Einstein-Stiftung. 43 S. Berlin 1927, J. Springer. RM 3.60.

E. Gehrcke, Handbuch der physikalischen Optik. Bd. II. Erste Hälfte. 418 S. Leipzig 1927, Johann Ambrosius Barth. Brosch. RM 37.50.

K. Hack, Die praktischen und theoretischen Vorteile der eutropischen Spirale. 32 S. Würzburg, Physikochemischer Verlag.

V. F. Heß, Die elektrische Leitfähigkeit der Atmosphäre und ihre Ursachen. (Heft 84/85 der Sammlung Vieweg.) 175 S. Braunschweig 1926, Vieweg. Geh. RM 9.50.

C. W. Schmidt, „Natur und Mensch". Bd. 2: C. Schäffer, W. Gothan, Stromer v. Reichenbach, Das Leben und seine Entwicklung. 563 S. Berlin 1926, de Gruyter. Geb. RM 32.—.

J. H. Schogt, Beginselen der theoretische Mechanica. I. Deel, 198 S. 1927. Geh. f. 3.—. II. Deel, 260 S. Geh. f. 3.75. Groningen, Noordhoff.

Naturwissenschaftlicher Unterricht.

P. Brohmer, Bestimmungstabellen der deutschen Wirbeltiere. Für den Schulgebrauch bearbeitet. 25 S. Leipzig 1927, Quelle & Meyer. Geh. RM 1.—.

O. Gall, Lehrbuch der Chemie und Mineralogie für den Unterricht an höheren Lehranstalten und zum Selbststudium. 1. Teil: Untersekunda. 150 S. Frankfurt a. M. 1920, Diesterweg. Geb. RM 3.20.

J. Gelfert, Technisch-physikalische Rundblicke. Ausgewählte Beispiele aus der Praxis der technischen Physik. 178 S. Leipzig 1927, B. G. Teubner. Geb. RM 4.80.

Grimsehl-Redlich-Schauff, Lehrbuch der Physik für höhere Mädchenbildungsanstalten. Unterstufe. 7. Aufl. 279 S. Leipzig 1927, B. G. Teubner. Geb. RM 4.80.

K. Hahn, Methodik des physikalischen Unterrichts. (II. Band des Handbuches des naturwissenschaftlichen und mathematischen Unterrichts, herausgegeben von J. Norrenberg.) 596 S. Leipzig 1927, Quelle & Meyer. Geb. RM 24.—.

P. Hanck, Physikalische Schülerübungen. 2. Aufl. 95 S. Leipzig 1927, Quelle & Meyer. RM 2.—.

E. Jochmann und A. Klaus, Grundriß der Experimentalphysik zum Gebrauch beim Unterricht an höheren Lehranstalten und zum Selbststudium. Neu bearbeitet von A. Klaus. 20. Aufl. 395 S. Berlin 1927, Winckelmann & Söhne. Geb. RM 6.70.

F. Meinecke, Grundzüge der Geologie. 2. Aufl. 46 S. Leipzig 1926, B. G. Teubner. Kart. RM 1.—.

W. J. Müller, Unterrichtsprobleme in Chemie und chemischer Technologie im Hinblick auf die Anforderungen der Industrie. 17. S. Wien 1927, J. Springer. RM 1.—.

O. Rabes, Hilfsbuch für den biologischen Unterricht. I. Teil: Pflanzenkunde für die Klassen VI—IV. 190 S. Leipzig 1926, G. Freytag. RM 5.—.
——, Dass. II. Teil: Tierkunde für die Klassen VI—IV. 215 S. Leipzig 1926, G. Freytag. RM 6.—.
W. Schwarze, Vorschule der Chemie. 3. Aufl. 201 S. Leipzig 1927, Leopold Voß. Kart. RM 4.—.
K. Smalian, Methodik des biologischen Unterrichts. Berlin 1927, O. Salle.
K. Ströse, Lehrbuch der Chemie und Mineralogie. Bearbeitet von O. Pauli und A. Rücker. 2. Teil: Anorganische Chemie mit Mineralogie, Gesteinskunde und Geologie. 3. Aufl. 307 S. Leipzig 1926, Quelle & Meyer. RM 5.20.

Philosophie, Pädagogik, Allgemeines.

E. Arnhold, Was ich in Palästina sah. 40 S. Breslau 1927, Hirt. Geh. RM —.80.
——, Was ich in China sah. 31 S. Ebenda 1927. Geh. RM —.80.
——, Was ich in Ägypten sah. 39 S. Ebenda 1927. Geh. RM —.80.
L. Friedrich, Festschrift zur 29. Hauptversammlung des Deutschen Vereins zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts zu Frankfurt a. M. 88 S. Frankfurt a. M. 1927, Kesselring.
E. Günther, Hochschule und höhere Schule. (Beihefte der Unterrichtsblätter, Heft 8.) 80 S. Berlin 1927, Salle.
S. Schwarz, W. Weber und J. Wagner, Erdkundliches Arbeitsbuch. Bd. 3. 224 + 48 S. Frankfurt a. M. 1926, Diesterweg. Geb. RM 5.20.
A. W. Unger, Wie ein Buch entsteht. (Aus Natur und Geisteswelt, 1002.) 6. Aufl. 143 S. Leipzig 1927, B. G. Teubner. Geb. RM 3.—.

Eingegangene Lehrmittel und Kataloge.

Adam Hilger, Ltd. London, Bulletin of development covering the twelve months ending June thirtieth, 1926. (London NW 1, 24 Rochester Place.)

200 Jahre Frommann-Verlag (Stuttgart, Stiftstr. 7.)

Catalogue d'ouvrages d'occasion sur les Mathématiques en vente à la Librairie Scientifique J. Hermann. (Paris, rue de la Sorbonne, 6.)

Lustige Ecke.

54. Ernsthafte Frage. Welche Teile eines mit 80 km/st vorwärts fahrenden D-Zuges laufen rückwärts?

55. Mischungsaufgabe. Man hat zwei $^1/_4$ l-Gläser, die beide genau bis zum Eichstrich, das eine mit rotem, das andere mit weißem Wein gefüllt sind. Man nimmt aus dem Glas mit rotem Wein einen Teelöffel voll, schüttet ihn in das Glas mit weißem Wein, rührt gründlich um und nimmt nun wieder einen Teelöffel des Gemisches und tut ihn zu dem roten Wein. Ist jetzt mehr roter Wein in den weißen oder mehr weißer Wein in den roten getan?

Vermischtes. — Sprechsaal.

Feststellung. Ich stelle nur kurz fest, daß die meisten der von Herrn Hofmann in dem Aufsatz „Ein Beitrag zur Einschiebungslehre" (diese Zeitschrift 1926, S. 433 ff.) gefundenen Resultate von mir bereits in derselben Zeitschrift (Jahrgang 1925, S. 4 ff., und zwar im Abschnitt 7 dieser Arbeit) mitgeteilt worden sind.

Die Fundamentalgleichung (1) auf Seite 435 stimmt — von der Bezeichnung abgesehen — genau mit der von mir auf Seite 11 unter (5) mitgeteilten

überein.[1]) Die Form der Gleichung ist bei Herrn Hofmann einfacher: dies tritt jedoch bei der Bestimmung der für Durchführung der Konstruktion notwendigen Stücke nicht wesentlich in Erscheinung, da lediglich das Stück b (vgl. Gl. 8 auf S. 436) einfacher auszurechnen ist als bei mir das α', während die drei übrigen Stücke sich genau entsprechen.

Im übrigen ist es nicht richtig, daß durch „Einschiebung" einer Strecke zwischen zwei Geraden nur „gewisse" Gleichungen 4. Grades (S. 433) sich lösen lassen. Es lassen sich vielmehr *alle* Gleichungen 3. *und* 4. Grades lösen, natürlich mit der Einschränkung: soweit sie reelle Lösungen haben (wie ich in meinem Aufsatz gezeigt habe).

Auch ist es nicht nötig, daß die zur Diskussion stehende Gleichung 3. Grades nicht die Wurzel Null haben darf. (S. 436 unten.) Hat sie das, so wird man aber die kubische Gleichung nicht mit einem Linearfaktor multiplizieren (1926: Gl. 10; 1925: S. 11 Mitte), sondern man wird — in der Bezeichnung von Herrn Hofmann $b = 0$ setzen (in meiner $= \alpha x_i - y_i = 0$ setzen), d. h. der „Führungspunkt" fällt in die eine Gerade hinein. Man vergleicht dann (in meiner Bezeichnung):

$$z^2 - 2x_1 z + (x_1^2 + y_1^2 - c^2) = 0$$

mit

$$z^2 + a_1 z + a_2 = 0$$

und findet

$$x_1 = -\frac{a_1}{2}, \quad c^2 = \frac{a_1^2}{4} + y_1^2 - a_2,$$

d. h. man kann y_1 ganz beliebig wählen, mit der leicht zu erfüllenden Bedingung, daß

$$\frac{a_1^2}{4} + y_1^2 > a_2.$$

Die in den §§ 2—5 von Herrn Hofmann gebrachten Probleme sind auch von mir erledigt, freilich in konzentriertester Form.[2]) Ich habe darüber hinaus den Zusammenhang der Methode des Nikomedes zur Würfelvervierfachung mit der allgemeinen Theorie des Einschiebelineals hergestellt und noch eine einfache Lösung für die Konstruktion des regulären Neunecks angegeben.

Die in § 1 von Herrn Hofmann gegebene Konstruktion des regulären Fünfecks kann sich in meiner Arbeit wegen ihrer grundsätzlich verschiedenen Fragestellung nicht finden. Wird doch beim Fünfeck zwischen Kreis und Gerade eingeschoben, was möglich ist, da Herr Hofmann die Verwendung des Zirkels nicht ausschließt. Ich aber habe in meiner Arbeit das Einschiebelineal ganz für sich betrachtet und die Aufgabe gestellt, seinen Konstruktionsbereich festzustellen, wenn man außer ihm keine weiteren Konstruktionsmittel zuläßt.

Lichterfelde. W. Breidenbach.

Entgegnung. Es sei mir gestattet folgende Bemerkungen zu der „Feststellung" von Herrn Breidenbach hinzuzufügen:

1. Mein Aufsatz ist ein gekürzter Auszug aus dem 5. Kapitel meiner Seminararbeit „Über geometrische Experimente", die ich schon in den ersten Tagen des

1) Leider habe ich seinerzeit einen Druckfehler übersehen: im quadratischen und linearen Glied muß es z statt x heißen. Auf derselben Seite ist in der viertletzten Zeile Fig. 6 statt Fig. 5 zu setzen.

2) Dies geschah seinerzeit auf besonderen Wunsch des Herausgebers dieser Zeitschrift, um Raum zu sparen, der damals noch kostbarer wie heute war.

Januar 1925 abgeschlossen und über deren Ergebnisse — die Einschiebungslehre betonend — ich Mitte Januar im pädagogischen Seminar des Neuen Realgymnasiums und im mathematischen Seminar der Technischen Hochschule München berichtet hatte. Erst im Februar 1925 lernte ich den gehaltvollen Aufsatz von Herrn Breidenbach kennen und nahm ihn noch nachträglich in das meiner Seminararbeit beigegebene Literaturverzeichnis auf.[1]) Beim genauen Studium des Breidenbachschen Aufsatzes überzeugte ich mich davon, daß wir fast gleichzeitig auf verschiedenen Wegen zu wesentlich gleichen Ergebnissen gekommen sind. Jedenfalls steht hiernach fest, daß mein Aufsatz vollständig unabhängig von dem des Herrn Breidenbach ist.

2. Herr Breidenbach bedient sich bei seiner prinzipiellen Untersuchung der Methoden der analytischen Geometrie; diese zu *vermeiden* war gerade das *wesentliche* Ziel meiner Arbeit, didaktische Erwägungen waren für diese — als Prüfungsarbeit dienende — Arbeit ausschlaggebend. Es besteht demnach eine grundsätzlich verschiedene Auffassung über die *methodischen* Hilfsmittel der beiden Abhandlungen. Der methodische Unterschied wird auch damit nicht aus der Welt geschafft, daß einige Zwischenformeln ähnliche Gestalt haben.

Überdies lassen die kurzen Andeutungen von Herrn Breidenbach in seinem Aufsatz nur erkennen, daß *er* das Delische Problem, die Dreiteilung des Winkels und die Seitenteilung des Kreises auf seine Methode zu lösen wußte; *mir* kam es darauf an, die nötigen Hilfsgleichungen möglichst unmittelbar geometrisch abzuleiten und zu zeigen, daß die aus meiner Methode fließenden Konstruktionen mit den von den Griechen überlieferten *identisch* sind.

3. Ganz entschieden muß ich eine leider recht abwegige Bemerkung in der „Feststellung" zurückweisen. Ich glaube in nicht mißverständlicher Weise in § 2, S. 436 gezeigt zu haben, was unter „Lösung *gewisser* Gleichungen 4. Grades" zu verstehen ist. Dieser Ausdruck besagt doch genau das, was Herr Breidenbach „allgemeine Lösung der Gleichung 4. Grades, natürlich mit der Einschränkung: soweit sie reelle Lösungen haben" nennt, ist sprachlich *kürzer*, obendrein *zutreffender* und wird daher allgemein in der modernen Literatur verwendet.

Warum übrigens Herr Breidenbach die Gleichung

$$x^3 + a_1 x^2 + a_2 x = x(x^2 + a_1 x + a_2) = 0$$

mit Gewalt durch Einschiebung lösen will, weiß ich nicht. Seien wir doch froh, daß sich die Wurzel $x = 0$ rational abspalten und der quadratische Ausdruck „in gewissen Fällen" mit Zirkel und Lineal lösen läßt! Einschiebungen sollen ja nur dann angewendet werden, wenn die gewöhnlichen Euklidischen Konstruktionen versagen.

Zum Schluß möchte ich mitteilen, daß mir auch die Teilung des Kreises in 13, 19, 37 gleiche Teile durch Einschiebung gelungen ist; da mir meine Lösung zu umständlich scheint, möchte ich hiermit die genannten Konstruktionen zur allgemeinen Diskussion stellen!

München. J. Hofmann.

1) Da dieses Literaturverzeichnis eine ganze Druckseite beansprucht hätte, habe ich es nicht mit eingeschickt.



Für die Schriftleitung verantwortlich: W. Lietzmann in Göttingen.

Hierzu Beilagen von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin, die der Beachtung der Leser empfohlen werden.
Druck von B. G. Teubner in Leipzig. Ausgegeben am 15. Juni 1927.

ZEITSCHRIFT FÜR MATHEMATISCHEN UND NATURWISSENSCHAFTLICHEN UNTERRICHT ALLER SCHULGATTUNGEN

BEGRÜNDET 1869 VON J. C. V. HOFFMANN



HERAUSGEGEBEN VON
H. SCHOTTEN und W. LIETZMANN
in Halle a. S. in Göttingen
unter Mitarbeit von
W. HILLERS
in Hamburg

58 JAHRGANG. 1927 · 6. HEFT



LEIPZIG · B. G. TEUBNER · BERLIN

Inhaltsverzeichnis des 6. Heftes.

Fortsetzung auf der dritten Umschlagseite

Neue Wege der darstellenden Geometrie.[1])

Von L. Eckhart in Wien.

Die wissenschaftliche Behandlung der darstellenden Geometrie als Zweig der angewandten Mathematik begann mit G. Monges „Géométrie descriptive“ (1795). Er hat die vorhandenen, oft jahrhundertealten Handwerksregeln der Feldmesser, Baumeister, Maler usw. und verschiedene ältere geometrische Tatsachen in ein einheitliches System gebracht, indem er die konsequente Behandlung der Raumgebilde mittels zusammenhängender Auf- und Grundrisse lehrte. Sein Hauptbestreben war die Herstellung des eineindeutigen Zusammenhanges zwischen Raum und Zeichenebene. Seitdem hat sich die Lehrmethode dieses Gebietes nur wenig verändert, Monges Werk ist heute noch für unsere Mittelschullehrbücher vorbildlich. In der ersten Hälfte des neunzehnten Jahrhunderts übte die aufblühende projektive Geometrie ihre Anziehungskraft auch auf die Nachfolger Monges aus. Diese neue Geometrie entsprang der Perspektive, entwickelte sich dann aber selbständig zu einem geschlossenen System, und es ist natürlich, daß sie dann wieder ihren Eingang in die darstellende Geometrie fand, denn sie war das geeignetste Werkzeug für eine strenge Behandlung der damals bekannten Abbildungen. So entstand allmählich eine wissenschaftlich begründete Zentral- und Parallelprojektion mit ihren Sonderfällen. Diese Entwicklung fand mit W. Fiedlers „Die darstellende Geometrie in organischer Verbindung mit der Geometrie der Lage“ (1875) ihren vorläufigen Abschluß. Jetzt waren die Arbeitsmethoden festgelegt, mit denen die Fülle der zum größten Teile aus früherer Zeit stammenden Probleme einer zeichnerischen Erledigung zugeführt wurde.

Die Methoden, die man heute ziemlich allgemein als darstellende Geometrie bezeichnet, sind: Grund-Aufrißverfahren, kotierte Projektion, normale Achsonometrie, Schrägriß, schiefe Achsonometrie, Perspektive und noch einige weniger wichtige Abbildungen. Der Grundgedanke aller dieser Verfahren ist ein sehr einfacher; sie beruhen auf dem Projizieren der Raumpunkte aus einem festen Punkte (der auch unendlich weit sein kann) auf eine feste Ebene, also auf einer geometrischen Idealisierung der Erfahrungen, die der Mensch beim Sehen macht. Daneben spielt noch die Spurendarstellung von Geraden und Ebenen eine untergeordnete Rolle im Zusammenhange mit der Punktdarstellung. So ist es erklärlich, daß bei einem systematischen Aufbau der darstellenden Geometrie in den Lehrbüchern die Grundkonstruktionen unter Voranstellung des einfachen Hauptgedankens mit Hilfe der projektiven oder metrischen Geometrie rasch erledigt

1) Eine Einführung in die neueren Methoden der darstellenden Geometrie gibt das Büchlein: L. Eckhart, Konstruktive Abbildungsverfahren. Wien 1926, J. Springer.

werden können und nun reichlich Raum für die Anwendungen bleibt, deren Reihe allerdings schier unübersehbar ist. Dafür steht ja neben den typischen Aufgaben der darstellenden Geometrie das Gesamtgebiet der Geometrie zur Verfügung und je nach dem Zweck, den ein Buch verfolgt, wird bald das eine, bald das andere Teilgebiet stärker herangezogen. Wenn es auch sicher nötig ist, daß möglichst viele Probleme zeichnerisch behandelt werden und daß der Praktiker das für ihn nötige konstruktive Rüstzeug an die Hand bekommt, so muß dabei doch der Eindruck entstehen, daß die darstellende Geometrie dann eigentlich keine eigene Wissenschaft, sondern mehr ein technisches Verfahren ist, denn ihr wissenschaftliches Eigenleben erscheint sehr dürftig. Diese Meinung ist tatsächlich bei denen sehr verbreitet, die einmal die darstellende Geometrie im Unterrichte an einer Mittel-, Gewerbe- oder Technischen Hochschule kennengelernt haben. Ja, selbst bei Mathematikern, die nicht gerade Fachleute auf diesem Gebiete sind, findet man immer wieder diese Ansicht. Sie wird gestützt durch die Tatsache, daß in den letzten Jahrzehnten ein deutlicher Stillstand eingetreten ist; dafür spricht auch, daß die Methodik dieses Gegenstandes vollkommen ausgebaut ist und daß nach dem jetzigen Stande scheinbar nichts Wesentliches mehr hinzuzufügen ist.

Wenn man die genannten, also herkömmlichen Abbildungen ins Auge faßt, so ist wirklich zu konstatieren, daß der Grundgedanke eigentlich ausgeschöpft ist. Doch hat erfreulicherweise die neuere Zeit gezeigt, daß die darstellende Geometrie doch einer wissenschaftlichen Weiterentwicklung fähig ist, ja, daß alle Hoffnung besteht, daß sie am Beginne einer neuen Entfaltung steht. Diese vollzieht sich durchaus im Sinne des von Monge vorgezeichneten Programms, das allerdings nicht mehr so enge, wie es bisher geschah, aufgefaßt werden kann, sondern mit dem allgemeinen Abbildungsgedanken erfüllt werden muß. Damit eröffnet sich sofort eine neue Aussicht, und der Zweck dieser Zeilen soll sein, diese so gut als möglich aufzuzeigen.

Monge umschrieb den Wirkungsbereich der darstellenden Geometrie, wenn auch nicht wörtlich, so dem Sinne nach: Beherrschung der Raumgebilde vermittels geeigneter Konstruktionen in der Zeichenebene. Damit dachte er in erster Linie wohl an die euklidischen Gebilde, die mittels des Grund-Aufrißverfahrens durch Konstruktionen mit Lineal und Zirkel in der Zeichenebene zu behandeln sind. Will man nun zuerst die gebräuchlichen Abbildungen schärfer fassen, so muß man sich über folgendes im Klaren sein: über die räumlichen Elemente, die zur Darstellung gelangen (wir nennen sie Objektelemente), über die Elemente, die zur Darstellung in der Zeichenebene verwendet werden (Bildelemente) und über die Art des Zusammenhanges zwischen Objekt und Bild (Abbildung im engeren Sinne). Man sieht dann sofort, daß in der gewöhnlichen darstellenden Geometrie als Objektelemente Punkte, Geraden oder Ebenen zur Verwendung kommen. Natürlich sind dabei die Grundelemente gemeint; so läßt man z. B. Kurven aus Punkten, Kegel aus Geraden usw. entstehen. Die Bildelemente sind stets Punkte oder Gerade, nämlich die verschiedenen Projektionen von Raumpunkten und -geraden, Spuren von Ebenen, Spur- und Fluchtpunkte von Geraden usw. Man erkennt auch, daß verschiedene Verfahren miteinander verquickt sind; z. B. ist die Grund-Aufrißdarstellung der Raumpunkte im Wesen unabhängig von der Spurendarstellung der Ebenen, und doch werden beide miteinander verwendet. Man hat es also

schon in diesem einfachsten Falle mit zwei Abbildungen zu tun, nämlich mit der Abbildung der Raumpunkte auf gewisse Punktepaare (Grund- und Aufriß) und der Ebenen auf gewisse Geradenpaare (erste und zweite Spur). Theoretisch ist also jede der beiden Abbildungen für sich zu untersuchen, ihre gemeinsame Verwendung ist dann Sache des Bedarfes und der Praxis. Will man die Raumgebilde nicht aus Punkten oder aus Ebenen entstehen lassen, faßt man also die Raumgerade als Objektelement auf, so bietet das Spur- und Fluchtpunktverfahren der zentralen Projektion ein Beispiel für die Abbildungen der Geraden auf Punktepaare in der Zeichenebene.

Schon diese kurze Zergliederung zeigt, daß genug Anlaß vorhanden ist, die gewöhnlichen Abbildungen theoretisch zu untersuchen, d. h. die verschiedenen Verfahren reinlich voneinander zu trennen und sie einem möglichst hohen Gesichtspunkte unterzuordnen. Die ersten in diese Richtung fallenden Arbeiten stammen von G. Hauck (ab 1883), der als erster einen allgemeineren Standpunkt einnahm. Doch blieben seine Ideen lange unbeachtet und erst die Arbeiten von E. Müller zeigen eine konsequente Durch- und Weiterbildung seiner Gedanken.

Aber auch nach einer anderen Richtung zeigte sich die darstellende Geometrie erweiterungsfähig. 1882 erschien W. Fiedlers „Cyklographie“, in der er die Abbildung der Punkte des Raumes auf Kreise in der Ebene lehrte. Allerdings war der Zweck dieser Abbildung nicht, die Raumverhältnisse durch Konstruktionen mit Kreisen wiederzugeben, sondern umgekehrt die Probleme der Kreisgeometrie auf bekannte und anschauliche Aufgaben der euklidischen Raumgeometrie zurückzuführen. Auch diese umfangreiche und gründliche Zyklographie Fiedlers blieb ziemlich unbekannt, bis sie wiederum E. Müller in Wien in seinen Vorlesungen aufnahm und sie in moderner Fassung außerordentlich weit führte.

Den Stand der landläufigen darstellenden Geometrie gibt der Enzyklopädieartikel von E. Papperitz (III AB 6, Darstellende Geometrie, 1909) wieder, wo die Arbeiten Haucks und die Zyklographie Fiedlers bloß ganz kurz gestreift werden; auch ist von einem allgemeineren Abbildungsgedanken hier noch keine Rede. Es ist das Verdienst E. Müllers, einen solchen hervorgehoben und nachdrücklichst vertreten zu haben. Diese Idee zeitigte auch bald neue Früchte: die neueste Zeit hat nämlich eine Reihe von Arbeiten gebracht, in denen neue Abbildungen studiert wurden, die sich weit von der bisher bekannten darstellenden Geometrie entfernen. Es wurden neue, bisher nicht behandelte Raumelemente zur Darstellung herangezogen und auch mit neuen Methoden konstruktiv behandelt; auch der Zusammenhang zwischen Raum- und Bildelementen war zumeist ein neuer. Wenn auch diese Arbeiten zuerst nur Interesse vom Standpunkte der theoretischen Geometrie oder einer analytischen Abbildung erregten, so zeigte sich alsbald, daß man mit Hilfe dieser neuen Abbildungen auch wirklich zeichnen und somit neue Gebiete durch Konstruktionen in der Zeichenebene zugänglich machen konnte. Diese Möglichkeit charakterisierte alle diese Abbildungen und es war nur natürlich, daß sie in der darstellenden Geometrie als der dazu geeignetsten Wissenschaft Eingang fanden.

Es machte sich daher bald das Bedürfnis geltend, die neuesten, oft nebeneinander herlaufenden Arbeiten zu sichten und damit gleichzeitig eine Revision des Prinzips der darstellenden Geometrie nach dem heutigen Stande durch-

zuführen. Wenn auch derzeit eine Umgrenzung des Arbeitsgebietes der darstellenden Geometrie sicher noch nicht vollständig möglich ist, und es auch nicht angemessen erscheint, einer Wissenschaft Richtlinien für ihre zukünftige Entwicklung vorzuschreiben, so kann man nach dem jetzigen Stande wohl angeben, was man zur darstellenden Geometrie zählen kann, ohne daß damit ihre Hauptaufgabe zurückgedrängt wird. Daran muß man wohl festhalten, daß in der Hauptsache nur Konstruktionen in einer Ebene zuzulassen sind, denn das ist die bequemste Art, geometrische Gedanken auszudrücken und zu vermitteln. Dadurch ist die Art der Bildelemente eingeschränkt: es können nur ebene sein. Die Art der Objektelemente dagegen soll gänzlich willkürlich sein, es soll ja möglich werden, irgendwelche Raumelemente zeichnerisch zu behandeln. Es wird also an der von Monge vorgezeichneten Aufgabe, der direkten Konstruktion unzugängliche Gebilde durch Konstruktionen in der Zeichenebene zu beherrschen, festgehalten, allerdings geschieht dies mit neuen Mitteln. Der alte Gedanke wird zwar beibehalten, aber mit neuem Leben erfüllt.

In Verfolgung dieses Gedankens kann man dem Begriffe einer darstellend-geometrischen Abbildung (diese unschöne, aber sachlich richtige Bezeichnung sollte durch eine bessere ersetzt werden) die nachstehende Fassung geben. Gegeben ist eine Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ irgendwelcher Art (Objektmannigfaltigkeit) und eine Menge $\mathfrak{N}$ geometrischer Elemente in der Zeichenebene Π (Bildmannigfaltigkeit) und zwischen beiden irgendein Zusammenhang, der den Elementen von $\mathfrak{M}$ bestimmte Elemente von $\mathfrak{N}$ zuordnet und umgekehrt. Dies allein genügt natürlich noch nicht, denn damit hätte man bloß eine gewisse Zuordnung (Abbildung), die der praktischen Konstruktion in Π noch nicht zugänglich zu sein braucht. Daher müssen die Elemente von $\mathfrak{N}$ solche sein, mit denen sich wirklich arbeiten läst, andrerseits müssen aber auch gewisse elementare Beziehungen der Elemente innerhalb $\mathfrak{M}$ sich durch ausführbare Konstruktionen innerhalb $\mathfrak{N}$ zu erkennen geben. Nun gibt es aber keine Norm, die festlegt, mit welchen Elementen man in Π konstruieren kann und welche Konstruktionen als ausführbar betrachtet werden können. Dies hängt von den Werkzeugen ab, mit denen der Konstrukteur operieren will. Im allgemeinen wird man wohl an der Forderung festhalten, daß Lineal und Zirkel gebraucht werden sollen; damit hat man eine weitere Einschränkung, denn dann können als Bilder nur Punkte, Gerade oder Kreise oder aus diesen zusammengesetzte Elemente verwendet werden, andrerseits müssen wenigstens die Elementaraufgaben auf Konstruktionen höchstens zweiten Grades führen, damit man sie mit Zirkel und Lineal lösen kann. Für die Praxis wird man noch die weitere Forderung zu stellen haben, daß die grundlegenden Konstruktionen in Π nicht nur „geeignet", sondern auch „möglichst einfach" sein sollen. Auch dieser Begriff ist relativ und nicht exakt zu fassen. Trotz der genannten Einschränkungen ist das so erweiterte Feld der darstellenden Geometrie noch ein äußerst großes und eine Reihe der damit aufgeworfenen Fragen harrt noch der Erledigung. Man könnte dieses neue Gebiet als „höhere darstellende Geometrie" bezeichnen, oder, wie ich vorgeschlagen habe, als „Konstruktive Abbildungsverfahren".

Nunmehr erweist sich die Herstellung einer solchen Abbildung als ein gänzlich unbestimmtes Problem. Hat man auch die darzustellende Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ vorgegeben, so hat man die Wahl der Bildelemente und der Ab-

bildungsart noch vollständig frei. Damit ist die Schwierigkeit aufgezeigt, die entsteht, wenn man eine Abbildung bestimmter Objektelemente aufstellen will, damit sie allen Ansprüchen genügt. Man ist heute noch weit entfernt davon, eine solche Aufgabe systematisch lösen zu können, doch ist es in der Zukunft wohl denkbar, daß sich der Mathematiker, Physiker, Techniker oder Naturwissenschaftler an den Abbildungsgeometer wendet, um von ihm eine geeignete Abbildung für einen bestimmten Zweck zu erhalten. Es besteht hier eine gewisse Analogie mit der analytischen Geometrie. Will man nämlich ein Problem wirklich durchführen, so hat man die Wahl zwischen der Rechnung und der Konstruktion. Für die Rechnung stellt die analytische Geometrie ihre verschiedenen Koordinatensysteme bereit, aus denen man das geeignetste, d. h. für die betreffende Aufgabe naturgemäßeste auszuwählen hat, um eine zweckmäßige und elegante Lösung möglich zu machen. Eine ähnliche Aufgabe könnte der darstellenden Geometrie für die konstruktive Seite zufallen; auch hier ist es durchaus nicht gleichgültig, welche Abbildung man wählt. Wollte man z. B. in einem bestimmten Falle blindlings mit Auf- und Grundriß arbeiten, so wäre man eben ähnlichen Schwierigkeiten ausgesetzt, wie wenn man sich bei der Rechnung auf Cartesische Koordinaten beschränken wollte, ohne sich vorher über die Zweckmäßigkeit dieser Wahl Gewißheit verschafft zu haben. Es wird also bei jedem Problem, insbesondere aber bei der konstruktiven Behandlung eines ganzen Gebietes, der eigentlichen Lösung eine Überlegung über die zu verwendende Abbildung voranzugehen haben. Daher kann es wohl als die nächste Aufgabe der darstellenden Geometrie bezeichnet werden, einen nicht zu kleinen Vorrat von Abbildungen anzulegen, sowie man auch in anderen Zweigen der Mathematik auf Vorrat arbeitet. Zum Teile sind von verschiedenen Seiten her Ansätze vorhanden; auch ist es gelungen, einige voneinander getrennt aufgefundene Abbildungen unter einem höheren Gesichtspunkte zu vereinigen, vereinzelte größere Gruppen von Abbildungen aufzustellen, vieles ist dagegen noch unausgebaut.

Die folgenden Zeilen sollen nun in großen Zügen den gegenwärtigen Stand der Wissenschaft wiedergeben, wobei auf Namen und Literaturangaben verzichtet werden soll. Für diesen Zweck sei auf das eingangs zitierte Buch, das zum ersten Male eine Gesamtübersicht gibt, verwiesen.

Einer beliebigen Abbildung kann man analytisch die folgende Fassung geben: die Objektmannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ bestehe aus irgendwelchen, gleichartigen Elementen und sei m-dimensional, d. h. jedes ihrer Elemente sei durch die Koordinaten $x_1, x_2, \ldots, x_m$ irgendwelcher Art bestimmt, ferner sei die Bildmannigfaltigkeit $\mathfrak{N}$ in Π n-dimensional und habe die Koordinaten $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$. Eine Zuordnung zwischen den Elementen von $\mathfrak{M}$ und denen von $\mathfrak{N}$ sei durch eine Anzahl von Gleichungen in den Koordinaten $x_1, \ldots, x_m, \xi_1, \ldots, \xi_n$ gegeben, die wir Abbildungsgleichungen nennen. Der Einfachheit halber wollen wir fordern, daß jedem Element von $\mathfrak{M}$ ein einziges Element von $\mathfrak{N}$ entspricht (aber nicht umgekehrt), so daß wir dann die Abbildungsgleichungen schreiben können

$$\xi_i = \varphi_i(x_1 x_2 \ldots x_m), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{1}$$

worin die φ_i eindeutige und analytische Funktionen sein sollen. Dabei brauchen — und das ist tatsächlich oft der Fall — die Dimensionszahlen m und n durchaus nicht übereinzustimmen. So z. B. gibt schon die gewöhnliche Zentral-



projektion der Raumpunkte auf die Bildebene Π eine Abbildung des dreidimensionalen Punktraumes auf das zweidimensionale Punktfeld; wenn auch zu einem Bildpunkt nicht mehr ein einziger Raumpunkt gehört, sondern ihm unendlich viele zugeordnet sind, so ist es trotz dieser Unbestimmtheit doch möglich, die Hauptgesetze dieser Abbildung herzuleiten. Ein anderes Beispiel liefert das Grund-Aufrißverfahren: hier ist der dreidimensionale Punktraum auf das vierdimensionale Feld der Punktepaare abgebildet; allerdings sind die Bildpunktpaare nicht mehr ganz willkürlich, sondern es müssen zusammengehörige Bilder auf den Ordnungsstrahlen (Normalen zur Rißachse) liegen.

Spezialisiert man nun die Gleichungen (1) hinsichtlich der Mannigfaltigkeiten und deren Koordinaten, so gelangt man zu großen Gruppen von Abbildungen, die wieder nach der Art der Funktionen φ in besondere Untergruppen zerfallen. Bei gegebenen Abbildungsgleichungen ist es nun die wichtigste Aufgabe, die Haupteigenschaften dieser Abbildungen herzuleiten, ferner den geometrischen Zusammenhang zwischen Objektraum und Bildebene aufzusuchen, für die Grundkonstruktionen innerhalb $\mathfrak{M}$ die entsprechenden Konstruktionen mit den Bildern aufzustellen und schließlich anzugeben, welche Gebilde in der Zeichenebene angenommen werden müssen, um die Abbildung festzulegen. Hat man eine Abbildung geometrisch gegeben, so sind zur Untersuchung natürlich keine Gleichungen nötig, da man das Weitere rein geometrisch finden kann. Anders ist es aber, wenn Abbildungsgleichungen vorliegen, dann muß man eben erst die analytische Abbildung in eine geometrische umsetzen und kann dann weiter beliebig verfahren, um zu den Grundkonstruktionen zu gelangen; letztere sind natürlich das Ziel einer jeden Untersuchung, denn damit wird die Abbildung erst brauchbar. Die Abbildungsgleichungen spielen eine wichtige Rolle in der Theorie, denn dadurch konnte der Standpunkt der Untersuchungen verlegt werden: war man bei reingeometrischer Betrachtungsweise genötigt, die darstellende Geometrie sozusagen von unten aufzubauen, d. h. von den Einzelfällen schrittweise zu höheren Einsichten emporzusteigen — so verlief die historische Entwicklung, so kann man jetzt mit Hilfe der Abbildungsgleichungen vom Allgemeinsten zum Besonderen herabsteigen. Die Abbildungsgleichungen geben nicht nur einheitliche Formeln für verschiedene, bisher getrennt nebeneinander laufende Abbildungen, sie sind auch ein wirksames Forschungsmittel, um den Kreis der bekannten Abbildungsmethoden systematisch zu erweitern. Leider kann ihre Funktion in der Abbildungstheorie und das Arbeiten mit ihnen hier nicht gezeigt werden. Um Mißverständnissen vorzubeugen, sei nur gesagt, daß dadurch die darstellende Geometrie absolut nicht in der analytischen Geometrie aufgeht, es werden nur die analytischen Methoden so wie in vielen anderen Gebieten der Mathematik für die Theorie verwendet; die Praxis erhält doch schließlich die geometrischen Konstruktionsgedanken.

Die bekanntesten Abbildungen betrachten den Punktraum als Objekt. Schon hier setzt die allgemeine Betrachtung ein. Beschreibt ein Punkt im Raume eine Kurve, so verlangt man von ihrem Bilde in erster Linie, daß es einen ähnlichen Eindruck mache wie das Raumgebilde selbst, daß es also zumindest wieder eine Kurve wird. Man gelangt dabei zur Abbildung der Raumpunkte auf die Punkte in Π. Wegen der schon hervorgehobenen Verschiedenheit der Dimensionen von Objekt- und Bildmannigfaltigkeit genügt es nicht, einem Raumpunkt nur einen Bildpunkt zuzuordnen, wenn der Raumpunkt durch sein Bild auch

bestimmt sein soll. Man wird es also mit zwei Bildpunkten versuchen. Ist z. B. im Raum irgendein rechtwinkliges Koordinatensystem gegeben, in welchem ein Punkt p die Koordinaten x, y, z hat, sind ferner in Π die Punkte durch rechtwinklige Koordinaten bezüglich eines Systems $[\xi, \eta]$ festgelegt, so soll $p(x, y, z)$ die Bildpunkte $p'(\xi', \eta')$ und $p''(\xi'', \eta'')$ haben. Wir fassen jetzt die Punkte p', p'' zu einem Paare zusammen, so daß als Bildelemente die Punktepaare von Π auftreten; die Bildmannigfaltigkeit ist jetzt also vierdimensional, da jedes Element durch die vier Koordinaten $\xi', \eta', \xi'', \eta''$ bestimmt wird. Man kann die Abbildungsgleichungen allgemein ansetzen

$$\begin{aligned} \xi' &= \varphi_1(xyz), \quad \xi'' = \varphi_2(xyz) \\ \eta' &= \psi_1(xyz), \quad \eta'' = \psi_2(xyz). \end{aligned} \tag{2}$$

Zu jedem beliebigen p gehört ein bestimmtes Paar $p'p''$, umgekehrt aber können p' und p'' nicht beliebig angenommen werden, da ja die Variablen x, y, z vier Gleichungen genügen müssen. Es muß also zwischen den Koordinaten von $p'p''$ stets eine Beziehung

$$\Phi(\xi'\eta'\xi''\eta'') = 0 \tag{3}$$

existieren, die durch Elimination von x, y, z aus den Gleichungen (2) entsteht. Die Bildpunktpaare sind also der Einschränkung $\Phi = 0$ unterworfen, welche besagt, daß, wenn p' gewählt wird, p'' nur mehr auf einer bestimmten Kurve sein kann und umgekehrt. Läßt man p eine Gerade G durchlaufen, so erfüllen die Bildpunkte i. allg. zwei getrennte Kurven G' und G'', die als Bilder von G anzusehen sind. Nun kann man fordern, daß G' und G'' stets ebenfalls Gerade werden sollen; in diesem Falle nennen wir die Abbildung (2) linear. Stellt man nunmehr einen ebenflächigen Körper durch seine Kanten dar, so werden die beiden Bilder wegen der Linearität einen ähnlichen Eindruck wie der Körper selbst hervorrufen, und wir sprechen in diesem Falle daher von einem Zweibilderverfahren. Die Abbildungsgleichungen (2) erhalten hierfür dann die spezielle Form

$$\begin{aligned} \xi' &= \frac{a_1 x + a_2 y + a_3 z + a_4}{c_1 x + c_2 y + c_3 z + c_4}, \quad \xi'' = \frac{\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z + \alpha_4}{\gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z + \gamma_4} \\ \eta' &= \frac{b_1 x + b_2 y + b_3 z + b_4}{c_1 x + c_2 y + c_3 z + c_4}, \quad \eta'' = \frac{\beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z + \beta_4}{\gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z + \gamma_4}. \end{aligned} \tag{4}$$

Die Untersuchung dieser Abbildung liefert für den allgemeinsten Fall des Zweibilderverfahrens den folgenden geometrischen Zusammenhang: gegeben sind im Raume zwei Punkte o_1 und o_2, ferner zwei Hilfsebenen π_1 und π_2; die Raumpunkte werden von o_1 nach π_1 und von o_2 nach π_2 projiziert, wodurch man zwei einfache Zentralprojektionen in zwei Ebenen erhält (etwa wie zwei verschiedene photographische Aufnahmen ein und desselben Gegenstandes). Werden nun die Ebenen π_1 und π_2 punktweise kollinear auf die Zeichenebene Π bezogen, so erhält man auf diese Art von jedem Raumpunkte die gesuchten zwei Bildpunkte. Dieses allgemeine Verfahren kann man vereinfachen, indem man die Ebenen π_1 und π_2 samt den darin liegenden Zentralprojektionen von einem dritten Augpunkt o aus auf Π projiziert. Es ist sofort einzusehen, daß eine Gerade zwei Gerade zu Bildern hat, daß hier also die Geraden des Raumes auf Geradenpaare in Π abgebildet werden. Es zeigt sich weiter, daß alle bekannten gebräuchlichen Punktdarstellungen Sonderfälle des Zweibilderverfahrens sind,

wozu man nur den Punkten o, o_1, o_2 und den Ebenen Π, π_1, π_2 besondere Lagen zueinander anzuweisen hat. Dies ist gleichbedeutend mit einer Spezialisierung der Koeffizienten in (4) bei besonderen Lagen der Koordinatensysteme. Es gibt natürlich in jedem besondern Falle eine analoge Eliminationsgleichung wie (3), welche das zu verwendende Bildpunktpaarsystem einschränkt; es sei nur an die bei den Abbildungen auftretenden Ordnungsstrahlen erinnert. Es ist nun auch erklärlich, warum die Lagenaufgaben in allen gewöhnlichen Abbildungen mit denselben Linien gelöst werden können; sie sind ja nur spezielle Fälle der allgemeinen projektiven Abbildung (4). Die Maßaufgaben sind in den einzelnen Abbildungen verschieden zu behandeln, d. h. wenn man sich auf elementare Überlegungen beschränken will. Faßt man aber die Maßaufgaben von einem höheren, projektiven Standpunkte wieder als Lagenaufgaben auf, so ist wohl denkbar, daß bei geeigneten Festsetzungen wieder für alle speziellen Abbildungen dieselben Konstruktionsprinzipien gelten.

Die Gleichungen (4) führen uns auf neue Abbildungen, wenn wir die darin befindlichen zwei Reihen von Variabeln als Koordinaten anderer Elemente — sowohl im Raum, als auch in Π — deuten. Aus den vielen Möglichkeiten sei nur die herausgegriffen, wo $\xi', \eta', \xi'', \eta''$ Linienkoordinaten von je zwei Geraden, also von Geradenpaaren in Π und x, y, z Plückersche Ebenenkoordinaten bedeuten. Wir erhalten dann eine Abbildung der Ebenen auf die Geradenpaare in Π; sie ist dual zum Zweibilderverfahren hinsichtlich der auftretenden Elemente. Geometrisch ist sie herstellbar, wenn man zwei Hilfsebenen π_1 und π_2 nimmt und zwischen ihnen und Π Kollineationen festlegt; jede Ebene schneidet dann π_1 und π_2 nach je einer Geraden, deren kollinear entsprechende Geraden in Π eben die gesuchten Bildgeraden sind. Wegen der Verwendung der Spuren von Ebenen auf π_1 und π_2 nennt man diese Abbildung das Zweispurenverfahren. Dieses ist ebenfalls linear, d. h. beschreibt eine Ebene ein Büschel, so erzeugen die Bildgeraden je ein Strahlbüschel in Π. Dadurch werden die Raumgeraden (als Träger von Ebenenbüscheln) auf Punktepaare in Π (als Träger von zwei Strahlbüscheln) abgebildet. Eine Vereinfachung der Abbildungen tritt ein, wenn man von jeder Ebene die Spuren in π_1 und π_2 aufsucht und diese aus einem beliebig gewählten Augpunkte o auf Π projiziert. Dieses Zweispurenverfahren kann mit dem Zweibilderverfahren gekoppelt werden; am einfachsten so, wenn man für beide Darstellungen dieselben Gebilde o, π_1, π_2 verwendet. In dieser Weise findet auch das Zweispurenverfahren bei einigen gewöhnlichen Abbildungen Verwendung.

Zu neuen Ergebnissen gelangt man weiter, wenn man nur ein Paar der allgemeinen Gleichungen (2) näher betrachtet. Wir bilden die Raumpunkte $p(x, y, z)$ auf einzelne Bildpunkte $p'(\xi, \eta)$ in Π mittels der Gleichungen

$$\begin{aligned} \xi &= \varphi(xyz) \\ \eta &= \psi(xyz) \end{aligned} \tag{5}$$

ab. Die Abbildung ist nur vom Raum zur Zeichenebene eindeutig, umgekehrt aber gibt es zu einem gewählten Bildpunkte p' unendlich viele Raumpunkte p, die alle im allgemeinen auf einer Raumkurve $\varphi - \xi = 0$, $\psi - \eta = 0$ liegen. Trotz dieser Unbestimmtheit führen die Gleichungen (5) auf bemerkenswerte Tatsachen. Sucht man zu allen Punkten p' von Π die dazugehörigen Raumkurven, so erhält man deren ∞^2, die eine sogenannte Kurvenkongruenz bilden. Der

Raum ist mit diesen Kurven erfüllt, derart, daß im allgemeinen durch einen Raumpunkt p nur eine Kurve des Systems geht, und daß jeder solchen ein ganz bestimmter Punkt p' in Π auf irgendeine Weise zugeordnet ist. Wir erhalten damit eine Verallgemeinerung der Sehstrahlen der Perspektive. Die „Sehstrahlen" sind eben jetzt krummlinig und die Bildpunkte sind statt deren Spurpunkte in Π irgendwie anders zugeordnete Punkte. Die Raumpunkte werden hiermit mittels einer krummen Sehstrahlenkongruenz abgebildet. Ein Beispiel: nimmt man als „Sehstrahlen" alle Schraublinien, die zu einer zu Π normalen Schraubung gehören, d. h. solche mit gemeinsamer zu Π normaler Achse und von gleicher Ganghöhe, und ordnet jeder ihren Schnittpunkt mit Π zu, so kann man damit die sogenannten „Schraubrisse" erzeugen. Durch jeden Raumpunkt geht eine einzige solche Schraublinie, und ihr Spurpunkt ist der verlangte Bildpunkt. Dieses Verfahren hat sich bei der Behandlung von Schraubflächen als sehr nützlich erwiesen.

Eine Spezialisierung der Abbildung (5) erhält man, wenn man fordert, daß die ∞^2 Kurven stets Gerade sein sollen, daß sie also eine Strahlkongruenz bilden. Solche Sehstrahlenkongruenzen sind auch physikalisch möglich. Läßt man z. B. ein Lichtstrahlenbündel an einer krummen Fläche reflektieren oder brechen, so bilden die abgelenkten oder gebrochenen Lichtstrahlen eine Kongruenz der verlangten Art, die dann zur Erzeugung von Bildern verwendet werden kann. Insbesondere kann die Strahlkongruenz eine lineare, d. h. ein Strahlnetz sein. Ein solcher Fall ist der folgende: das Strahlnetz bestehe aus allen Transversalen zweier festen Geraden L und M. Das Bild eines Raumpunktes p wird erzeugt, indem man durch p den Strahl legt, der L und M schneidet und seinen Spurpunkt p' in Π aufsucht; das ist die windschiefe Projektion. Diese ist nicht mehr linear, denn durchläuft p eine Gerade, so erzeugt der Bildpunkt einen Kegelschnitt. Richtet man diese Abbildung weiter so ein, daß jeder dieser Kegelschnitte ein Kreis wird, so haben wir das sogenannte Netzrißverfahren. Die Geraden G werden also durch Kreise G' abgebildet, umgekehrt gehören aber zu einem solchen Bildkreise unendlich viele Raumgeraden. Um hier Eineindeutigkeit zu erzielen, fügt man zu G' noch den Spurpunkt g von G hinzu, der auf G' liegen muß. Man erhält damit eine ganz neue Abbildung, nämlich die der Raumgeraden auf Kreise der Ebene, auf denen noch ein Punkt gegeben ist, auf sogenannte „befestigte Kreise". Diese Abbildung eignet sich natürlich zur Darstellung einer Geometrie, in welcher die Gerade das Raumelement ist, also für die Behandlung der liniengeometrischen Aufgaben. Steigt man zu höheren Strahlgebilden auf, so zeigt sich z. B., daß ein linearer Strahlkomplex durch einen Kreis und einen Punkt, der aber nicht mehr auf dem Kreise liegen muß, also durch ein „Punkt-Kreiselement" abgebildet ist. Diese Abbildung der Strahlkomplexe auf die Punkt-Kreiselemente in der Ebene gestattet eine einfache Behandlung aller Aufgaben der Strahlgeometrie; von diesem Standpunkt aus sind die Raumgeraden spezielle Komplexe und ihre Bilder, die befestigten Kreise, sind spezielle Punkt-Kreiselemente. Diese Abbildung ist ein typisches Beispiel für die moderne Auffassung der darstellenden Geometrie: in der Darstellung bisher nicht verwendete neue Raum- und Bildelemente treten in neuem Zusammenhange auf.

Eine andere Art der Abbildung von Raumgeraden schließt sich an das bekannte Verfahren der Perspektive an, wo eine Gerade durch Spur- und Flucht-

punkt abgebildet wird. Damit entsteht die allgemeine Frage nach der Abbildung der Raumgeraden auf die Punktepaare in Π, die keine Unbestimmtheit enthalten muß, da beide Mannigfaltigkeiten vierdimensional sind. Insbesonders interessiert die allgemeinste lineare Abbildung dieser Art, die dadurch charakterisiert wird, daß, wenn eine Raumgerade ein ebenes Büschel beschreibt, die beiden Bildpunkte je eine gerade Punktreihe erzeugen sollen. Die Untersuchung dieser Frage war ein Beispiel dafür, wie zu einer Abbildung mit gegebenen Raum- und Bildelementen und mit einer vorgeschriebenen Eigenschaft die geometrische Herstellung — die vorher vollkommen unbekannt war — aufgefunden wurde. Die Beschreibung dieser Abbildung würde jedoch die hier gesteckten Grenzen überschreiten, da dazu ein tieferes Eingehen in die Strahlgeometrie nötig wäre. Die dazugehörigen Abbildungsgleichungen sind analog gebaut wie (4), nur treten auf den rechten Seiten in den Zählern und Nennern lineare Formen von Strahlkoordinaten auf. Als Nebenprodukt der Untersuchung dieser allgemeinen linearen Abbildung des Strahlraumes ergab sich auch, daß das Zweispurenverfahren und das Zweibilderverfahren aus ihr durch weitgehende projektive Spezialisierung ableitbar sind.

Auf eine Eigenschaft dieser Strahlabbildung soll hier noch eingegangen werden, weil sie für gewisse Sonderfälle wichtig ist. Wenn eine Raumgerade G die Bildpunkte g' und g'' hat und man alle G betrachtet, die durch einen Punkt p gehen, also ein Strahlbündel bilden, so erhält man in der Ebene ∞^2 Punkte g' und ebenso viele g'', d. h. es werden im allgemeinen sowohl die g' als auch die g'' die ganze Ebene Π überdecken, derart, daß zu einem gewählten g' ein bestimmter Punkt g'' gehört und umgekehrt. Es ist also einem Strahlbündel eine Punktverwandtschaft in Π zugeordnet, oder, wenn man nur den Träger p des Bündels betrachtet, es gehört zu jedem Raumpunkte eine Punkttransformation, die im Falle der linearen Abbildung immer eine Kollineation sein muß. Es werden also die Raumpunkte auf gewisse ∞^3 Kollineationen in Π abgebildet, und es kann die Art dieser Kollineationen eine Klassifikation der einzelnen Möglichkeiten abgeben. In dem ganz besonderen Falle des Spur-Fluchtpunktverfahrens sind diese Kollineationen die zentrischen Ähnlichkeiten in Π, deren es gerade ∞^3 gibt. Es können diese Kollineationen auch solche sein, die einen festen Kegelschnitt in sich transformieren; das sind dann sogenannte nichteuklidische Bewegungen in Π, die somit den Raumpunkten zugeordnet sind. Der interessanteste Fall ist aber der, wo die ∞^3 Verwandtschaften die gleichsinnigen Kongruenzen sind, d. h. das Feld der g' kann durch eine gewöhnliche Bewegung (Drehung) in Π mit dem Felde der g'' zur Deckung gebracht werden. Wir erhalten damit die Abbildung der Raumpunkte auf die Bewegungen in Π, die sogenannte kinematische Abbildung. Diese ermöglicht in erster Linie die Behandlung von Bewegungsaufgaben in Π mit Hilfe räumlicher Überlegungen; zu einer kontinuierlichen Bewegung in Π gehört z. B. eine bestimmte Raumkurve u. a. m.

Die Abbildung von Raumgeraden ist das einfachste Beispiel der Abbildung einer vierdimensionalen Mannigfaltigkeit. Sie kann zu anderen vierdimensionalen Gebieten, die sich im Raume befinden, hinüberleiten, z. B. zu dem der Kugeln. Will man jedoch von speziellen Elementen absehen und einheitlich alle möglichen vierdimensionalen Mannigfaltigkeiten betrachten, so gelangt man zum abstrakten Punktraum R_4, dessen Darstellung angestrebt wird. Die ein-

fachste Mannigfaltigkeit in Π von vier Dimensionen ist aber die der Punktepaare, so daß man zwanglos auf eine Abbildung des R_4 auf die Punktepaare von Π geführt wird. Hat ein Punkt p des R_4 die rechtwinkligen Koordinaten x, y, z, t und sind die Koordinaten der beiden Bildpunkte p' und p'' die Zahlen ξ', η' bzw. ξ'', η'', so müssen vier Gleichungen zwischen den acht Variablen als Abbildungsgleichungen aufgestellt werden. Verlangt man wiederum Linearität, d. h. sollen die Bilder einer Geraden G des R_4 stets wieder zwei Gerade G' und G'' sein, so werden die Abbildungsgleichungen dieselbe Form wie (4) haben, nur daß auf den rechten Seiten überall noch ein Glied mit t hinzutritt. Die geometrische Herstellung dieser Abbildung geht dann von der Annahme zweier Geraden A_1 und A_2 sowie zweier Ebenen π_1 und π_2 im R_4 aus. Alle Raumpunkte werden nun aus A_1 auf π_1 und aus A_2 auf π_2 projiziert, und die beiden Punktfelder π_1 und π_2 werden weiter kollinear in die Zeichenebene Π transformiert. Den einfachsten Fall einer solchen Abbildung erhält man, wenn man im R_3 ein rechtwinkliges Koordinatensystem $[x, y, z]$ annimmt, dessen $[xy]$-Ebene die Bildebene Π sein soll. Die drei Achsen x, y, z sollen gleichzeitig auch dem R_4 angehören, so daß man sich noch die t-Achse hinzuzudenken hat, die sich natürlich außerhalb unseres R_3 befindet und auf ihm im Koordinatenursprung senkrecht steht. Dann sollen die Abbildungsgleichungen lauten

$$\begin{aligned} \xi' &= x, \quad \xi'' = z \\ \eta' &= y, \quad \eta'' = t. \end{aligned} \tag{6}$$

Dieser Fall ist die Erweiterung des gewöhnlichen Grund-Aufrißverfahrens auf den R_4. Jeder Punkt $p(x, y, z, t)$ wird durch das Punktepaar $p'(\xi', \eta')$, $p''(\xi'', \eta'')$ dargestellt, dessen Koordinaten bzgl. des $[xy]$-Systems in Π der Reihe nach die Koordinaten des Punktes im R_4 ergeben. Durchläuft p eine gerade Punktreihe, so beschreiben p' und p'' je eine dazu ähnliche gerade Punktreihe. Erzeugt p eine Ebene ε, so erfüllen p' und p'' zwei zueinander affine Felder ε' und ε''. Die Ebenen des R_4 sind also hiermit auf die Affinitäten in Π abgebildet. Will man die Punkte eines (dreidimensionalen) Raumes darstellen, so müssen die Bildpunkte die Bedingung erfüllen, daß zusammengehörige Punkte auf entsprechenden Strahlen zweier perspektiver Parallelstrahlbüschel liegen. Somit können Lagenkonstruktionen innerhalb eines R_3 des R_4 genau so durchgeführt werden, wie in einem Zweibilderverfahren des gewöhnlichen Raumes. Mit dieser Abbildung lassen sich zunächst alle Lagenaufgaben im R_4 auf einfachste Weise in der Zeichenebene lösen, und man hat dabei den Vorteil, daß man durch diese Abbildung einen vollkommenen Einblick in die Struktur des R_4 gewinnt. Auch die Maßaufgaben führen zu einfachen Konstruktionen; z. B. erhält man die wahre Länge einer Strecke als Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreieckes, dessen Katheten gleich den Längen der zwei Bildstrecken sind.

Analog wie beim R_4 kann man nun zur Darstellung höherer Punkträume R_k übergehen. Als Bilder treten — wenn man sich auf Punkte beschränkt — natürlich nicht mehr Punktepaare auf, sondern Punktgruppen, die mehr als zwei Punkte enthalten. Es wird jeder Punkt eines R_{2n} oder R_{2n-1} durch n Punkte in Π abgebildet. Im ersten Falle sind die n Punkte keinerlei Einschränkung unterworfen (wie beim R_4), im zweiten Falle müssen sie noch eine Bedingung erfüllen (wie beim R_3).

Wenn wir wieder zum gewöhnlichen Punktraum zurückkehren, so bilden die **Abbildungen der Raumpunkte auf Kurven der Bildebene** eine wichtige Gruppe. Hat man ein rechtwinkliges Koordinatensystem $[x, y, z]$, dessen $[xy]$-Ebene wiederum Π sein soll, und bezeichnet man die Koordinaten der Punkte von Π mit ξ, η, so genügt für diesen Fall eine einzige Abbildungsgleichung

$$F(xyz\xi\eta) = 0. \tag{7}$$

Zu jedem Raumpunkte $p(x, y, z)$ gehört jetzt eine Kurve P' in Π mit der Gleichung $F = 0$. Man erhält also insgesamt ∞^3 bestimmte Kurven in Π, und jeder von ihnen ist ein Raumpunkt zugeordnet. Man kann einen Zusammenhang zwischen p und der Bildkurve P' so herstellen, daß man zu jedem Punkte einen Kegel konstruiert, dessen Scheitel p und dessen Leitlinie P' ist. Damit ist die geometrische Herstellung der Abbildung möglich: jedem Raumpunkte wird ein Kegel zugeordnet, z. B. durch eine Differentialgleichung

$$f\left(xyz\frac{dz}{dx}\frac{dz}{dy}\right) = 0, \tag{8}$$

und die Spurkurve dieses Kegels in Π ist die gesuchte Bildkurve. Allgemeine Abbildungen dieser Art sind bis jetzt noch nicht eingehender behandelt worden. Genau bekannt ist nur der spezielle Fall, wo die ∞^3 Kegel solche Drehkegel sind, deren Achsen zu Π senkrecht stehen und deren Erzeugende mit Π einen Winkel von 45^0 einschließen. Die Differentialgleichung dieser Kegel wäre dann

$$dx^2 + dy^2 - dz^2 = 0. \tag{9}$$

Jeder Raumpunkt p wird auf einen Kreis P' abgebildet, dessen Mittelpunkt die orthogonale Projektion von p auf Π und dessen Radius der Abstand des Punktes p von Π ist. Wir haben es mit der schon erwähnten **Zyklographie** zu tun, deren Abbildungsgleichung lautet

$$(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 = z^2. \tag{10}$$

Diese Abbildung leidet an dem Übelstand, daß sie nicht eineindeutig ist, denn es gehört zu je zwei Punkten, die bezüglich Π symmetrisch liegen, ein und derselbe Bildkreis. Dem hilft man dadurch ab, daß man den Bildkreis orientiert, d. h. seinem Radius ein bestimmtes Vorzeichen je nach dem Vorzeichen der Koordinate z von p beilegt. Dadurch erhält jeder Kreis einen bestimmten Umlaufsinn, und man arbeitet dann in Π mit orientierten Kreisen oder Zykeln. Hat der Mittelpunkt eines Zykels die Koordinaten ξ, η und ist sein mit Vorzeichen versehener Radius ϱ, so lauten die Gleichungen der Abbildung der Raumpunkte auf die Zykel in Π

$$\xi = x, \quad \eta = y, \quad \varrho = z. \tag{11}$$

Diese Zyklographie ermöglicht nun die Behandlung aller Aufgaben über Zykel und (nichtorientierte) Kreise in Π mittels räumlicher Überlegungen; so erhält man z. B. für das Apollonische Problem eine einfache und übersichtliche Lösung. Darüber hinaus dient heute die Zyklographie einer Fülle von Problemen, die dadurch in neuem Lichte erscheinen.

Zu erwähnen wäre noch eine **Abbildung der Linienelemente des Raumes** auf Punktepaare in Π, die zur Auffindung neuer Flächengattungen Anlaß gegeben hat.

Alle hier aufgezeigten neueren Abbildungen bewegen sich innerhalb der reinen Geometrie. Wie man sieht, kommen alle möglichen geometrischen Gebiete zur Geltung. Die heutige darstellende Geometrie macht von ihnen den verschiedenartigsten Gebrauch und führt ihnen wieder neue Erkenntnisse zu.

Für Anwendungen außerhalb der reinen Geometrie ist heute erst eine besondere Abbildung bekannt, die für die Zwecke der Mechanik geschaffen wurde: es ist dies eine Abbildung der räumlichen Vektoren auf die Stäbe in der Ebene, also eine darstellende Geometrie der räumlichen Kräfte. Möge die Zukunft auch in dieser Richtung weiteren Fortschritt bringen!

Die Kugel als Helferin auf geometrischem Gebiet.

Von CARL HERBST in Bochum.

Mit 15 Figuren im Text.

Die folgenden Betrachtungen stützen sich auf die Gesetze:

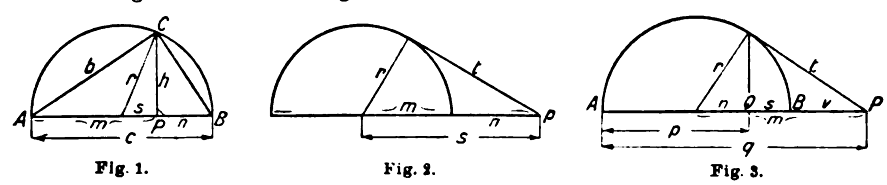


Fig. 1. Fig. 2. Fig. 3.

Fig. 1 $h^2 = m \cdot n$ (1) $b^2 = c \cdot m$; (2)

Fig. 2 $t^2 = m \cdot n$; (3)

Fig. 3 $ABQP$ harmonische Punkte. (4)

Diese Beziehungen ergeben sich ohne weiteres an Hand des Pythagoras.[1])

In Figg. 4, 5, 6, 8 ist jeweilig eine Kugel gedacht, deren Größtkreis K in der Zeichenebene E liegt. Durch K_0 und K_1 werden Kreise angedeutet, deren Ebenen zur Zeichenebene senkrecht sind; in dieser gelten die eingetragenen Buchstaben.

In Figg. 4 bzw. 4a liefern die Ebenen von K_0 und K_1 zwischen P und der Kugelfläche die Schnittstrecke $h \perp E$; nach (1) ist

$[h^2 =]\, m_0 n_0 = m_1 n_1$ (Potenz des Innenpunktes P in bezug auf den Kreis K).

Fig. 5 zeigt in der Kugel einen Kreiskegel mit der Seitenlinie b. Am Kreise K_0 liest man nach (2) ab

$b^2 = c_0 m_0$ [Verallgemeinerung des Gesetzes (2)].

In Fig. 6 ist an die Kugel ein berührender Kegel mit der Seitenlinie t angesetzt. Mit Hilfe der Kreise K_0 und K_1 findet man nach (3)

$[t^2 =]\, m_0 n_0 = m_1 n_1$ (Potenz des Außenpunktes P in bezug auf K).

1) Um jegliches Mißverständnis auszuschließen, werde angesetzt:

Fig. 1 $h^2 = r^2 - s^2 = (r + s)(r - s) = m \cdot n;\quad b^2 = m^2 + h^2 = (m + n) \cdot m = c \cdot m.$

Fig. 2 $t^2 = s^2 - r^2 = (s + r)(s - r) = m \cdot n.$

Fig. 3 $r^2 = m \cdot n,\quad \frac{r}{n} = \frac{m}{r},\quad \frac{r+n}{r-n} = \frac{m+r}{m-r},\quad p : s = q : v.$

Hiernach entsteht aus Fig. 7

$$a \cdot b_1 = b \cdot a_1, \qquad a : b = a_1 : b_1.$$

Umklappen des kleinen Dreiecks führt auf Fig. 7a, wo $c_1 \parallel c$; damit gelangt man zu den Gesetzen über Parallelität und Verhältnisgleichheit am Dreieck[1]) sowie zu den Ähnlichkeitssätzen.

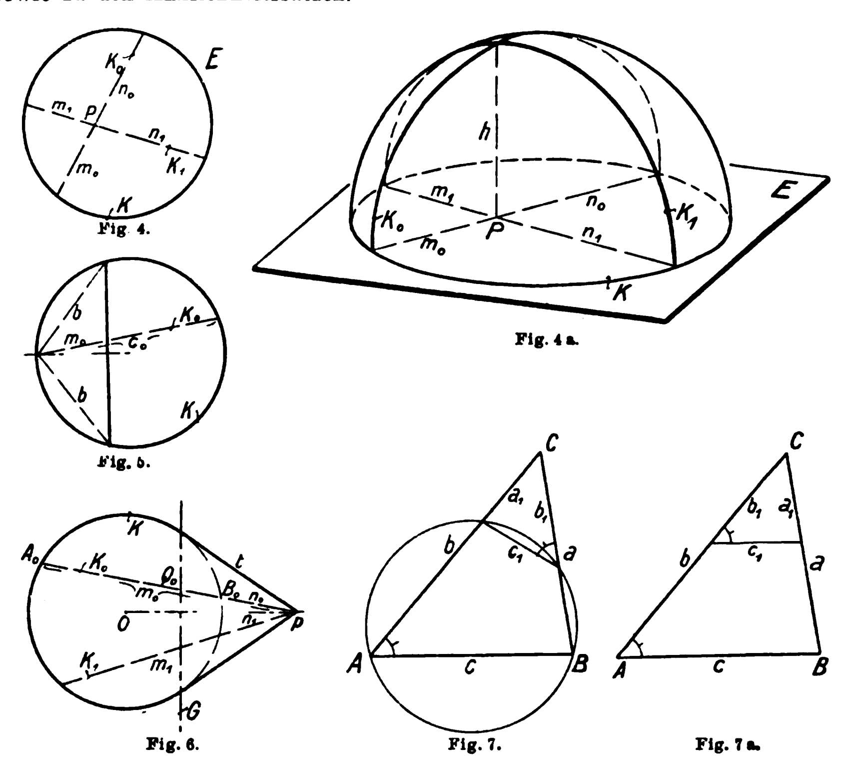


Fig. 4. Fig. 4a. Fig. 5. Fig. 6. Fig. 7. Fig. 7a.

Weiter liefert in Fig. 6 der Kreis K_0 nach (4) die Erkenntnis, daß $A_0 B_0 Q_0 P$ harmonische Punkte sind. (G Polare des Außenpunktes P.)

In Fig. 8 sind wieder $ABQP$ harmonische Punkte; E_1 ist die Berührungsebene des über Q liegenden Kugelpunktes, ihre Schnittlinie mit E ist also senkrecht zu OP. ($L \perp OP$.) Wie aus Kreis K_0 hervorgeht, sind auch $A_0 B_0 Q P_0$ harmonische Punkte, demnach ist L die Polare von Q.

Figg. 6 u. 8 geben die Grundlage für Pol und Polare. Zur Ergänzung kann Fig. 9 herangezogen werden; dort geht die Polare G durch den Schnittpunkt der Tangenten von A_0 und B_0, denn es ist

$$x : \frac{r^2}{s} = s : b, \quad \text{mithin} \quad x = \frac{r^2}{b}, \quad \text{d. h.} \quad x = a.$$[2])

1) Vgl. C. Herbst, Unterrichtsbl. f. Math. u. Naturw. 1915, Nr. 1.
2) Vgl. C. Herbst, Unterrichtsbl. f. Math. u. Naturw. 1916, Nr. 8.

Figg. 10—12 zeigen am Kegel der Reihe nach Parabel, Ellipse und Hyperbel. Sie weisen ferner die Kugel auf, die den Kegel in dem durch P gehenden

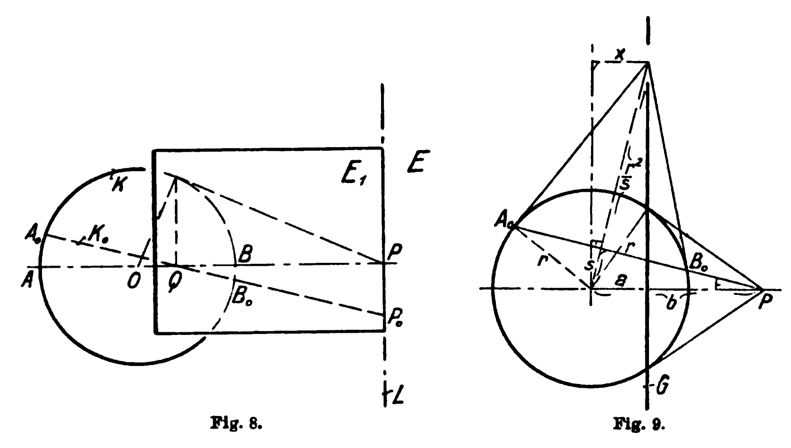


Fig. 8. Fig. 9.

Parallelkreise berührt. Die jeweilige Schnittkurve berührt den Kugelschnittkreis vom Radius ϱ in P, die Tangente des Kurvenpunktes P fällt daher mit der des Kreises zusammen.

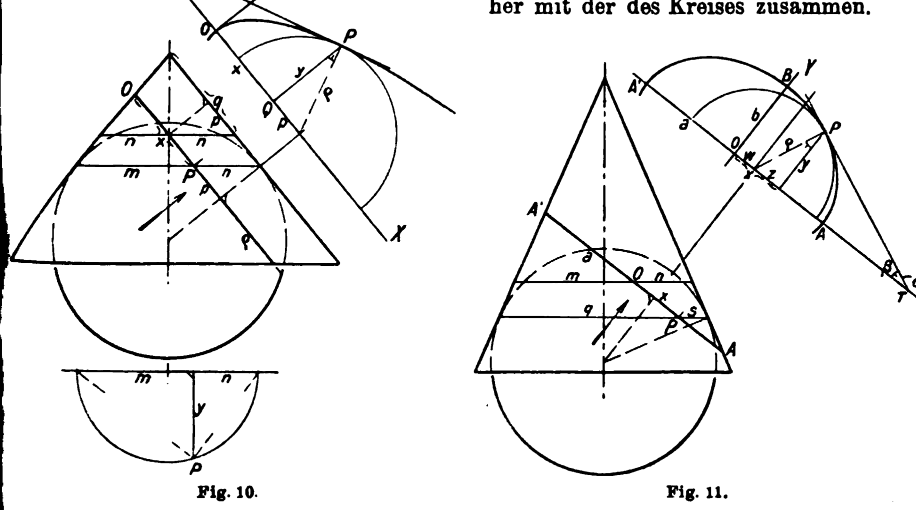


Fig. 10. Fig. 11.

I. Parabel (Fig. 10).

$$y^2 = m \cdot n; \quad \frac{m}{x} = \frac{2n}{q}; \quad m = 2\frac{n}{q} \cdot x; \quad y^2 = 2\frac{n^2}{q} \cdot x \quad \text{also} \quad y^2 = 2px.$$

Aus der Schreibweise $y^2 = p \cdot 2x$ erkennt man, daß $TQ = 2x$ ist. Für die Richtungskonstante $M = \operatorname{tg} \alpha$ folgt

$$M = \frac{p}{y} = \frac{y}{2x},$$

für den „Krümmungsradius" des Scheitels findet man $R = p$ (Q nach O gerückt).

II. Ellipse (Fig. 11).

$y^2 = q \cdot s; \qquad b^2 = m \cdot n;$

$$\left.\begin{aligned}\frac{q}{m} &= \frac{a+x}{a}\\ \frac{s}{n} &= \frac{a-x}{a}\end{aligned}\right| y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2).$$

Ferner ist
$$(x-w)^2 + \quad y^2 = \varrho^2$$
$$a^2(x-w)^2 + a^2y^2 = a^2\varrho^2 \tag{5}$$
und
$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2. \tag{6}$$
(5)—(6) ergibt
$$(a^2-b^2)\cdot x^2 - 2a^2wx = \cdots \quad x = \frac{a^2w}{a^2-b^2} \pm 0; \quad w = \frac{(a^2-b^2)x}{a^2}.$$
Damit entsteht
$$z = x - w = \frac{b^2x}{a^2} \quad \text{und} \quad M = \operatorname{tg}\alpha = -\operatorname{tg}\beta = -\frac{z}{y}, \quad \text{d. h.} \quad M = -\frac{b^2x}{a^2y}.$$
Rückt P nach A, so wird $x = a$ und $z = \frac{b^2}{a}$; demnach gilt für A der Krümmungsradius $R = \frac{b^2}{a}$. $\left(\text{Für } B \text{ folgt entsprechend } R_1 = \frac{a^2}{b}.\right)$

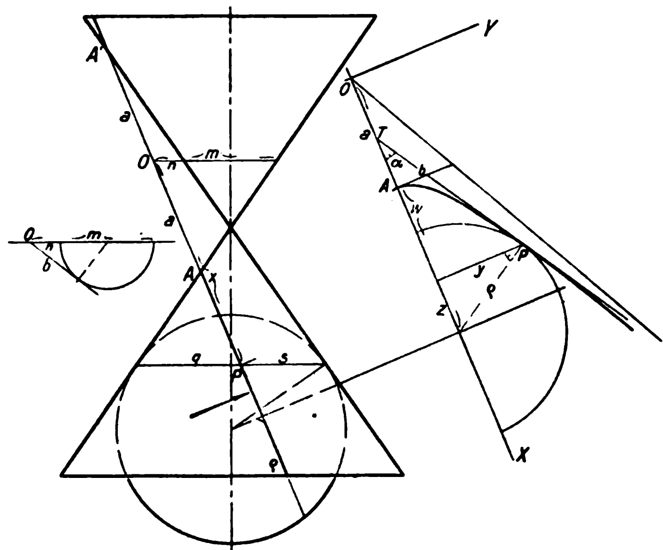


Fig. 12.

III. Hyperbel (Fig. 12).

$y^2 = q \cdot s, \qquad b^2 = m \cdot n,$

$$\left.\begin{aligned}\frac{q}{m} &= \frac{x-a}{a}\\ \frac{s}{n} &= \frac{x+a}{a}\end{aligned}\right\} y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2).$$

$$(w - x)^2 + y^2 = \varrho^2 \quad a^2(w - x)^2 + a^2 y^2 = a^2 \varrho^2$$
$$b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2$$
$$(a^2 + b^2)x^2 - 2a^2 w \cdot x = \cdots \quad x = \frac{a^2 w}{a^2 + b^2} \pm 0; \quad w = \frac{(a^2 + b^2)\cdot x}{a^2}.$$
$$z = w - x = \frac{b^2 x}{a^2}; \quad M = \frac{z}{y} = \frac{b^2 x}{a^2 y}.$$

Rückt P nach A, so folgt $x = a$, $z = \frac{b^2}{a}$; mithin hat A den Krümmungsradius $R = \frac{b^2}{a}$.

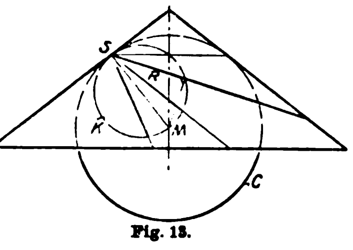


Fig. 13.

In Fig. 13 berührt die Kugel C mit dem Mittelpunkt M den Kegel in dem Parallelkreise, der durch den Scheitel S der angedeuteten Schnittkurven geht. Kreis K mit dem Durchmesser SM schneidet jeweilig den Krümmungsradius R des Scheitels ab. Setzt man bei Ellipse und Hyperbel $\frac{b^2}{a} = p$, so zeigt die Figur die Veränderlichkeit von p.

Einführung symbolischer Größen zur Behandlung der Wechselstromgesetze.

Von W. SPREEN in Oldenburg i. O.

Mit 14 Figuren im Text.

Die Benutzung symbolischer Größen bei der Behandlung des Wechselstromes, mit denen nach den für die komplexen Zahlen abgeleiteten Regeln gerechnet wird, ist dem Mathematiker wie dem Physiker in gleicher Weise willkommen, da sie dem ersteren Gelegenheit gibt, der sehr abstrakten Theorie der komplexen Zahlen ein anschauliches Analogon an die Seite zu stellen, während sie dem letzteren die sonst nicht zu vermeidenden Rechnungen so vereinfacht, daß die Gesetze für den Wechselstrom in der einfachen Form des Ohmschen Gesetzes und der Kirchhoffschen Sätze erscheinen, die für Gleichstrom abgeleitet sind. Da die symbolische Form der Gesetze der Anschauung nicht mehr unmittelbar zugänglich ist, dürfen die *symbolischen* elektrischen Größen erst auftreten, wenn der physikalische Sachverhalt klar erkannt ist und es sich nur noch um eine vereinfachende Formulierung des Erkannten handelt. Die an das Abstraktionsvermögen der Schüler zu stellenden Anforderungen sind nicht gering; daher wird man nur in einer guten Prima sich Erfolg versprechen dürfen.

Es kann nicht Aufgabe dieser Zeilen sein, das gesamte zur Behandlung kommende Material zusammenzutragen. Ich setze voraus, daß an mathematischen Hilfsmitteln die Theorie der komplexen Zahlen (bis zu den Sätzen von Moivre einschließlich) und die Lehre von den Reihen (Sinus-, Kosinus- und e^x-Reihe, Eulersche Formel) vorliegen, und daß in der Elektrizitätslehre die Theorie des Wechselstromes etwa in der Breite, wie sie in den folgenden Zeilen zusammengestellt wird, behandelt ist.

Die einfache sinusförmige Wechselspannung e werde in bekannter Weise dadurch gewonnen, daß man einen Anker, der nur eine Drahtschleife enthält, in

einem homogenen Magnetfelde nach Art der Fig. 1 mit konstanter Winkelgeschwindigkeit rotieren läßt. Dann ist $e = E \cdot \sin \varphi$, wo E der Scheitelwert der Wechselspannung und φ der Winkel ist, um den der Anker sich von der Stelle aus, in der die Windungsebene der Drahtschleife senkrecht zu den Kraftlinien steht, gedreht hat (Fig. 2). Durch Einführung der Periode T, die hier gleich der Umdrehungszeit ist, habe man die Spannung in die Form

$$e = E \cdot \sin \frac{2\pi t}{T} = E \cdot \sin \omega t \tag{1}$$

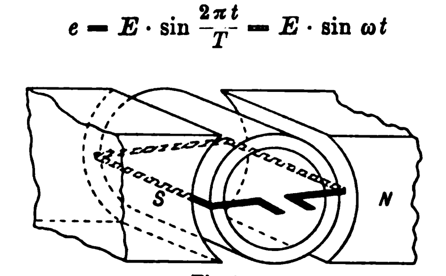


Fig. 1.

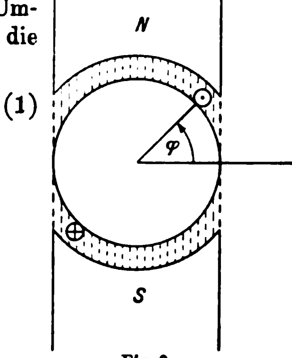


Fig. 2.

gebracht, wo t die Zeit ist, die zum Drehungswinkel φ gehört ($t : T = \varphi : 2\pi$). Entsprechend sei für den Strom i die Beziehung gewonnen

$$i = I \cdot \sin \frac{2\pi t}{T} = I \cdot \sin \omega t. \tag{2}$$

Selbstinduktionskoeffizient und Kapazität seien quantitativ definiert, und es seien die Beziehungen gewonnen

$$e_s = -L \frac{di}{dt} = -LI\omega \cos \omega t \tag{3}$$

und

$$e_c = \frac{I}{\omega C} \cos \omega t, \tag{4}$$

wenn e_s die in einem Leiter des Selbstinduktionskoeffizienten L und e_c die in einem Kondensator der Kapazität C durch einen Wechselstrom der Stärke I (Scheitelwert) erzeugten Gegenspannungen bedeuten. Bekannt seien ferner der Begriff der Phasendifferenz und die Tatsache, daß Strom und Spannung nicht in Phase sind, wenn der Wechselstrom i durch einen Leiter fließt, der außer einem Ohmschen Widerstande R noch einen Selbstinduktionskoeffizienten L oder eine Kapazität C oder beides hat, da ja in diesen Fällen die stromerzeugende Maschine außer der fingierten Spannung $e' = R \cdot i$, die den Strom i beim alleinigen Vorhandensein des Widerstandes R erzeugen würde, noch die Spannungskomponente liefern muß, die die induktive oder kapazitive Gegenspannung e_s oder e_c kompensieren muß, und zwar wird e_s kompensiert durch die Gegenspannung $e_s' = -e_s$ und e durch $e_c' = -e_c$. Die EMK der Maschine ist danach also in den beiden einfachen Fällen, daß außer einem reinen Ohmschen Widerstand eine Selbstinduktion oder eine Kapazität im Stromkreise liegen, $e = e' - e_s$ oder $e = e' - e_c$.

Hier ist nun der Ort, wo eine *symbolische* Behandlung der Wechselstromgrößen einsetzen könnte. Wir drehen (Fig. 3) die Strecke OA, deren Betrag E

Einheiten sei, um den Punkt O. Diese Drehung entspricht genau dem Umlauf des Drahtes in Fig. 1 im Magnetfelde. Drehen wir die Strecke um den Winkel $\varphi = \omega t$, so komme sie in die Lage OA_1, die der Lage des Drahtes in Fig. 2 entspricht. Die senkrechte Projektion OB_1 von OA_1 auf den Durchmesser CD ist dann der Momentanwert der Wechselspannung $e = E \cdot \sin \omega t$ zur Zeit t. Diese ist also vollständig charakterisiert durch die Lage der Strecke OA_1;

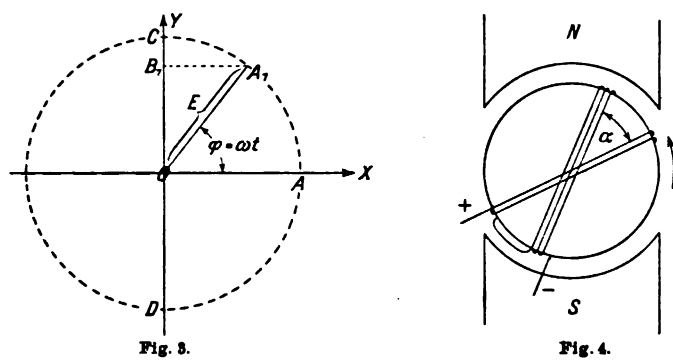


Fig. 3. Fig. 4.

der Wert einer Wechselspannung ist daher in jedem Moment gegeben durch die Zuordnung einer Strecke, deren Länge gleich dem Scheitelwert ist und die mit der Orientierungsgeraden einen Winkel $\varphi = \omega t$ bildet.

Der nächste Schritt wäre etwa die Zusammensetzung zweier Wechselspannungen, deren Scheitelwert und Phase verschieden sind. Anschaulich würden wir diesen Schritt dadurch machen, daß wir nach Art der Fig. 4 uns auf dem Anker einer Maschine zwei in Reihe geschaltete Wickelungen angebracht denken, deren Windungsebenen einen Winkel α miteinander bilden. Ist der Scheitelwert der in der ersten Wickelung allein erzeugten Spannung E_1, der der zweiten E_2, so erhalten wir für die einzelnen Wechselspannungen $e_1 = E_1 \cdot \sin \omega t$ und $e_2 = E_2 \cdot \sin(\omega t + \alpha)$. Die Gesamtspannung ist

$$e = e_1 + e_2 = E_1 \cdot \sin \omega t + E_2 \cdot \sin(\omega t + \alpha).$$

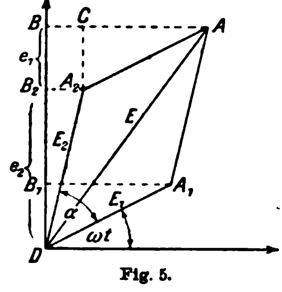


Fig. 5.

Ordnen wir nun wie im vorigen Absatz jeder Teilspannung derart eine gerichtete Strecke zu, daß die Länge derselben gleich der Scheitelspannung ist, und daß sie mit dem Orientierungsstrahl in dessen Ursprung einen Winkel bildet, der gleich dem Phasenwinkel ist, so erhalten wir Fig. 5. Die Richtungen der Strecken sind die der Windungsebenen in Fig. 4. Der Gesamtspannung e entspricht der Strahl OA, wenn OA_1 und OA_2 den Teilspannungen e_1 und e_2 zugeordnet sind, und es erhellt, daß die Scheitelspannungen E_1 und E_2 geometrisch zu addieren sind wie die Vektoren, um die Scheitelspannung E zu erhalten. Läßt man das Parallelogramm OA_1AA_2 um eine zu seiner Ebene senkrechte, durch O gehende Achse mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega = \frac{2\pi}{T}$ rotieren und projiziert dabei den Punkt A auf die Y-Achse, so durchläuft OB Werte, die zahlenmäßig und dem Vorzeichen nach

der Wechselspannung e entsprechen. Dieses Ergebnis läßt sich ohne weiteres auf mehrere in Reihe geschaltete Spannungserzeuger anwenden.

Ähnliche Überlegungen gelten für die Addition sinusförmiger Teilströme, wie sie in den einzelnen Zweigen einer Stromverzweigung bei Wechselstrom vorkommen. Sind hier die Einzelströme i_1 und i_2, so ist der Gesamtstrom, der zu dem Verzweigungspunkt fließt,

$$i = i_1 + i_2 = I_1 \cdot \sin \omega t + I_2 \cdot \sin(\omega t + \alpha).$$

Die hier auftretenden Größen sind nicht mit den Vektoren zu verwechseln, obgleich sie wie Vektoren *addiert* werden. Die Regeln der Vektoranalysis lassen sich im übrigen auf sie nicht anwenden. Die Übereinstimmung ist nur formaler Natur, weshalb wir am besten die Bezeichnung Vektor vermeiden. Man nennt die hier zur Darstellung der Ströme und Spannungen benutzten Größen wohl *Diagrammvektoren*, da sie einen vollwertigen Ersatz der Strom- und Spannungsdiagramme liefern.

Der nächste Schritt wäre die Ableitung des Ohmschen Gesetzes für Wechselstrom. Die von der Stromquelle erzeugte EMK hat den Strom $i = I \cdot \sin \omega t$ aufrechtzuerhalten, hat also auch alle die Gegenspannungen mit zu überwinden, die durch den Strom i in jedem Moment erzeugt werden. Enthält der Stromkreis nur einen reinen Ohmschen Widerstand R (kapazitäts- und selbstinduktionsfrei), so ist die Spannung in jedem Moment mit dem Strom in Phase, es ist dann $e = I \cdot R \cdot \sin \omega t$, d. h. $E = I \cdot R$. Liegt aber außerdem, mit R in Reihe geschaltet, ein induktiver Widerstand, dessen Selbstinduktionskoeffizient L sei, im Stromkreis, so entsteht durch den Strom i eine induktive Gegenspannung der Größe

$$e_s = -L \cdot I \cdot \omega \cos \omega t = -L \cdot I \cdot \omega \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right),$$

die durch die Stromquelle überwunden werden muß. Die zur Aufrechterhaltung des Stromes i erforderliche Spannung setzt sich also zusammen aus zwei Spannungskomponenten:

$$e' = I \cdot R \cdot \sin \omega t$$

und $$e_s' = \omega \cdot I \cdot L \cdot \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right).$$

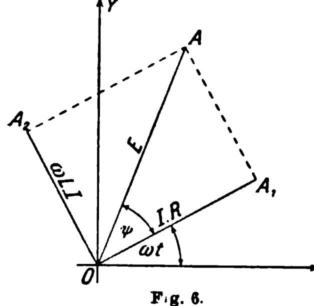


Fig. 6.

Die Phasendifferenz beträgt $\frac{\pi}{2}$. Wir können uns diesen Sachverhalt durch ein Gedankenexperiment veranschaulichen, indem wir uns auf dem Anker um 90^0 zueinander geneigte Wicklungen angebracht denken. Die eine, die mit dem Strom in Phase ist, hat den Anteil e' zu liefern, während die andere die zur Kompensierung von e_s erforderliche Zusatzspannung e_s' zu erzeugen hat. Die Zusammensetzung erläutert Fig. 6. Man liest aus der Figur unmittelbar ab, daß die Spannung durch den Ausdruck $E \cdot \sin(\omega t + \psi)$ gegeben ist, wenn der Strom $i = I \cdot \sin \omega t$ ist. Die Spannung ist voreilend um die Phasendifferenz ψ, wo

$$\psi = \operatorname{arctg} \frac{\omega L}{R}. \tag{6}$$

Zwischen E und I besteht die Beziehung

$$E = I \cdot \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}; \tag{7}$$

$\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$ heißt *Scheinwiderstand.* Läßt man das Dreieck $O A_1 A A_2$ um eine zu seiner Ebene senkrechte durch O gehende Achse mit der Winkelgeschwindigkeit ω rotieren, so durchlaufen die Projektionen auf die Y-Achse die Momentanwerte der Spannungen.

Da es nur auf die Scheinwiderstände und die Phasendifferenz ankommt, genügt zur Ermittlung dieser Größen das zum Dreieck $O A_1 A$ ähnliche rechtwinklige Dreieck, dessen Katheten R und ωL sind (Fig. 7).

In ähnlicher Weise wäre der Fall zu behandeln, daß Ohmscher Widerstand R und Kapazität C in Reihe geschaltet sind. Das Nähere ist aus Fig. 8 zu ersehen. Die Spannung $e = E \cdot \sin(\omega t - \psi)$ eilt um eine Phasendifferenz hinter

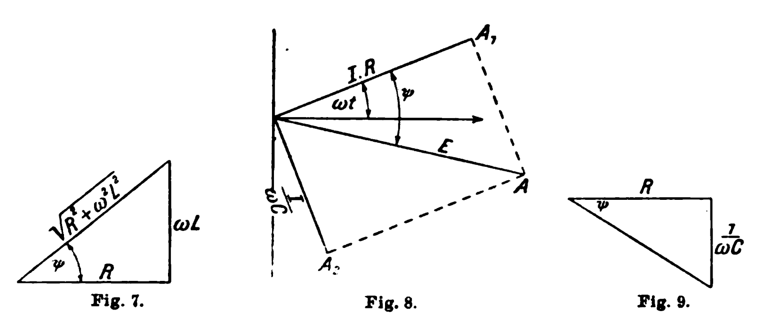


Fig. 7. Fig. 8. Fig. 9.

dem Strom her, daher das Minuszeichen. Die Spannung $e = E \cdot \sin(\omega t - \psi)$ erzeugt den Strom $i = I \cdot \sin \omega t$. Die Phasendifferenz ψ ist bestimmt durch die Gleichung

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{1}{\omega C R}. \tag{8}$$

I und E hängen zusammen durch die Beziehung

$$E = I \cdot \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}; \tag{9}$$

$\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}$ heißt wieder *Scheinwiderstand.* Diesen wie auch die Phasendifferenz erhalten wir nach Fig. 9.

Mit Hilfe der eingeführten Diagrammvektoren würde man auch die komplizierteren Fälle leicht behandeln können. Es macht andrerseits aber gar keine Schwierigkeiten, die Abstraktion noch weiter zu treiben und dadurch die Rechnungen noch weiter zu vereinfachen. Die Fig. 4—9 erinnern an die Darstellung der *komplexen* Zahlen und an die Addition derselben in der Gaußschen Zahlenebene. Da es bei den bisher benutzten Diagrammvektoren genau wie bei der Abbildung der komplexen Zahlen nur auf die Richtung zu einer Orientierungsgeraden und auf den absoluten Betrag ankommt, kann man die betrachteten Wechselstromgrößen auch durch Zuordnung einer komplexen Zahl charakterisieren. Wir erhalten so eine *rein symbolische* Darstellung, auf die die Regeln für das Rechnen mit komplexen Zahlen anwendbar sind.

Symbolische Widerstände führen wir durch Übertragung der Fig. 7 und 9 auf die Gaußsche Zahlenebene ein. Der Widerstand eines Stromkreises aus Ohmschem Widerstand R und Selbstinduktionskoeffizienten L in Reihenschaltung wird nach Fig. 7 durch die komplexe Zahl $R + i\omega L$ vollständig charakterisiert, da der absolute Betrag dieser Zahl gleich dem Scheinwiderstand ist und $\operatorname{tg}\psi = \frac{\omega L}{R}$ die Phasenverschiebung erkennen läßt. Wir setzen daher für diesen Fall den Widerstand in der symbolischen Form an

$$\mathfrak{R} = R + \mathfrak{j}\omega L = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}\,(\cos\psi + \mathfrak{j}\cdot\sin\psi). \tag{10}$$

Das Zeichen $\mathfrak{j}$ soll andeuten, daß der Betrag des induktiven Widerstandes in der Zeichnung um $\frac{\pi}{2}$ im positiven Sinne gegenüber R gedreht anzutragen ist. Drehung um π würde dann durch $\mathfrak{j}\cdot\mathfrak{j} = -1$ anzudeuten sein, Drehung um $\frac{3\pi}{2}$ durch $-\mathfrak{j}$. Das Zeichen $\mathfrak{j}$ unterliegt somit denselben Rechenregeln wie die imaginäre Einheit i. Der Widerstand eines Stromkreises aus Ohmschem Widerstand R und Kapazität C in Reihenschaltung wäre daher entsprechend (s. Fig. 9)

$$\mathfrak{R} = R - \frac{\mathfrak{j}}{\omega C} = \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}\,(\cos\psi - \mathfrak{j}\sin\psi). \tag{11}$$

Allgemein sollen im folgenden Widerstände in der Form $\mathfrak{R} = A + \mathfrak{j}\cdot B$ angegeben werden; reine induktive Widerstände werden durch $+\mathfrak{j}\omega L$, reine kapazitive durch $-\frac{\mathfrak{j}}{\omega C}$ bezeichnet. A ist der *Wirkwiderstand*, B der *Blindwiderstand*, $\sqrt{A^2 + B^2}$ der *Scheinwiderstand*.

Fig. 10.

In gleicher Weise lassen sich *symbolische Stromstärken* und *Spannungen* einführen. Die Spannung $e = E\cdot\sin\omega t$ ist, wie Fig. 10 zeigt, vollständig durch die mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega = \frac{2\pi}{T}$ um den Punkt O rotierende Strecke OA der Länge E gekennzeichnet. Das zur Zeit t vorhandene Momentanbild gibt die Figur wieder. ωt und OA sind durch Angabe der Strecken OC und OB bestimmt. Um anzudeuten, daß OB um $\frac{\pi}{2}$ im positiven Sinne gegenüber OC gedreht erscheint, bringen wir die Spannung in die Form

$$\mathfrak{E} = OC + \mathfrak{j}\cdot OB = E(\cos\omega t + \mathfrak{j}\cdot\sin\omega t), \tag{12}$$

wofür man auch in Anlehnung an die Eulersche Formel schreibt

$$\mathfrak{E} = E\cdot e^{\mathfrak{j}\omega t}. \tag{12a}$$

Auch bei der Spannung unterscheiden wir zweckmäßig *Wirkspannung* $E\cdot\cos\omega t$ und *Blindspannung* $E\cdot\sin\omega t$.

Eine ganz ähnliche Betrachtung der Stromstärke führt auf die Darstellung

$$\mathfrak{I} = I\,(\cos\omega t + \mathfrak{j}\sin\omega t) = I\cdot e^{\mathfrak{j}\omega t}. \tag{13}$$

Der Anteil $I\cdot\cos\omega t$ heißt *Wirkstrom*, der Anteil $I\cdot\sin\omega t$ *Blindstrom*.

Mit Hilfe der soeben definierten *symbolischen* Strom-, Spannungs- und Widerstandsgrößen lassen sich die vorhin behandelten Beispiele sehr elegant lösen.

1. **Beispiel:** (Fig. 6 u. 7) Ohmscher Widerstand R in Reihe mit induktivem Widerstand ωL. Es ist

$$\mathfrak{R} = R + \mathfrak{j}\omega L = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}\,(\cos\psi + \mathfrak{j}\sin\psi),$$

wo $\psi = \operatorname{arctg}\frac{\omega L}{R}$, ferner $\mathfrak{J} = I\cdot(\cos\omega t + \mathfrak{j}\sin\omega t)$, also

$$\begin{aligned}\mathfrak{J}\cdot\mathfrak{R} &= I\cdot\sqrt{R^2+\omega^2L^2}\,(\cos\omega t + \mathfrak{j}\sin\omega t)(\cos\psi + \mathfrak{j}\sin\psi)\\ &= I\cdot\sqrt{R^2+\omega^2L^2}\,[\cos(\omega t+\psi) + \mathfrak{j}\cdot\sin(\omega t+\psi)].\end{aligned}$$

Das ist aber die vorhin erhaltene Spannung $e = E\cdot\sin(\omega t+\psi)$, die hier nun in der symbolischen Form $\mathfrak{E} = E\,[\cos(\omega t+\psi) + \mathfrak{j}\sin(\omega t+\psi)]$ auftritt; es gilt also das Ohmsche Gesetz in der Form

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{J}\cdot\mathfrak{R}. \tag{14}$$

2. **Beispiel:** (Fig. 8 u. 9) Ohmscher Widerstand R in Reihe geschaltet mit kapazitivem Widerstand $\frac{1}{\omega C}$. Da

$$\mathfrak{R} = R - \frac{\mathfrak{j}}{\omega C} = \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}\,(\cos\psi - \mathfrak{j}\cdot\sin\psi)$$

und $$\mathfrak{J} = I\cdot(\cos\omega t + \mathfrak{j}\sin\omega t),$$

ist $$\mathfrak{J}\cdot\mathfrak{R} = I\cdot\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2C^2}}\,[\cos(\omega t-\psi) + \mathfrak{j}\sin(\omega t-\psi)].$$

Das ist wieder $\mathfrak{E}$, so daß wie oben gilt

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{J}\cdot\mathfrak{R}. \tag{14}$$

Es macht nun keine Schwierigkeit, auch kompliziertere Fälle zu behandeln, obgleich diese in den meisten Fällen über den Rahmen unserer Schulen hinausgehen. Von praktischem Interesse ist besonders der Fall, daß Ohmscher Widerstand R, induktiver Widerstand ωL und kapazitiver Widerstand $\frac{1}{\omega C}$ in Reihe geschaltet sind, wie Fig. 11 zeigt. Das Diagramm ist in Fig. 12 wiedergegeben. Die Rechnung ergibt

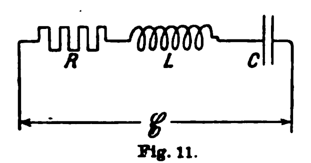


Fig. 11.

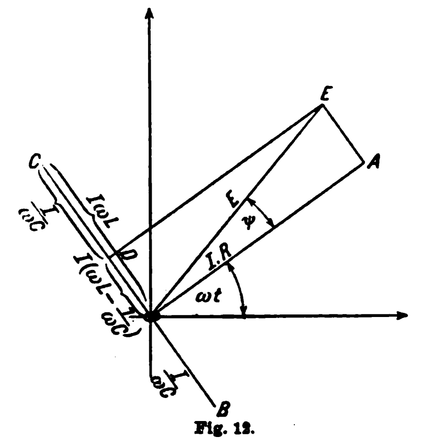


Fig. 12.

$$\mathfrak{R} = R + \mathfrak{j}\omega L - \frac{\mathfrak{j}}{\omega C} = R + \mathfrak{j}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

$$= \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}\,(\cos\psi + \mathfrak{j}\sin\psi)$$

$$\mathfrak{J} = I \cdot (\cos\omega t + \mathfrak{j}\cdot\sin\omega t)$$

$$\mathfrak{J}\cdot\mathfrak{R} = I\cdot\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}\,[\cos(\omega t + \psi) + \mathfrak{j}\sin(\omega t + \psi)],$$

wo $\operatorname{tg}\psi = \dfrac{\omega L - \dfrac{1}{\omega C}}{R}$.

Es gilt also wieder
$$\mathfrak{E} = \mathfrak{J}\cdot\mathfrak{R}. \tag{14}$$

In den bisher besprochenen Fällen handelte es sich um *Reihenschaltungen*. Das allgemeine Gesetz ist nun leicht zu formulieren: Gegeben sind die Teilwiderstände $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \mathfrak{R}_3, \ldots, \mathfrak{R}_n$ in Reihenschaltung, die Stromstärke sei $\mathfrak{J}$. Dann sind die durch die Widerstände $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \ldots, \mathfrak{R}_n$ bewirkten Spannungsabfälle $\mathfrak{J}\cdot\mathfrak{R}_1, \mathfrak{J}\cdot\mathfrak{R}_2, \ldots, \mathfrak{J}\cdot\mathfrak{R}_n$, und die Gesamtspannung hat den Wert

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{J}\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{J}\cdot\mathfrak{R}_2 + \cdots + \mathfrak{J}\cdot\mathfrak{R}_n \tag{15}$$
$$= \mathfrak{J}(\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2 + \cdots + \mathfrak{R}_n) = \mathfrak{J}\cdot\mathfrak{R}.$$

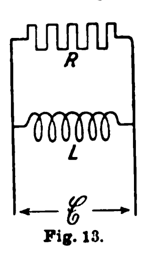


Fig. 13.

Ganz ähnlich lassen sich *Parallelschaltungen* behandeln. Hier ist wie bei Gleichstrom davon auszugehen, daß die Spannungsdifferenzen an den Enden parallel geschalteter Teilwiderstände nach Phase und Größe übereinstimmen, und daß die Stromstärke in dem unverzweigten Teil der Leitung gleich der Summe der in den parallelen Zweigen vorhandenen Teilströme ist.

Als Beispiel werde der Fall benutzt, daß ein Ohmscher Widerstand R parallel zu einem induktiven Widerstande ωL liegt (Fig. 13). Die an den Enden herrschende Spannungsdifferenz ist dann in symbolischer Form

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{J}_1\cdot\mathfrak{R}_1 = \mathfrak{J}_2\cdot\mathfrak{R}_2,$$

wenn $\mathfrak{J}_1$ und $\mathfrak{J}_2$ die in den Widerständen $\mathfrak{R}_1 = R$ und $\mathfrak{R}_2 = \mathfrak{j}\omega L$ vorhandene Teilströme sind. Daher gilt

$$\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_1 + \mathfrak{J}_2 = \mathfrak{E}\left(\frac{1}{\mathfrak{R}_1} + \frac{1}{\mathfrak{R}_2}\right) = \frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{R}}.$$

Hier ist also

$$\frac{1}{\mathfrak{R}} = \frac{1}{\mathfrak{R}} + \frac{1}{\mathfrak{j}\omega L} \qquad \text{oder} \qquad \mathfrak{R} = \frac{\omega L\cdot R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}(\cos\psi + \mathfrak{j}\sin\psi),$$

wo $\operatorname{tg}\psi = \dfrac{R}{\omega L}$. Setzt man wie vorhin $\mathfrak{J} = I\cdot(\cos\omega t + \mathfrak{j}\sin\omega t)$, so wird

$$\mathfrak{J}\cdot\mathfrak{R} = I\frac{\omega L\cdot R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 R^2}}[\cos(\omega t + \psi) + \mathfrak{j}\sin(\omega t + \psi)]$$
$$= \mathfrak{E}.$$

Auch hier läßt sich das allgemeine Gesetz für Parallelschaltungen leicht bilden: Gegeben sind die Teilwiderstände $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \ldots, \mathfrak{R}_n$; der an den Enden

vorhandene Spannungsunterschied sei $\mathfrak{E}$, dann sind die in den einzelnen Zweigen fließenden Teilströme $\mathfrak{J}_1, \mathfrak{J}_2, \ldots, \mathfrak{J}_n$ durch die Beziehung bestimmt

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{J}_1 \cdot \mathfrak{R}_1 = \mathfrak{J}_2 \mathfrak{R}_2 = \mathfrak{J}_3 \mathfrak{R}_3 \cdots = \mathfrak{J}_n \mathfrak{R}_n, \tag{16}$$

und es gilt für den Strom $\mathfrak{J}$ im unverzweigten Teil der Leitung

$$\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_1 + \mathfrak{J}_2 + \mathfrak{J}_3 + \cdots + \mathfrak{J}_n \tag{17}$$

oder

$$\mathfrak{J} = \mathfrak{E}\left(\frac{1}{\mathfrak{R}_1} + \frac{1}{\mathfrak{R}_2} + \cdots + \frac{1}{\mathfrak{R}_n}\right) = \frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{R}},$$

d. h.

$$\frac{1}{\mathfrak{R}} = \frac{1}{\mathfrak{R}_1} + \frac{1}{\mathfrak{R}_2} + \cdots + \frac{1}{\mathfrak{R}_n}. \tag{18}$$

Zum Schluß möge an einem gar nicht mehr sehr einfachen Beispiel gezeigt werden, wie einfach auch schwierigere Rechnungen werden, wenn man symbolische Größen verwendet. Es handele sich um die in Fig. 14 dargestellte Schaltung einer Elektronenröhre zur Erzeugung elektrischer Schwingungen, eine Schaltung, die vielfach zur Demonstration ungedämpfter elektrischer Wellen (s. darüber Zeitschrift f. d. phys. u. chem. Unterr.) im Unterricht benutzt wird.

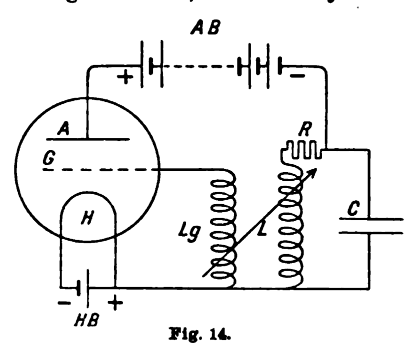


Fig. 14.

Der aus Ohmschem Widerstand R, Selbstinduktionskoeffizienten L und Kapazität C bestehende Schwingungskreis wird bei einer Entladung des Kondensators (etwa nach Einschaltung der Anodenspannung) zu Schwingungen in einer bestimmten Frequenz erregt. Diese Schwingungen werden durch die Kopplung L/L_g so auf das Gitter G der Röhre übertragen, daß dadurch eine Steuerung des Anodenstromes bewirkt wird, die zur Verstärkung der Schwingungen führt. Das erreicht man durch richtige Anpolung des Gitters.

Der dem Anodengleichstrom überlagerte Anodenwechselstrom $\mathfrak{J}_a$ ist die Summe der durch C und $L + R$ fließenden Schwingungsströme, die mit $\mathfrak{J}_C$ und $\mathfrak{J}_L$ bezeichnet werden mögen, so daß also

$$\mathfrak{J}_a = \mathfrak{J}_C + \mathfrak{J}_L. \tag{a}$$

Dann ist der Spannungsabfall $\mathfrak{E}_a$ der Anodenspannung zufolge (16)

$$\mathfrak{E}_a = \mathfrak{J}_L \cdot \mathfrak{R}_L = \mathfrak{J}_C \cdot \mathfrak{R}_C, \tag{b}$$

wenn wir der Kürze halber

$$\mathfrak{R}_L = R + \mathrm{j}\omega L \quad \text{und} \quad \mathfrak{R}_C = -\frac{\mathrm{j}}{\omega C}$$

setzen. Es ist demnach wegen (a) und (b)

$$\mathfrak{J}_a = \mathfrak{E}_a\left(\frac{1}{\mathfrak{R}_L} + \frac{1}{\mathfrak{R}_L}\right)$$

$$= \mathfrak{J}_L\left(1 + \frac{\mathfrak{R}_L}{\mathfrak{R}_C}\right). \tag{c}$$

Die über den Transformator L/L_g in L_g induzierte Gitterspannung $\mathfrak{E}_g$ ergibt sich, wenn M der Koeffizient der gegenseitigen Induktion, zu

$$\mathfrak{E}_g = \mathrm{j}\omega M \cdot \mathfrak{J}_L, \tag{d}$$

wobei wir annehmen, daß kein Gitterstrom fließt. Die Gitterspannung $\mathfrak{E}_g$ beeinflußt nun den Anodenstrom, und es gilt die Beziehung (s. z. B. Barckhausen, Elektronenröhren)

$$\frac{\mathfrak{E}_g}{D} = \mathfrak{J}_a(R_i + \mathfrak{R}_a), \tag{e}$$

wenn D den Durchgriff der Röhre, R_i den inneren und $\mathfrak{R}_a$ den äußeren Widerstand (Widerstand des Schwingungskreises) bedeuten. Setzt man in (e) für $\mathfrak{E}_g$ und $\mathfrak{J}_a$ die Werte aus (c) und (d) ein, so ergibt sich nach Weghebung des gemeinsamen Faktors

$$\mathrm{j}M\omega = D(R_i + \mathfrak{R}_a)\left(1 + \frac{\mathfrak{R}_L}{\mathfrak{R}_C}\right). \tag{f}$$

Nach Gleichung (18) ist $\frac{1}{\mathfrak{R}_a} = \frac{1}{\mathfrak{R}_L} + \frac{1}{\mathfrak{R}_C}$. Berücksichtigt man dies, so wird (f)

$$\mathrm{j}M\omega = D\left(R_i + \frac{\mathfrak{R}_L \cdot \mathfrak{R}_C}{\mathfrak{R}_L + \mathfrak{R}_C}\right)\left(1 + \frac{\mathfrak{R}_L}{\mathfrak{R}_C}\right)$$

$$= \frac{D}{\mathfrak{R}_C}[R_i(\mathfrak{R}_L + \mathfrak{R}_C) + \mathfrak{R}_L \cdot \mathfrak{R}_C].$$

Da nun $\mathfrak{R}_L = R + \mathrm{j}\omega L$ und $\mathfrak{R}_C = -\frac{\mathrm{j}}{\omega C}$, erhalten wir nach Weghebung des gemeinsamen Faktors ω

$$M = CD\left\{R_i\left[R + \mathrm{j}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right] + \frac{L}{C} - \frac{\mathrm{j}R}{\omega C}\right\}.$$

Die Trennung der reellen und „imaginären" Größen ergibt die beiden Gleichungen

$$M = CD\left(R_i R + \frac{L}{C}\right) = DC \cdot R_i R + DL \tag{19}$$

und

$$R_i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) - \frac{R}{\omega C} = 0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{L \cdot C}\left(1 + \frac{R}{R_i}\right)}. \tag{20}$$

Die Diskussion dieser Gleichungen, die physikalisch sehr interessant ist, braucht uns hier nicht weiter zu beschäftigen. (19) enthält die Bedingung für das Eintreten von Schwingungen, während (20) die auch in der Form

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC}\left(1 + \frac{R}{R_i}\right)}$$

(ν = Schwingungszahl) geschrieben werden kann, zur Berechnung der Frequenz dient.

Aufgaben-Repertorium.

Redigiert von Studienrat M. Brettar in Viersen (Burgstr. 2c).

(Alle das Aufgaben-Repertorium betreffenden Zusendungen und Anfragen sind an die Adresse dieses Herrn zu richten.)

A. Auflösungen.

900. Das Logarithmieren algebraischer Summen. Eine algebraische Summe wird

a) zu einer algebraischen Summe,
b) zu einem Produkt,
c) zu einem Quotienten,
d) zu einer Potenz,
e) zu einer Wurzel,
f) zu einem Logarithmus

logarithmiert, indem man den Logarithmus der algebraischen Summe in einem beliebigen System

zu a) durch den Logarithmus der Basis-Summe,
„ b) durch die Summen der Logarithmen der Faktoren,
„ c) durch die Differenz der Logarithmen von Dividend und Divisor,
„ d) durch das Produkt aus Exponent und Logarithmus der Basis,
„ e) durch den Quotienten aus dem Logarithmus des Radikanden und dem Wurzelexponenten,
„ f) durch den Logarithmus des vorgegebenen Logarithmus

in demselben System dividiert. (Heft 2, 1926, Ruff-Wien.)

Lösung. Aus $x^{{}^x\log(a+b)} = a + b$ folgt durch Logarithmieren

$$^x\log(a+b) = \frac{\log(a+b)}{\log x}.$$

a) $x = c + d$: $\quad \frac{\log(a+b)}{\log(c+d)}$. b) $x = c \cdot d$: $\quad \frac{\log(a+b)}{\log c + \log d}$.

c) $x = \frac{c}{d}$: $\quad \frac{\log(a+b)}{\log c - \log d}$. d) $x = c^n$: $\quad \frac{\log(a+b)}{n \cdot \log c}$.

e) $x = \sqrt[n]{c}$: $\quad \frac{\log(a+b)}{\frac{1}{n}\cdot\log c}$. f) $x = {}^n\log c$: $\quad \frac{\log(a+b)}{\log({}^n\log c)}$.

Brehm. Conrad. Diez. Hoffmann. Mahrenholz. Münst. Ruff

Man vgl. diese Zeitschr. Aufg. 673, 709, 711—713.

901. Schneiden sich in einem Dreieck die Höhe h_a, die Winkelhalbierende w_β und die Mittellinie m_c in einem Punkte (D), ferner h_b, w_γ und m_a in einem Punkte (E), so schneiden sich auch h_c, w_α und m_b in einem Punkte (F). Welchen Inhalt hat $\triangle DEF$? Wie lauten die allgemeinen Formeln für ganzzahlige Seiten der Dreiecke ABC? (Heft 2, 1926, Mahrenholz-Kottbus.)

Lösung. Schneiden sich im $\triangle ABC$ h_a, w_β und m_c in einem Punkte, so gilt die Beziehung $\sin\alpha = \operatorname{tg}\beta \cdot \cos\gamma$. Soll ferner die zweite Bedingung der Aufgabe erfüllt sein, so ist $\sin\beta = \operatorname{tg}\gamma \cdot \cos\alpha$, woraus folgt $\sin\gamma = \operatorname{tg}\alpha \cdot \cos\beta$

$\left(\text{oder } \frac{b+c}{b-c} = \frac{c^2}{b^2-a^2}\right)$. Das ist die Bedingung für das Schneiden des letzten Geradentripels. Aus diesen drei Gleichungen ergibt sich, daß $\triangle ABC$ nur *spitzwinklig* sein kann, wobei ein rechter Winkel ausgeschlossen ist. Der Beweis ist recht einfach.

Zur Bestimmung der Winkel fließt aus den Bedingungsgleichungen

1. $\sin\beta(\sin\alpha\cdot\sin\beta - \cos\alpha\cos\beta) = \sin\alpha\cos\beta$
2. $\cos\alpha(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta) = \sin\alpha\cos\beta$, oder
3. $\sin\beta = \frac{\sin\alpha(1-\cos\alpha)}{\sqrt{1-2\sin^2\alpha\cos\alpha}}$, $\cos\beta = \frac{\cos^2\alpha}{\sqrt{1-2\cos\alpha+2\cos^3\alpha}}$.

Für $\cos\alpha = x$ erhält man nach Umformung $x^2\sqrt{1-2x+2x^3} = 1-2x+x^3$ und hieraus $x^4(1-2x)+2x^7 = (1-2x)^2 + 2x^3(1-2x)+x^6$. Mit $1-2x=0$: $x=\frac{1}{2}$; $\alpha = 60^0$. Ebenso findet man $\beta = 60^0$. Das Dreieck ist gleichseitig.

Mit $x^6-x^4+2x^3-2x-1=0$, dem zweiten Faktor, führt die weitere Untersuchung auf $x^4-(1-2x+2x^3) = x^6$, was mit $N=\sqrt{1-2x+2x^3}$ übergeht in $x^4-N^2 = x^6$, also $N = x^2\sqrt{1-x^2} = \cos^2\alpha\cdot\sin\alpha$. Aus 3. ergibt sich dann $\cos\beta = \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha\sin\alpha}$, $\cos\beta = \frac{1}{\sin\alpha}$. Aus dieser Gleichung folgt, daß außer dem gleichseitigen Dreieck keine reelle Lösung existiert. Damit ist die Frage nach dem Inhalt des Dreiecks sowie nach Formeln für ganzzahlige Seiten erledigt. CONRAD. MAHRENHOLZ. MICHNIK. SCHARFFETTER. SÓS.

902. In die konische Düse einer Freistrahlturbine taucht gleichachsig eine Reguliernadel, die in ihrem (nur in Betracht kommenden) vorderen Teile als Drehkörper mit zu bestimmender Meridiankurve ausgebildet ist. Es soll nämlich der bei dem jeweiligen Nadelvorschub x freigelassene Kreisringquerschnitt zu dem vollen Mündungsquerschnitt $F_{\max} = r^2\pi$ der Düse und dem (wie r) gegebenen größten Nadelvorschub a in der Beziehung stehen: $F = F_{\max}\left(1-\frac{x^3}{a^3}\right)$; (vgl. Escher-Dubs, Die Theorie der Wasserturbine). Man konstruiere das Diagramm, dem das zu jedem $0 \leq x \leq a$ gehörige F unmittelbar entnommen werden kann. — Wie lautet die der obigen entsprechenden Gleichung, falls der vordere Nadelteil (entgegen der tatsächlichen Übung) als Kegel vom Grundkreishalbmesser r und der Höhe a ausgeführt würde? Wie würde in diesem Falle das (F, x)-Diagramm zu konstruieren sein? (Heft 2, 1926, Hauptmann-Leipzig.)

Lösung. Der beim Vorschub x von der Nadel freigelassene Kreisringquerschnitt $F = \pi(r^2-\varrho^2)$ soll zum vollen Querschnitt $F_{\max} = \pi r^2$ in der Beziehung stehen $\pi(r^2-\varrho^2) = \pi r^2\left(1-\frac{x^3}{a^3}\right)$; es muß also für die gesuchte Meridiankurve gelten: $\varrho^2 = \frac{r^2}{a^3}x^3$. Das (F, x)-Diagramm (kubische Parabel) ist auf einfache Weise konstruierbar. — Bei kegelförmiger Ausbildung der Nadel wäre $\varrho = \frac{r}{a}\cdot x$, also $F' = \pi(r^2-\varrho^2) = F_{\max}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$. Das (F, x)-Diagramm ist in diesem Falle die gewöhnliche Parabel. — Die Wendetangente der kubischen Parabel läuft parallel zur x-Achse durch $(0; \pi r^2)$. Der Scheitel der quadratischen Parabel liegt in $(0; \pi r^2)$. GRONER. HAUPTMANN. HOFFMANN. KASPER.

903. Im Punkte $P(x_1; y_1)$ soll an eine Ellipse die Tangente gezogen werden unter der Annahme, daß sowohl die Verlängerungen der großen Achse, als auch die Brennpunkte unzugänglich sind. (Heft 3, 1926, Lohnes-Offenbach.)

Lösung. Aus der Fülle der Einsendungen seien folgende Gedankengänge herausgegriffen:

1. Konstruktion vermittels konjugierter Durchmesser.
2. Bestimmung des Schnittpunkts mit der Nebenachse $(y_0 : b = b : y_1)$.
3. Anwendung des Satzes von Pascal.
4. Benutzung des Halbkreises über der großen (bzw. der kleinen) Achse und Konstruktion der Kreistangenten in dem P entsprechenden Punkte.

Brehm. Böcking. Conrad. Diez. Häusler. Hoffmann. Jacob. Kasper. Klobasa. Lohnes. Mahrenholz. Marchand. Mertens. Münst. Peters. Rall. Ruff. Schultheiss. Stiegler.

904. Eine Kugel (r) wird von einer zweiten von innen berührt. Durch den Punkt, in dem die Zentrale der beiden Kugeln die innere schneidet, ist an diese die Berührungsebene gelegt. Wie groß ist der Radius der kleinen Kugel zu wählen, wenn ihr Volumen gleich dem halben Volumen des sie berührenden Kugelabschnittes sein soll? In diesem Falle ist auch die Oberfläche der inneren Kugel gleich der Hälfte der Oberfläche des Kugelabschnittes. (Heft 3, 1926, Gaedecke-Wilmersdorf.)

Lösung. Der Halbmesser der inneren Kugel sei x; das Volumen ist dann $V_x = \frac{4}{3}\pi x^3$. Das Volumen des Kugelabschnitts, dem diese Kugel *nicht* einbeschrieben ist, ist $V_1 = \frac{4}{3}\pi(r-x)^2(r+2x)$. Mit $V_x = \frac{1}{2}V_1$ ergibt sich $x = \frac{r}{3}\sqrt{3}$. Es ist $O_x = \frac{4}{3}\pi r^2$, $O_1 = 2\pi r(2r-2x) + 4\pi x(r-x) = \frac{8}{3}\pi r^2$, also $O_x : O_1 = 1:2$. — [Für den Kugelabschnitt, dem die Kugel einbeschrieben ist, findet man $V_2 = \frac{4}{3}\pi x^2(3r-2x)$. Wegen $V_x = \frac{1}{2}V_2$ ergibt sich jetzt $x = \frac{3}{4}r$. Dann ist $O_x = \frac{9}{4}\pi r^2$, $O_2 = 4\pi r x + 4\pi x(r-x) = \frac{15}{4}\pi r^2$, also $O_x : O_2 = 3:5$].

Brehm. Böcking. Clauss. Conrad. Diez. Götze. Hoffmann. Jacob. Jansen. Kasper. Klobasa. Lohnes. Mahrenholz. Mertens. Münst. Peters. Rall. Ruff. Sós. Stiegler.

Anmerkung. Die verallgemeinerte Aufgabe findet sich bei Emmerich, Kubische Gleichungen aus der Stereometrie, S. 19, Aufg. 145; ferner Lampe, Geometrische Aufgaben zu den kubischen Gleichungen, S. 78, Aufg. 56.

Mahrenholz.

B. Neue Aufgaben.

958. Soll eine Parabel zweiter Ordnung bestimmt werden, welche die x-Achse im Punkt $P(a; 0)$ berührt, durch den Punkt $Q(p; q)$ hindurchgeht und auch die y-Achse berührt, so existiert stets eine uneigentliche Lösung. Sind a und p gleichbezeichnet, so existieren für $a \neq p$ zwei eigentliche Lösungen, die auf der y-Achse die Berührungspunkte $\left(0; \frac{aq}{a+p+2\sqrt{ap}}\right)$ bzw. $\left(0; \frac{aq}{a+p+2\sqrt{ap}}\right)$ ergeben; ist aber $a = p$, so gibt es nur eine eigentliche Lösung mit dem Berührungspunkt $\left(0; \frac{q}{4}\right)$ und der Leitlinie $4ax + qy = 0$.

Hoffmann-Ravensburg.

959. Die Gleichung $z^3 - 6a^2z^2 + 9a^4z = 4a^6\cos^2\alpha$ hat die Wurzeln $4a^2\cos^2\frac{\alpha}{3}$, $4a^2\cos^2\frac{\pi-\alpha}{3}$, $4a\cos^2\frac{\pi+\alpha}{3}$.

Mahrenholz-Kottbus.

960. Eine photographische Platte sei in einer vertikalen Ebene bei der Belichtung so geneigt worden, daß die eigentlich vertikal sein sollenden Linien des Randes mit der Vertikalen den Winkel $\alpha < 90$ bilden. Wie muß man den Abzug beschneiden, damit vertikale Linien in der Natur parallel zu Randlinien des rechteckigen, möglichst breiten Abzuges werden?

Stiegler-Madrid.

961. In einer Ellipse mit vertikaler Hauptachse ist der Durchmesser zu bestimmen, der von einem fallenden Körper in der kürzesten Zeit zurückgelegt wird.

Michnik-Beuthen.

Briefkasten zum Aufgaben-Repertorium.

Bis zum 1. Juli gingen an Auflösungen ein: Bücking-Darmstadt 949. 950. 952. Conrad-Moers 931. 933. 934. Ehrlich-Berlin 949. 950. Halberstadt-Berlin 949—951. Herbst-Bochum 949. Lohnes-Offenbach 939. 940. 944. 949. Mahrenholz-Kottbus 949 bis 953. Michnik-Beuthen 942. 949—956. Münst-Ebingen 941. 944. 947—953. Ruff-Wien 947 (Verallg.), 951. Scharffetter-Memel 926. 935. 940. 951. Sós-Budapest 947. 950. 951. Stiegler-Madrid 932. 949. 952. Tafelmacher-Dessau 948.

Neue Aufgaben sandten ein: a) mit Lösung: Ehrlich-Berlin (1), Haag-Stuttgart (1), Jacob-Erfurt (3), Mahrenholz-Kottbus (3); b) ohne Lösung: Jacob-Erfurt (6).

Notiz zu den Anfragen betr. Aufgabe 953: Für den Segmentarwinkel gilt die Beziehung $\operatorname{ctg}\delta = \frac{a^2+b^2+c^2}{4\Delta}$ (Crelle). — Lit.: Emmerich, Die Brocardschen Gebilde, Berlin 1891, S. 7. — A. Tafelmacher, Über einen geometrischen Ort und eine neue Art von Dreieckskoordinaten, diese Zeitschr. Bd. 37 (1906), S. 330—345, 483—499.

Berichte.

Organisation, Verfügungen.

Der neue mathematische Lehrplan für die bayrischen höheren Schulen. Seit Erscheinen der Schulordnung vom 10. Juni 1914 hat der mathematische Unterricht an den höheren Schulen Bayerns zweimal eine geringfügige Änderung des Stundenausmaßes erfahren, beidemal an der *Oberrealschule*; er verlor hier zuerst eine seiner 5 Stunden in der 9. Klasse, als im August 1918 der Geographieunterricht bis in die Oberklasse fortgesetzt wurde; 1926 verlor er dazu eine Stunde in der 4. Klasse im Zusammenhang mit der Durchführung der 30-Stundenwoche. Vielleicht waren diese beiden Stundenverluste der äußere Anlaß zur Herausgabe der neuen leicht geänderten Lehrstoffverteilung, über die hier in Kürze berichtet werden soll.

Jedenfalls ist im Zusammenhang damit aus der 4. Klasse „Rechnen", aus der 9. Klasse „darstellende Geometrie" verschwunden; das Rechnen als eigener Lehrgegenstand ist damit auf die drei ersten, die darstellende Geometrie auf die 7. und 8. Klasse beschränkt. Jenes wird man billigen; die Vorschrift: „Aufgaben aus dem bürgerlichen Leben, der Physik, Planimetrie und Stereometrie unter Berücksichtigung des abgekürzten Rechnens sowie auch unter Benutzung der Gleichungen ersten Grades mit einer Unbekannten als Vorbereitung der systematischen Behandlung in der Algebra" dürfte ihrer inneren Haltlosigkeit wegen nie ernstlich durchgeführt worden sein; und ebensowenig kann man bedauern, daß auch im Lehrplan des Gymnasiums und Realgymnasiums das

Rechnen der 4. Klasse verschwunden ist, dessen Zielleistung „Aufgaben aus dem bürgerlichen Leben (Teilungs- und Mischungsrechnung) und aus der Flächen- und Körperberechnung unter Benutzung von Gleichungen ersten Grades mit einer Unbekannten" auch nicht glücklicher bestimmt war. Das Verschwinden der darstellenden Geometrie aus der 9. Klasse läßt die Frage auftauchen, ob eine darstellend geometrische Aufgabe unter den Absolutorialaufgaben weiterhin sich finden soll, die der Mathematiker vorschlägt, und ob dafür die Übungen in der darstellenden Geometrie in bescheidenem Umfang auch in der 9. Klasse fortgesetzt werden sollen, obwohl sie hier nicht mehr eigens genannt ist; als eigentlicher Verlust kann die etwas geminderte Bewertung der darstellenden Geometrie, die ja doch in der Hauptsache ein technisches Fach ist, gleichfalls nicht angesehen werden.

Auch weiterhin ist zunächst vom mathematischen Pensum der *Oberrealschule* die Rede. Aus der 2. Klasse in die erste sind größter gemeinschaftlicher Teiler und kleinstes gemeinschaftliches Vielfaches vorgezogen und in Zusammenhang mit der Zerlegung in Primfaktoren gebracht, die schon bisher zur ersten Klasse gehörte. Daß an die Behandlung der dezimalen Maße, die dann in der zweiten Klasse wiederkehren, schon in der ersten die „dezimale Schreibweise" angeschlossen und damit ein kleines Stück Dezimalbruchrechnung vorausgenommen werden soll, wird dem nicht unbedenklich erscheinen, der Simons schlagende Gegengründe billigt. Aus der ersten Klasse sind die graphischen Darstellungen verschwunden, in der zweiten gekürzt, in durchaus richtiger Würdigung ihres Wertes für die Anfangsstufe. Vielleicht ist auch nicht absichtslos in der bisherigen Angabe für die zweite Klasse „einfache Übungen im Kopfrechnen" nunmehr „einfache" weggelassen; in der Tat sind höhere Anforderungen an das Kopfrechnen wohlberechtigt. In der *dritten* Klasse ist das „abgekürzte Rechnen mit Dezimalbrüchen" endlich gestrichen, das immer ein wertloses Kapitel war, weil es fast nie darauf ankommt, mit genauen Zahlen willkürlich ungenau, sondern vielmehr darauf mit notwendig ungenauen Zahlen möglichst genau zu rechnen, *diese* Aufgabe aber algebraische Kenntnisse verlangt. Daß die zusammengesetzten Schlußrechnungen nun auf „einige wenige einfache Beispiele" beschränkt werden sollen, ist billigenswert; sie hätten ganz gestrichen werden können. Erfreulich ist die Hinzufügung von Aufgaben über Effekten. „Aufgaben aus der Flächen- und Körperberechnung" in der dritten Klasse sind ein Residuum des aus der vierten gestrichenen Rechenunterrichts, das wohl vorzeitig ausscheidenden Schülern zu Gefallen hier eingefügt worden ist.

Im *Planimetrie*unterricht der 3. Klasse sind nun nicht mehr „*gelegentliche* Längen- und Winkelmessung im Gelände", sondern „*von Anfang an* Übungen im Gelände" verlangt; das frühere Verbot, in dieser Klasse Schulaufgaben aus der Planimetrie zu halten, ist nunmehr durch die vernünftigere Vorschrift — die dem Wunsch der Schüler entgegenkommt — ersetzt worden, in den letzten Schulaufgaben des Jahres auch die Geometrie zu berücksichtigen. Weitere Änderungen weist der Planimetrieunterricht nicht auf, der nach wie vor in der 5. Klasse abschließt. Auch die Anweisung über *Stereometrie* (5. und 6. Klasse), in die von jeher etwas darstellende Geometrie eingebaut war, zeigt nur einige formale Änderungen, falls nicht „Parallelprojektion des Kreises" als sachlicher Zusatz zu werten ist. In der *Trigonometrie* (6. und 7. Klasse) ist bei der Behandlung des schiefwinkligen Dreiecks Beschränkung auf den Sinus- und Co-

sinussatz gefordert, was angesichts der Winkelbestimmung aus den Seiten wohl eine etwas zu weitgehende Beschränkung des trigonometrischen Formelschatzes bedeutet, der freilich nicht zu weit entwickelt werden darf. Bei solcher Abstinenz hätte auch auf den Cotangenssatz der sphärischen Trigonometrie (7. Klasse) verzichtet werden können, der ebenfalls entbehrlich und obendrein fast unmerkbar ist, jedoch eigens aufgeführt wird. Sehr berechtigterweise ist die Voranstellung des rechtwinkligen sphärischen Dreiecks vor das schiefwinklige aufgegeben.

Die *Algebra* erstreckt sich ohne wesentliche Änderungen von der 4. bis zur 7. Klasse. Zustimmend kann hervorgehoben werden, daß in der 6. Klasse nur mehr das „*Prinzip* des Rechenschiebers" aufgeführt ist, sein Gebrauch erst von der 7. Klasse an verlangt wird, und daß in der 7. Klasse der Behandlung der komplexen Zahlen nun eine „zusammenfassende Wiederholung über den Aufbau des Bereiches der reellen Zahlen" vorausgeschickt ist, die schon immer an diese Stelle gehörte; weiterhin, daß die Behandlung der komplexen Zahlen eingeschränkt und der Zusammenhang zwischen Koeffizienten und Wurzeln einer Gleichung aus der 8. Klasse in die 7. vorgezogen worden ist. Doch bedauere ich, daß die Gleichung 3. Grades noch immer nicht aufgenommen wurde, die mathematikgeschichtlich von Bedeutung ist und bei welcher durch den casus irreducibilis erst die Unvermeidbarkeit der komplexen Zahlen offenbar wird; sowie, daß die Kreisteilungsgleichungen gestrichen wurden, die ich schon als Huldigung vor dem Genie unseres Gauß nicht vermissen mag, dessen Name nicht inhaltsleer werden darf.

Die 8. und 9. Klasse hat *Infinitesimalrechnung*. Erfreulicherweise ist in der kombinatorischen Vorbereitung darauf wenigstens in Klammern der Wahrscheinlichkeitsbegriff genannt, der unterrichtlich zweifellos noch lange nicht nach Gebühr gewürdigt wird. In der Differentialrechnung ist leider e^x und $ln x$ noch immer der 9. Klasse zugewiesen, obwohl beide beim Physikunterricht schon der 8. Klasse gebraucht werden, z. B. in der Lehre vom Wechselstrom (es müßte denn sein, daß die noch ausstehende Revision des Physiklehrplans den Wechselstrom gebührendermaßen in die 9. Klasse verschieben sollte!) und obwohl dadurch die Differentialrechnung zerrissen wird. Daß die Taylorsche Reihe nun die einheitliche Quelle der Potenzreihen für die elementaren Funktionen bilden soll, ist erfreulich: auf die Leibnizsche Reihe für $\frac{\pi}{4}$ und damit auf die arctg-Reihe wird man nicht verzichten wollen, obwohl sie nicht genannt ist. Die *Integralrechnung* ist mit ihren Anfängen aus der 9. in die 8. Klasse vorgezogen; sie dürfte jedoch für die Bedürfnisse der Physik (z. B. in der Lehre vom Potential), wenigstens bei der gegenwärtigen Anordnung des Physikpensums, z. T. nicht rechtzeitig zur Verfügung stehen. Unter den Integrationsmethoden ist die Partialbruchzerlegung, wie mir scheint ohne Not, gestrichen; die Lagrangesche Formel belastet kaum, frischt die Algebra auf und ist systematisch nicht zu entbehren.

Die *darstellende Geometrie* der 7. Klasse ist dadurch nicht unwesentlich erleichtert, daß die gegenseitigen Durchdringungen der ebenflächigen Körper nicht mehr verlangt werden. Daß die darstellende Geometrie in der 9. Klasse nicht mehr auftritt, wurde schon gesagt.

Weggelassen ist auch die *synthetische Geometrie* (8. und 9. Klasse). Nur

das harmonische, nicht mehr das allgemeine Doppelverhältnis und seine Unveränderlichkeit bei Zentralprojektion ist geblieben, die projektive Erzeugung der Kegelschnitte und der Pascalsche Satz aber gefallen. Mir scheint dadurch ohne zwingende Not und ohne großen Gewinn eine gewisse Verarmung im tieferen Verständnis der Kegelschnitte, zugleich mit unterrichtlichen Erschwerungen, z. B. in der Entwicklung der Polarentheorie, bedingt zu sein, auch der Eindruck von Pascals ehrwürdiger Gestalt ist geschmälert.

In der *analytischen Geometrie* (8. und 9. Klasse) ist das Kreisbüschel gestrichen, was ich gleichfalls bedauere, nicht nur aus wissenschaftlichen Gründen, weil nun den konfokalen Kegelschnittsystemen das Gegenstück beim Kreis fehlt, sondern, ich darf sagen, aus ästhetischen, dazu aus philosophischen Gründen, da an das parabolische Büschel axiomatische Fragen angeknüpft werden können.

Kürzer kann ich mich bezüglich des mathematischen Pensums von Gymnasium und Realgymnasium fassen. Zunächst ist daran zu erinnern, daß in Bayern — und wohl nur in Bayern — diese beiden Anstalten in ihrem mathematischen Pensum vollständig identisch sind. Außerdem stimmt für die drei unteren Klassen das mathematische Pensum von Gymnasium und Realgymnasium mit dem der Oberrealschule vollständig überein, was etwa notwendig werdende Umschulung erleichtert. In der Planimetrie sind die Verwandlungs- und Teilungsaufgaben aus der 5. Klasse in die 4. vorausgenommen und an die Lehre von der Flächengleichheit angeschlossen, wohin sie gehören. Im übrigen ist in der Planimetrie (3.—6. Klasse) nichts geändert. In der Algebra (4.—7. Klasse) ist etwas Potenzlehre in die 5. Klasse vorgenommen, sonst nichts geändert. In der Trigonometrie (7. und 8. Klasse) wird das ebene Dreieck nun in der 7. Klasse abgeschlossen; die Lehre vom Kugeldreieck beschränkt sich immer noch auf das rechtwinklige und gleichschenklige Dreieck, womit die sphärische Astronomie wohl nicht ganz auskommen kann. Die Stereometrie ist aus der 7. Klasse entfernt, ganz in die 8. verwiesen und durch den Queteletschen Satz und die Definitionen der Kegelschnitte erweitert. Die 9. Klasse enthält wie bisher ein Stück analytischer Geometrie der Geraden, des Kreises und der auf die Hauptachsen bezogenen Kegelschnitte, ein Stück „mathematischer Geographie" (Kopernikus, Kepler, Newton, Sonnensystem, Fixsternhimmel) und ein gegen früher deutlich erweitertes Stück Infinitesimalrechnung, das am kürzesten durch Wiedergabe der Lehrvorschrift charakterisiert wird: „Der Begriff des Grenzwertes. Der Differentialquotient von ganzen rationalen Funktionen sowie der Sinus- und Kosinusfunktion. Seine Anwendung auf die Begriffe der Geschwindigkeit und der Beschleunigung sowie auf die Lösung von Aufgaben über Höchst- und Tiefstwerte. Das unbestimmte und das bestimmte Integral. Dessen Anwendung bei Flächen- und Rauminhaltsberechnungen."

Zusammenfassend kann man sagen: Die Änderungen im mathematischen Lehrplan der Gymnasien und Realgymnasien dürfen restlos mit Zustimmung und Genugtuung vermerkt werden und auch den Änderungen im Pensum der Oberrealschule kann weitgehend zugestimmt werden, wenngleich hier vielleicht eine etwas durchgreifendere Durchforstung des Lehrgutes mit Abbau und Ausbau erwünscht gewesen wäre.

Nürnberg. CRAMER.

Persönliches.

Wilhelm Ahrens †. Am 23. April starb in Rostock Dr. Wilhelm Ahrens. Er war 1872 zu Lübz in Mecklenburg geboren. Nach dem Studium in Rostock, Berlin, Freiburg und Leipzig war er Lehrer an der Allgemeinen deutschen Schule in Antwerpen, dann in Magdeburg an der Baugewerkschule und der Maschinenbauschule. Seit 1904 lebte er ganz seiner schriftstellerischen Tätigkeit. Seine Werke sind wohl fast jedem Mathematiker bekannt, vor allem das große über „Mathematische Unterhaltungen und Spiele".[1]) Verbreiteter ist naturgemäß noch das kleinere aus „Natur- und Geisteswelt".[2]) Weiter ist „Altes und Neues aus der Unterhaltungsmathematik"[3]) zu nennen. Geht bei diesen Werken die wissenschaftliche Behandlung der Spiele mit der historischen Hand in Hand, so sind das weitverbreitete „Scherz und Ernst in der Mathematik"[4]), dessen Titel allerdings wenig über den Inhalt sagt, und die Schriften über Jacobi[5]) sowie die kleinen „Mathematikeranekdoten"[6]) ausgesprochen historischer Natur. Sie leiten zu einer Anzahl kulturgeschichtlicher Arbeiten über, auf deren Vorhandensein ich nur hinweisen kann, ebenso wie auf seine vielen Zeitschriftenaufsätze. — Leider hat die Ungunst der Zeit und sein früher Tod verhindert, daß seine schriftstellerische Tätigkeit ihren krönenden Abschluß gefunden hat: sein seit langem geplantes und wohl größtenteils vollendetes Werk über die magischen Quadrate harrt noch der Veröffentlichung.

Rostock. G. WANGERIN.

Bücherbesprechungen.

Die Preise der besprochenen Bücher sind nach den Mitteilungen der Verlagsanstalten im Erscheinungsmonat angegeben. Da die Buchhandlungen sich Änderungen vorbehalten, kann keine Sicherheit dafür geboten werden, daß die angegebenen Preise auch heute noch gelten.

Moritz Schlick, Allgemeine Erkenntnislehre. 2. Aufl. 1. Bd. der Sammlung: Naturwissenschaftliche Monographien und Lehrbücher. X u. 375 S. Berlin 1925, Julius Springer. Geh. RM 18.—.

Es ist charakteristisch für das vorliegende Werk, daß es an der Spitze einer Sammlung naturwissenschaftlicher Monographien erscheint. Es kommt darin zum Ausdruck, daß die Philosophie Moritz Schlicks zu den Naturwissenschaften und unter ihnen wieder zu den exakten in einem besonders innigen Verhältnis steht. „Die obersten Prinzipien (der Erkenntnis) müssen sich", so meint der Verfasser im Vorwort zur ersten Auflage, „am leichtesten in denjenigen Disziplinen auffinden lassen, die selbst schon eine möglichst hohe Stufe der Allgemeinheit erklommen haben." Und das sind eben die exakten Naturwissenschaften.

Als Kernstück des ganzen Buches ist wohl der 1. Teil zu betrachten, der sich mit dem Wesen der Erkenntnis befaßt. Dieses Wesen sieht der Verfasser in der

---

1) I. Bd. 3. Aufl. 1921, II. Bd. 2. Aufl. 1918, Leipzig, B. G. Teubner.

2) Mathematische Spiele, 4. Aufl. 1919, Leipzig, B. G. Teubner.

3) Berlin 1918, Springer.

4) Leipzig 1904, B. G. Teubner.

5) C. G. J. Jacobi als Politiker, Leipzig 1907, B. G. Teubner, und zusammen mit P. Staeckel, Der Briefwechsel zwischen C. G. J. Jacobi und P. H. von Fuß über die Herausgabe der Werke Bernhard Eulers, ebd. 1908, und C. G. J. Jacobi und M. H. Jacobi, Briefwechsel, ebd. 1907.

6) 2. Auflage, Mathematisch-physikalische Bibliothek Band 18, Leipzig 1920, B. G. Teubner.

Zuordnung, die zwischen den Urteilen und den Tatbeständen hergestellt wird. Die Wahrheit eines Urteils soll in der Eindeutigkeit der Zuordnung bestehen, die das Urteil bewirkt. Hier möchte ich eine kritische Bemerkung einschalten: es ist nicht recht verständlich, wie von der Wahrheit eines einzelnen Urteils gesprochen werden kann, wenn die Wahrheit mit der Eindeutigkeit der Zuordnung identisch ist. Das Kriterium der Wahrheit eines Urteils wäre demnach, daß es nur eine Tatsache gibt, die ihm zugeordnet ist; aber erstens sehe ich keinen Weg, dies zu entscheiden, und zweitens entspricht es auch keineswegs der Praxis des Erkennens. Das Beispiel, das der Verfasser anführt, ist nicht sehr glücklich gewählt. S. 57 wird als Beispiel eines falschen Urteils angeführt: „Ein Lichtstrahl besteht in einem Strome schnell bewegter Körperchen.“ Seine Falschheit wird damit begründet, daß damit verschiedene Tatsachenklassen, nämlich das Licht und die Kathodenstrahlen (beispielsweise), durch die gleichen Symbole bezeichnet würden. Aber so etwas kommt in der Physik häufig vor, ohne daß die betreffenden Urteile deswegen als falsch angesehen würden. Ich erinnere nur an die zahlreichen Anwendungen der Potentialtheorie. Der Verfasser fügt allerdings gleich hinzu, daß außerdem zwei identische Tatsachenreihen, nämlich die der Lichtfortpflanzung einerseits und die der Wellenausbreitung andererseits, verschiedenen Zeichen zugeordnet würden. Aber dagegen läßt sich wieder zweierlei sagen: erstens wird damit von der Zuordnung zwischen Urteilen und Tatsachen nicht nur Eindeutigkeit, sondern sogar Eineindeutigkeit in dem Sinne verlangt, daß auch jeder Tatsache nur ein Urteil zugeordnet werden dürfe, eine Forderung, die für die Zuordnung zwischen Zeichen und Bezeichnetem S. 55 ausdrücklich abgelehnt worden ist. Zweitens aber wird mit diesem Argument die Falschheit der Emissionstheorie auf die Wahrheit der Undulationstheorie zurückgeführt, und es entsteht die Frage, wie deren Wahrheit im Einklang mit der Wahrheitsdefinition zu begründen ist.

Die Schlickschen Definitionen von Erkenntnis und Wahrheit sollen mit dieser kritischen Bemerkung nicht schlechthin abgelehnt werden, aber es scheint mir jedenfalls in dem Begriff der Zuordnung noch eine Unklarheit zu stecken, die beseitigt werden müßte, wenn die Theorie aufrechterhalten werden soll. Ich glaube, daß mit einigen Modifikationen die Theorie zu halten ist, aber es ist hier nicht der Ort, um darauf näher einzugehen.

Als besonders gelungen möchte ich unter den Paragraphen des 1. Teiles noch den über die implizite Definition hervorheben; die fundamentale Rolle dieses Denkmittels für die moderne Mathematik und theoretische Physik ist bisher von den Philosophen noch viel zu wenig gewürdigt worden. Hiermit in engem Zusammenhange stehen die Ausführungen des in der zweiten Auflage neu hinzugekommenen § 11 über „Definitionen, Konventionen und Erfahrungsurteile“. Die Behandlung dieser gerade heute sehr umstrittenen Probleme beweist, daß Schlick in das Wesen und die Methoden der modernen Physik tiefer eingedrungen ist als die meisten zeitgenössischen Denker, wenn auch er noch manche Fragen ungelöst lassen muß.

In bezug auf die übrigen Teile des Buches müssen wir uns mit einer kurzen Inhaltsangabe begnügen. Der 2. Teil behandelt „Denkprobleme“. Darunter versteht der Verfasser diejenigen Probleme, die sich auf den Zusammenhang der Urteile untereinander beziehen. Aber auch das Verhältnis des Psychologischen zum Logischen, die Evidenz und die innere Wahrnehmung werden in diesem Teil behandelt. Bei weitem am umfangreichsten ist der 3. Teil mit dem Titel „Wirklichkeitsprobleme“. Er besteht wieder aus drei Unterteilen, die die „Setzung des Wirklichen“, die „Erkenntnis des Wirklichen“ und die „Gültigkeit der Wirklichkeitserkenntnis“ behandeln. Auf diesen letzten Teil müssen wir noch mit ein paar Worten eingehen. Der Verfasser behandelt hier das Problem, das mit dem Namen Humes in der Geschichte der Philosophie verknüpft ist. Es ist die Frage, wie wir dazu kommen, Aussagen über Vorgänge der Wirklichkeit zu machen, die wir nicht wahrgenommen haben. In der Terminologie Kants handelt es sich um das Problem der synthetischen Urteile a priori. Schlick verneint die Möglichkeit solcher Urteile, insofern ist er Empirist. Dabei sieht er klar, daß eine apodiktische Erkenntnis auf empirischem Wege nicht zu gewinnen ist. Infolgedessen erklärt er alle synthetischen Urteile über nicht Wahrgenommenes für Hypothesen. Sie sind

niemals gewiß, sondern nur wahrscheinlich, wobei er die Schwierigkeiten, die in dem Wahrscheinlichkeitsbegriff stecken, erkennt, ohne sie — wenigstens in diesem Buche — zu lösen. Aber selbst wenn man hiervon absieht, bleibt noch die Frage: Mit welchem Recht fällen wir überhaupt Urteile über nicht wahrgenommene Gegenstände? Diese Frage wird nicht wesentlich einfacher, wenn wir diesen Urteilen nur wahrscheinliche und nicht apodiktische Gültigkeit zuschreiben. Auch dieses Problem sieht der Verfasser, aber er verzweifelt an seiner Lösung; denn die an pragmatistische Gedankengänge gemahnenden Ausführungen, die er daran knüpft, hält er offenbar selbst nicht für eine Lösung. So kommt unser Philosoph genau wie David Hume zu einem resignierten Skeptizismus, und der Leser gewinnt den Eindruck, daß die Erkenntnistheorie seit den Zeiten des großen Briten wenigstens hinsichtlich ihres zentralen Problems eigentlich keine Fortschritte gemacht hat. Doch wie dem auch sei, es ist jedenfalls für einen Philosophen ehrenvoller, einzugestehen, daß er ein Problem nicht lösen kann, als sich selbst und den Leser mit einer Scheinlösung zu betrügen. Die großen Verdienste, die sich Schlick mit dem vorliegenden Buche um die Erkenntnislehre erworben hat, werden durch den skeptischen Schluß nicht geschmälert.

Berlin-Johannisthal. Kurt Grelling.

Clauberg u. Dubislav, Systematisches Wörterbuch der Philosophie. V u. 565 S. Leipzig 1923.

Das Werk sucht die axiomatische Methode auf das System unseres Wissens anzuwenden. So kommt es den Verfassern nicht darauf an, unter einem bestimmten Stichwort über die bisher von den Philosophen über den betr. Begriff vorgebrachten Theorien zu berichten, sondern vielmehr die Bedeutung des Wortes möglichst klar festzustellen. Ein Teil der philosophisch wichtigen Wörter wird „erläutert", ein anderer definiert (indem der bestehende Sprachgebrauch wortanalytisch beschrieben wird). Dabei wurde Sorge getragen, daß die wichtigsten, in einer solchen Definition vorkommenden Ausdrücke ihrerseits im Buche definiert oder erläutert werden (Kettendefinition).

Die Einteilung der Begriffe in Unterbegriffe wird vielfach in übersichtlichen Stammbäumen gegeben, z. B. unter den Stichwörtern „Wissenschaft", „Gegenstand", „Strafe".

Besonderen Nutzen wird auch der Mathematiker aus dem Werke ziehen; so findet er z. B. darin die Axiome der Arithmetik und der Mengenlehre.

Göttingen. P. Hertz.

A. Czwalina, Die Kegelschnitte des Apollonius. 220 S. München, 1926, Oldenbourg. Kart. RM 10.—.

Czwalina gibt hier eine deutsche Übersetzung der ersten vier vollständig in der Ursprache erhaltenen Bücher der Conica. Ich bin nicht berufen, die Genauigkeit der Übersetzung zu beurteilen; ich kann nur sagen, daß sie sich flüssig liest und zu wirklicher Lektüre in der Schule — ich empfehle dafür in erster Linie die Darstellung bekannter Sätze im zweiten Buch — brauchbar ist. Der Übersetzung sind einige Anmerkungen angefügt. Die Figuren hätte ich mir besser gewünscht, ich ziehe diejenigen in der Heibergschen Ausgabe des Apollonius (2 Bd., Leipzig 1891 u. 1893 B. G. Teubner), die ich übrigens dem Gymnasiallehrer neben der Übersetzung zu Rate zu ziehen empfehle, vor, obwohl auch sie noch mangelhaft sind. War es übrigens nötig, von der griechischen Buchstabenbezeichnung zur lateinischen überzugehen?

Es ist erfreulich, daß uns nun wieder einer der großen griechischen Mathematiker in deutscher Sprache erschlossen ist. Hoffentlich folgt nun endlich auch einmal eine moderne, vollständige deutsche Euklidausgabe.

Göttingen. W. Lietzmann.

Mathematisch-Physikalische Bibliothek. Herausgegeben von W. Lietzmann und H. Witting.

Bd. 3, W. Lietzmann, Der pythagoreische Lehrsatz. 3. Aufl.;
Bd. 26, B. Kerst, Methoden zur Auflösung geometrischer Aufgaben. 2. Aufl. Leipzig, B. G. Teubner.

Bd. 3. Ein interessantes Heftchen, das sich einen immer größer werdenden Kreis von Liebhabern erobert, und dem unbedingt ein Platz in der Schülerbibliothek gebührt. Wenn auch nicht erschöpfend, so doch umfassender, als man auf dem kleinen Raum vermutet, gibt Verf. an diesem klassischen Beispiel in fesselnder Darstellung einen Einblick in Zusammenhänge verschiedener mathematischer Gebiete, die auch im Unterricht nutzbringend verwertet werden können. Additions- und Subtraktionsbeweise, arithmetisch und geometrisch beleuchtet, die Stellung des pythagoreischen Lehrsatzes im Euklidischen System, pythagoreische Zahlen, das Fermatsche Problem sind Stichworte, die in Umrissen über den Inhalt Auskunft geben. Geschichtliche Bemerkungen, Literaturhinweise und geschickt eingestreute Fragen regen zum Nachdenken an und bewahren vor oberflächlichem Studium.

Bd. 26. Der Titel sagt weniger, als das Werkchen bietet, denn es behandelt an 136 Aufgaben, von denen ein Teil mit Lösung versehen ist, ein Konstruktionsmittel, das bisher im Unterricht meist zu kurz zu kommen pflegte: die Bewegung, Parallelverschiebung, Drehung, Umlegung, Dehnung sind die Grundfaktoren, mit welchen in eleganter Weise Konstruktionsprobleme nicht nur bewältigt, sondern auch — und das ist unstreitbar das Wertvolle an der Arbeit — lebendig, gehaltvoll und anregend gemacht werden. — Der Telegrammstil bei der Formulierung mancher Aufgaben ließe sich vermeiden.

Viersen. BRETTAR.

E. Gehrcke, Handbuch der physikalischen Optik. Bd. II. Erste Hälfte. 418 S. Mit 166 Abbildungen im Text. Leipzig 1927, Johann Ambrosius Barth. Brosch. *RM* 37.50.

Vor kurzem (s. diese Zeitschr.) konnten wir darauf hinweisen, daß das bekannte Handbuch der Physik von Winkelmann in dem vorliegenden Handbuche eine teilweise Wiedergeburt erfährt. Der neuerschienene Teilband erinnert allerdings kaum mehr an den Vorgänger; denn durchweg neue Bearbeiter behandeln in ihm eine Reihe alter und besonders neuer Themen nach dem letzten Stande der Wissenschaft. Es trugen bei K. F. Bonhoeffer den Abschnitt: Chemische Wirkungen des Lichtes (18 S.), W. Meidinger: Die Bromsilberplatte (39 S.), O. Mente: Technische Reproduktionsverfahren (20 S.), E. Lehmann: Farbenphotographie (13 S.), E. Einsporn: Spektralanalyse (84 S.), G. Hansen: Die Feinstruktur der Spektrallinien (45 S.), R. Tomaschek: Phosphoreszenz, Fluoreszenz und chemisches Reaktionsleuchten (128 S.), E. Einsporn: Anregungsspannungen und Ionisationspotentiale (25 S.), K. W. Meißner: Seriengesetze der Linienspektra (34 S.).

Es sei besonders darauf hingewiesen, daß die Bearbeitung des Lenard-Schülers Tomaschek fast den dritten Teil des Teilbandes einnimmt. Damit dürften die bekannten und bedeutungsvollen Arbeiten Lenards über den behandelten Gegenstand, die sich mit modernen Anschauungen über die Lichterregung so eng berühren, zum ersten Male in einem Buche eine zusammenfassende und eingehende Darstellung gefunden haben. Bemerkenswert ist für ein physikalisches Handbuch auch der Abriß über das technische Reproduktionsverfahren von O. Mente, der über den allgemein interessierenden Gegenstand eine recht gute Aufklärung gibt. — Mit Fleiß und Umsicht finden wir in den Bearbeitungen im Abriß alles zusammengetragen und dargestellt, was von Bedeutung und wissenschaftlichem Interesse ist. Zur Vertiefung der Studien wird auf die einschlägigen Originalarbeiten überall in Fußnoten hingewiesen. In den von Bonhoeffer, Einsporn und Meißner behandelten Abschnitten kommen die modernen Theorien, die sich um den Begriff des Lichtquants herumranken, zu ihrer Geltung; die Darstellungen führen vor Augen, wie bedeutungsvoll für den Fortschritt der Wissenschaft sich

die Einführung dieses Begriffes bewährt hat. — Mathematische Rechnungen und Theorien treten in diesem Teilbande ganz zurück; die Darstellungen, der Natur der Sache nach einfach mitteilend, sind flüssig geschrieben und leicht lesbar. Das eingestreute Figurenmaterial ist mit Sorgfalt ausgewählt und bemerkenswert gut — teilweise auf Glanzpapier — reproduziert, das Buch technisch überhaupt aufs beste ausgestattet.

Hamburg. W. Hillers.

O. D. Chwolson, Lehrbuch der Physik. 2., verbesserte und vermehrte Auflage. 4. Bd., zweite Abteilung. Das konstante Magnetfeld. Herausgegeben von Gerh. Schmidt. 565 S. Mit 181 Abb. Braunschweig 1927, Friedr. Vieweg & Sohn. Geh. *RM* 18.—, geb. *RM* 20.50.

Während die dritte Auflage des bekannten vielbändigen Lehrbuches schon ihr Neuerscheinen begonnen hat (s. diese Zeitschr.), geht mit dem vorliegenden Teilbande die seit 1922 im Erscheinen begriffene zweite Auflage der Vollendung entgegen. In etwas ungewohnter Einteilung behandelt dieser im 3.—7. Kapitel auch die Gesetze der elektrischen Ströme, als der Quellen des magnetischen Feldes. Bei der schon für die früheren Bände erwähnten knappen Darstellung der physikalischen Tatsachen, Gesetze und Einzelforschungen bietet der Teilband einen ungeheuer reichen Inhalt; eingehende Literaturübersichten zu den einzelnen Paragraphen geben die Nachweise für die berücksichtigten zahlreichen Originalarbeiten.

Hamburg. W. Hillers.

V. F. Heß, Die elektrische Leitfähigkeit der Atmosphäre und ihre Ursachen. Bd. 84/85 der „Sammlung Vieweg: Tagesfragen aus den Gebieten der Naturwissenschaften und der Technik". Braunschweig 1926, F. Vieweg & Sohn, A.-G. Geh. *RM* 9.50.

Die Frage nach der Ursache des elektrischen Zustandes der Atmosphäre hat seit der Entdeckung der elektrischen Natur des Gewitters im Mittelpunkt des wissenschaftlichen Interesses gestanden. Erst die klassischen Untersuchungen von Elster und Geitel vor etwa 30 Jahren ließen als eine der Ursachen der Leitfähigkeit der Atmosphäre die Ionisierung der Luft durch die Radioaktivität der Erdrinde klar hervortreten. Doch wurde das Problem dadurch keineswegs vollkommen gelöst, wie man zunächst hoffte. Besonders in den letzten beiden Jahrzehnten sind neue Fragen aufgetaucht, aber auch vielseitige neue empirische Tatsachen gesichert worden. Insbesondere die Radiotechnik und die genauere Kenntnis der Ausbreitung elektrischer Wellen innerhalb der Erdatmosphäre zwangen zu dem Schlusse, daß in den Höhen, bis zu denen das Spiel der Witterungsvorgänge nicht mehr hinaufreicht (Stratosphäre), eine sehr stark leitende Schicht liegen muß (Kenelly-Heaviside-Schicht), welche die elektrischen Wellen nach unten zurückreflektiert. Offenbar reicht zu ihrer Erklärung die Radioaktivität der Erdrinde nicht aus. Doch geben die in den höchsten Schichten sich abspielenden Vorgänge der Nordlichterscheinung, die ebenfalls hierher zu verlegende starke Absorption des äußersten Ultraviolett im Sonnenspektrum und schließlich die bei systematischen Versuchen auf Ballonfahrten immer genauer in die Erscheinung getretene, nach oben hin sich verstärkende Ultra-γ-Strahlung (Höhenstrahlung) wahrscheinlich kosmischen Ursprungs Handhaben genug, dem vielseitigen Probleme näherzukommen. Auch in quantitativer Hinsicht muß eine zuverlässige Erklärung der Leitfähigkeit der Atmosphäre sich bewähren; gerade hieran ließen es bisher manche für die Elektrisierung ins Treffen geführte Ursachen (z. B. Photoeffekt, Wasserfallelektrizität) durchaus fehlen.

Gegenwärtig scheinen aber, wenigstens für den unteren Teil der Atmosphäre (Troposphäre), die Kenntnisse in bezug auf die ionenbildenden und ionenvernichtenden Vorgänge so weit gesichert, daß es möglich ist, eine geschlossene Darstellung für das Problem der Leitfähigkeit zu geben, die im ganzen auch quantitativ befriedigt. „Dieses Teilgebiet der atmosphärischen Elektrizität ist wenigstens in

groben Zügen zu einem gewissen Abschlusse gelangt." Daher wird es für die sicherlich zahlreichen Interessierten erfreulich sein, aus der Feder eines der erfolgreichsten Erforscher des Problems eine kurze Darstellung in dem Hefte kennenzulernen. Die Lektüre bietet keine Schwierigkeiten irgendwelcher Art; die Behandlung ist, von den Grundtatsachen ausgehend, in fortschreitender Entwicklung der Frage aufgebaut; historische Notizen werden dabei reichlich gegeben. Der Leser trägt den befriedigenden Eindruck davon, daß mühsames langjähriges Forschen zu einem gewissen Ziele geführt hat. — Das Gewitterproblem als solches wird nicht behandelt; am Schlusse des Büchleins wird aber auf die Literatur der sich anschließenden Probleme hingewiesen.

Hamburg. W. Hillers

Theodor Wulf S. J., Lehrbuch der Physik. XIV u. 512 S. Mit 143 Figuren. Freiburg (Br.) 1926, Herder & Co., G. m. b. H. ℛℳ 15.50, geb. in Leinewand ℛℳ 17.50.

Vor mehr als 30 Jahren erregte das „Elementare Lehrbuch der Physik" des Jesuitenpaters Ludwig Dressel wegen seiner klaren Darstellung Aufsehen; es erschien in mehreren Auflagen und ist seit einigen Jahren vergriffen. Der bekannte Verlag von Herder wünschte es von neuem herauszugeben. Unter den Händen des Schülers und Amtsnachfolgers am Jesuitenkolleg in Valkenburg ist an Stelle jenes Lehrbuches nun als ganz neues Werk das vorliegende entstanden. Als Konstrukteur empfindlicher und brauchbarer Elektrometer, als Forscher besonders auf dem Gebiete der Leitfähigkeit der Luft und der damit zusammenhängenden Vorgänge sowie durch geschickte Demonstrationsanordnungen hat der Verfasser in der wissenschaftlichen Welt seit Jahren einen Ruf; von durchaus berufener Seite erfährt daher die physikalische Wissenschaft eine Darstellung, welche dem tiefgehenden Wandel der Anschauungen in der verflossenen Zeit Rechnung trägt. In kurzer Zusammenfassung und möglichst allgemeinverständlich beschränkt sich das Buch darauf, das zu schildern, was man als den Kern der heutigen Physik bezeichnen kann. Es will das physikalische Wissen vertiefen und vor allem die Fortschritte in der Erkenntnis der Dinge schildern. Insbesondere ist das Problem der Materie, der Aufbau der Körper und das Verständnis der Körperwelt in den Mittelpunkt der Darstellung gerückt.

In der Behandlung der neueren Physik zeigt der Verfasser sehr gut, welche Schwierigkeiten über den Begriff des Lichtäthers entstanden sind; eine eigene Stellungnahme hält er dabei zurück. Er sagt darüber: Wir können in der Frage nichts anderes tun, als Gründe und Gegengründe darlegen. Auch in der heiklen Frage der Relativitätstheorie übt er Zurückhaltung; angenehm berührt, mit welcher inneren wissenschaftlichen Anteilnahme er dabei den unbestreitbaren Verdiensten Einsteins gerecht wird. In dem letzten Abschnitte des Buches „Das Absolute und das Relative" hat Referent dem Verfasser nicht überall zu folgen vermocht. — Der Druck ist klar, das Bildmaterial ist nicht reichlich und steht reproduktionstechnisch nicht durchweg auf der Höhe; beispielsweise ist Fig. 108 — die Wiedergabe des Leyboldschen Klischees vom Wulfschen Nebeltröpfchenapparat zum Nachweise der α-Strahlen — durchaus verunglückt. — Der im Text und Autorenverzeichnis erwähnte Stookes ist wohl identisch mit dem bekannten Physiker Stokes und nur im Namen verschrieben.

Hamburg. W. Hillers.

Müller-Pouillet, Lehrbuch der Physik. 11. Auflage. 2. Bd. 1. Hälfte. Lehre von der strahlenden Energie (Optik). Bearbeitet von O. Lummer, unter Mitwirkung von H. Erggelet, Jena; F. Jüttner, Breslau; A. König, Jena; M. v. Rohr, Jena; Schrödinger, Zürich. 928 S. Mit 624 Figuren im Text und auf 7 Tafeln. Braunschweig 1926, Fr. Vieweg & Sohn, A. G. Geh. ℛℳ 50.—; geb. ℛℳ 54.—.

Der vorliegende Teilband ist mit dem Bildnisse von O. Lummer geschmückt, der im Sommer 1925 verstorben ist. In den letzten Auflagen hatte dieser Be-

arbeiter dem Bande Optik des berühmten Lehrbuches einen charakteristischen Stempel aufgedrückt und ihn zu einer leicht lesbaren, wertvollen und beliebten Darstellung einer modernen Optik umgeschaffen. Die wissenschaftlichen Forschungen der letzten Jahre haben nun so starke Fortschritte gebracht, daß es sich als notwendig erwies, den Band in zwei Hälften erscheinen zu lassen, dessen erste Hälfte vorliegt. Sie ist dem Inhalte nach noch ganz von Lummer besorgt worden; die Herausgabe leiteten A. Eucken und E. Waetzmann. Der Inhalt ist in 16 Kapitel gegliedert; von diesen rühren in völliger Neubearbeitung Kapitel 11: „Das Auge und die Gesichtsempfindungen" von Erggelet (Der anatomisch-histologische Bau des Sehorgans), von v. Rohr (Physikalisches vom Auge) und Schroedinger (Die Gesichtsempfindungen), Kapitel 13: „Die optischen Instrumente" von A. König her. Die alte Lummersche Darstellungsweise, möglichst eingehend und genau das rein Sachliche zum Ausdruck zu bringen, aber auf eine handbuchartige Zusammenstellung der in Frage stehenden physikalischen Literatur zu verzichten, tritt auch in der neuen Auflage in die Erscheinung; der Band bleibt ein „Lehrbuch" der Optik, und zwar das umfassendste, das wir besitzen. Er sollte daher in keiner Schulbibliothek fehlen.

Hamburg. W. Hillers.

Müller-Pouillet, Lehrbuch der Physik. 11. Auflage. 3. Bd. Erste Hälfte. Physikalische, chemische und technische Thermodynamik (einschließlich Wärmeleitung). Unter Mitwirkung von U. Ebbecke, Bonn; M. Jakob, Charlottenburg; A. Magnus, Frankfurt a. M.; F. Pollitzer, München; F. Sauerwald, Breslau; R. Suhrmann, Breslau; G. Zirkowitz, München bearbeitet von A. Eucken. 1185 S. Mit 575 Figuren. Braunschweig 1926, Fr. Vieweg & Sohn, A.G. Geh. *RM* 63.—, geb. *RM* 68.—.

In Hinsicht auf den Fortschritt der Wissenschaft seit Herausgabe der 10. Auflage erwies sich eine völlige Neubearbeitung der „Wärme" als notwendig. Die in den letzten Jahren neubelebte kinetische Theorie der Materie hat in einem zweiten Teilbande eine schon seit längerer Zeit vorliegende Bearbeitung (s. diese Zeitschr.) erfahren, so daß mit dem Erscheinen des nun vorliegenden ersten Teilbandes, der die thermodynamisch-phänomenologische Behandlung des Stoffes enthält, der Wärmeband zum Abschluß gekommen ist. Der Inhalt ist in 27 Kapitel gegliedert; zum ersten Male unternimmt diese Auflage auch, die Ergebnisse der technischen Thermodynamik einem physikalischen Leserkreise zugänglich zu machen. In drei Kapiteln (22., 23., 24.) bearbeitet zu diesem Zwecke G. Zerkowitz die „Wärmetechnischen Vorgänge mit Arbeitsabgabe (Wärmekraftmaschinen)", in weiteren drei Kapiteln (25., 26., 27.) G. Zerkowitz (25., Verdichtung von Gasen) und F. Pollitzer „Die wärmetechnischen Vorgänge mit Arbeitsaufwand (Wärmearbeitsmaschinen)". Entsprechend dem Bande Optik bewahrt auch der Wärmeband seinen Charakter als umfassendes „Lehrbuch", das seine Aufgabe mehr in einem logisch geschlossenen Aufbau des wissenschaftlichen Gegenstandes sieht als in einer Übersicht über die vorliegenden Forschungen; die Literaturhinweise sind hier allerdings wohl zahlreicher als dort.

Hamburg. W. Hillers.

Hugo Freytag, Physik. Unterstufe. 3. u. 4. Aufl. 232 S. *RM* 3.20. Oberstufe, I. Teil. 2. Aufl. 140 S. *RM* 2.80. II. Teil. 316 S. *RM* 4.40. III. Teil. 252 S. *RM* 5.30. Nürnberg 1925/1926, Karl Koch.

Das vorliegende Werk gibt eine klare und eingehende Darstellung der Physik auf Grund der bekannten bayrischen Lehrpläne. Die Behandlung des Stoffes verrät ein gutes didaktisches Geschick und eine reiche Unterrichtserfahrung des Verfassers. Wegen seiner ausführlichen Darstellung wird das Buch sicher auch gern von dem Schüler bei seiner häuslichen Arbeit benutzt werden. Die Darbietung ist auf zahlreiche Schülerversuche, verknüpft mit vertiefenden Lehrerversuchen aufgebaut. Viele Anwendungen aus Natur und Technik und gut aus der Wirklichkeit ausgewählte

rechnerische Aufgaben erläutern die physikalischen Gesetzmäßigkeiten, viele Denkaufgaben geben reiche Anregungen. Die Stoffauswahl geht bis in die modernsten Gebiete der Physik und ist auf allen Gebieten reichlich bemessen, so daß dem Lehrer durch Auswahl Freiheit in der Behandlung für seinen Unterricht bleibt. In der Oberstufe wird eingehend die Infinitesimalrechnung verwendet.

In der Unterstufe fällt bei der Elektrizitätslehre die Einführung des Potentialbegriffs als Arbeitsfähigkeit auf. Besonders verbunden mit der unvermittelten Behandlung des absoluten mechanischen Maßsystems scheint mir diese Darstellung für den Schüler auf dieser Stufe zu schwierig. Ganz scheint sich der Verfasser auch dieser Ansicht nicht zu verschließen, denn er wiederholt seine Ausführungen fast wörtlich in der Oberstufe in Verbindung mit dem Feldbegriff usw. Erst hier wird das elektrische Potential dem Verständnis der Schüler richtig nahegebracht werden können. Die Vorgänge des Schalls sind auf der Unterstufe nur mit einer Seite bedacht, dies dürfte bei dem lebhaften Interesse der Schüler für diese Vorgänge etwas kurz sein.

Die Oberstufe behandelt zu Beginn des I. Teiles die Wage mit Anwendungen sehr eingehend, um den Schüler mit Meßgenauigkeit und dem Wesen wissenschaftlicher Arbeitsmethode bekannt zu machen. Daran schließt sich die Wärmelehre in vertiefter Behandlung bis zum Carnotschen Kreisprozeß und zweiten Hauptsatz unter reicher Verwendung der Infinitesimalrechnung. Hier wird der Lehrer nach dem Stand der Klasse sorgfältige Auswahl treffen müssen. Es folgen die Grundbegriffe des Magnetismus und des Erdmagnetismus

Der II. Teil enthält die ruhende und strömende Elektrizität und die Induktionsvorgänge bis zu den Generatoren und Motoren, welche recht eingehend in ihren Grundlagen behandelt werden. Dann folgen die allgemeine Wellenlehre und eine ausführliche Darstellung des Schalls.

Der III. Teil gibt die Wellenstrahlung des Lichtes und der elektrischen Erscheinungen. Darauf wird eingehend die Korpuskularstrahlung bis zu den neuesten Ergebnissen der physikalischen Forschung im Atombau dargestellt. Den Schluß bildet die Mechanik, welche man im Unterricht teils früher behandeln wird.

Das Werk bietet den Umfang der physikalischen Tatsachen und ihrer Anwendungen in so ausführlicher und weitgehender Weise, wie sie einer Behandlung auf der Schule noch zugänglich sind, dem Lehrer die Auswahl und Beschränkung überlassend. Das Buch kann jedem Physiklehrer zur Verwendung in seinem Unterricht als ein sicherer und zuverlässiger Führer nur auf das wärmste empfohlen werden. Es ist ein Buch von hohem Wert nach Form und Inhalt.

Hamburg. L. Müller.

Kritzinger-Schmidt, „Weltraum und Erde“. 494 S. (20×28 cm) mit 408 Abb. und 30 teils farbigen Tafeln. Berlin 1926, Walter de Gruyter. In Halbleder *RM* 36.—.

Der vorliegende Band ist der erste Teil eines auf vier Bände berechneten, von C. W. Schmidt herausgegebenen Werkes „Natur und Mensch“, das für den gebildeten Laien bestimmt ist, dem es einen Überblick über die gesamten Naturwissenschaften und ihre Anwendungen geben und ihn so in den Stand setzen soll, die „Beziehungen zwischen Umwelt und Mensch, die Eingliederung des Menschen in das Naturganze und die Eingliederung des Naturganzen in das menschliche Leben“ zu erkennen.

Dieser erste Band folgt in seinem inneren Aufbau einer Dreiteilung: es werden zuerst die — sagen wir: materiellen — Voraussetzungen behandelt (die kosmische Welt, die Erde als eines ihrer Glieder, der geologische Aufbau der Erde und das geologische Kräftespiel auf ihr), dann folgt eine geschichtliche Entwicklung des gesamten Werdeganges, die in eine Schilderung des heutigen Zustandes ausläuft.

Der rein astronomische Teil ist von H. H. Kritzinger geschrieben; er befriedigt nicht recht, denn es sind eine Reihe von Ungenauigkeiten unterlaufen, die beim Laien Verwirrung anrichten und falsche Vorstellungen erwecken können, und vieles ist so kurz gefaßt, daß es unverständlich wird. Was hier (auf S. 14) z. B. über die Entropie gesagt wird, kann kein Mensch begreifen, wenn er es nicht schon

vorher gewußt hat. Das gleiche gilt für die Andeutung aus der Relativitätstheorie und manches andere. Dann sollte man solche Fragen lieber ganz unberücksichtigt lassen, als sie so abzutun!

Schmidt behandelt die Geophysik der Erde, ihre allgemeine und historische Geologie und die Elemente der physikalischen Geographie, und zwar unter Beigabe eines geradezu bewundernswert guten Bildermaterials, das überhaupt für das ganze Buch charakteristisch ist. Es gibt kaum ein zweites Werk dieser Art, in dem ein so reiches und vollständiges Anschauungsmaterial zusammengetragen ist, und dadurch wird der Band zu einem für die Schule fast unentbehrlichen Unterrichtshilfsmittel.

Berlin-Steglitz. A. Ilgner.

Ohmann, Merktafel zur Verhütung von Unfällen im chemischen und physikalischen Unterricht. 2. Aufl., 1926; im Anschluß an desselben Verfassers Schrift: Die Verhütung von Unfällen im chemischen und physikalischen Unterricht. 2. Aufl., Berlin 1914, Winkelmann & Söhne.

Die Merktafel behandelt in übersichtlicher Gliederung die einzelnen Gefahrenquellen: Explosion, Feuer, Vergiftung bzw. Erstickung und sonstiges.

Die Notwendigkeit der Aufhängung von solchen Merktafeln, die in regelmäßigen Abständen durchgesprochen werden sollten, steht außer Zweifel. Man sollte im Verordnungswege die Aufhängung und regelmäßige Besprechung solcher Merktafeln für jedes Chemieunterrichtszimmer fordern. Die relativ geringe Anzahl von Unglücksfällen in der Schule ist kein Beweis dagegen. Ebenso sollte im Verordnungswege die Bereithaltung eines Sanitätskastens gefordert werden und dem Sammlungsleiter verantwortlich auferlegt werden.

Beanstanden könnte man bei der Tafel, daß relativ harmlose Dinge mit demselben Druck hervorgehoben sind wie die gefährlichsten.

Das Wassersieden unter vermindertem Druck kann doch wohl kaum je einen Schüler gefährden, da durch den Druck von außen das Siedegefäß nur zusammengedrückt werden kann, so daß Splitter nicht nach außen fliegen.

Wenn man einmal auf nicht überragend gefährliche Dinge eingehen wollte, so hätte man etwas mehr über die Vorsichtsmaßregeln bei der Behandlung des Glases erwartet: Schneiden von Glasrohren, Einsetzen von Pfropfen in Reagierrohre und Luftführung beim Blasen von Kugeln und dgl. Denn diese Dinge können bei dem Arbeitsunterricht besonders in den mittleren Klassen wohl in Frage kommen.

Göttingen. Trommsdorff.

R. Lehmann, Internationale Jahresberichte für Erziehungswissenschaft. 1. Jahrg., 2. Halbband, 138 S. Breslau 1926, Priebatsch. Geh. *RM* 6.—.

Der 2. Halbband (der erste wurde in dieser Zeitschrift 57 (1926) S. 187 besprochen) ergänzt durch Berichte über Frankreich, Italien, Spanien und Norwegen das Bild des ersten und holt auch einige Berichte über die spezielle Didaktik in Deutschland nach, darunter befindet sich ein Referat über Biologie von G. Dittrich, über Mathematik und Physik von H. Weiß. Die Grundidee des ersten Jahrganges ist, einen mit dem Jahre 1923 abschließenden Überblick über die allgemeine Entwicklung zu geben. Die folgenden Jahrgänge werden nun eine feste Grundlage vorfinden für die weitere Entwicklung.

Die Berichte sind noch etwas ungleich. Über Frankreich wird eine kurze allgemeine Plauderei geboten; ein wirklicher Literaturbericht soll noch folgen. Sehr anregend ist der Bericht über Italien von G. della Valle in Neapel, der von der regen pädagogischen Tätigkeit in diesem Lande Kunde gibt, die sich zumeist in recht kräftigen Gegensatz zu der staatlichen Schulreform Gentiles gestellt hat.

Ich möchte raten, für die Zukunft doch noch mehr Wert auf die schulorganisatorischen Fragen zu legen, nicht wegen ihres Eigenwertes, sondern weil nur auf dieser Basis didaktische und letzten Endes auch pädagogische Fragen recht verständlich werden. Hoffentlich erscheinen die Internationalen Jahresberichte auch nach dem Tode ihres verdienten Herausgebers weiter.

Göttingen. W. Lietzmann.

Der kleine Brockhaus. Handbuch des Wissens. Leipzig, 1925, Brockhaus.

Auf den 804 Seiten ist eine Unmenge von nachschlagbarem Wissensgut unter stärkster Raumausnutzung zusammengestellt. Eine Unzahl kleiner Abbildungen, Karten, graphischen und schematischen Darstellungen usf. erhöhen die Anschaulichkeit (sollte nicht aber doch manches Liliputbildchen überflüssig sein?), dazu kommen zahlreiche schwarz-weiße und mehrfarbige Tafeln, zumeist in ausgezeichneter Ausführung. So wird man das Buch mit Freuden bei allen Gelegenheiten zu Rate ziehen.

Ich entsinne mich, daß ich mir einmal als Junge als fanatischer Liebhaber der Astronomie aus einem vielbändigen Konversationslexikon ein Astronomenlexikon zusammengestellt habe. Das war eine Ferienarbeit, die übrigens nicht verloren war. Was für ein Bild würde man sich von einer Wissenschaft, sagen wir der Mathematik oder der Pädagogik, machen, wenn wir uns nur an das Handbuch hielten? Man wird mir erwidern: Dazu ist es doch nicht da! Zugegeben. Aber wenn dem so ist, so fragt es sich: Wozu ist das Lexikon da? Was soll es bringen? Ich bitte den Leser, die Frage einmal zu überlegen und dann das folgende wörtliche Zitat zu beurteilen:

Mathematik [Grch.], Größenlehre. Reine M., die Arithmetik, Analysis, Geometrie; angewandte M.: Astronomie, Chronologie, Geodäsie, Mechanik, mathem. Physik. Techn. M.: Kaufmännische, polit. Arithmetik. Projektionslehre, Feldmeßkunst u. a. Mathem. Gewißheit schließt jeden Zweifel aus. M. schon bei den alten Indiern, Chinesen, Babyloniern, Griechen, Arabern des Mittelalters. Vgl. Cantor (2. A. 1894).

Ich will damit nur sagen, daß das Problem, das sich ein Handbuch des Wissens stellt, doch recht schwer und noch manchen Nachdenkens wert ist.

Göttingen. W. Lietzmann.

Zeitschriftenschau.

Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. — 36. Bd., 1. bis 4. Heft. — G. Doetsch, Überblick über Gegenstand und Methode der Funktionalanalysis. — K. Hensel, Paul Bachmann und sein Lebenswerk. — H. Wieleitner, Zur Frühgeschichte des Imaginären. — O. Toeplitz, Das Problem der Universitätsvorlesungen über Infinitesimalrechnung und ihrer Abgrenzung gegenüber der Infinitesimalrechnung an den höheren Schulen. — A. Naess, Ein paar Bemerkungen über die Graßmannsche Ergänzung und zwei Anwendungen derselben. — K. Knopp, Über das Eulersche Summierungsverfahren und Polynomentwicklungen im Mittag-Lefflerschen Stern. — O. Perron, Über elementare Methoden der analytischen Fortsetzung. — L. E. J. Brouwer, Zur intuitionistischen Zerlegung mathematischer Grundbegriffe. — A. Ostrowski, Mathematische Miszellen. — N. Tschetweruchin, Eine Bemerkung zu den Nicht-Desarguesschen Liniensystemen.

Berichte über die Verhandlungen der sächsischen Akademie der Wissenschaften, math.-phys. Klasse. — 73. Bd., II. — E. Hölder, Über einige Integralgleichungen. — E. Hölder, Beiträge zur mathematischen Theorie der Gestalt des Mondes. — G. Herglotz, Über die Integration linearer, partieller Differentialgleichungen I. — Dudensing, Über die Auflösung der Jacobischen Gleichung mittels hypergeometrischer Reihen 3. Ordnung.

73. Bd., III. — L. Lichtenstein, Über einige Hilfssätze der Potentialtheorie. II und III. — O. Hölder, Bemerkungen zu meinem Aufsatz: Über gewisse Hilfssätze der Potentialtheorie. — O. Hölder, Der angebliche circulus vitiosus und die sogenannte Grundlagenkrisis in der Analysis. — E. Kähler, Die Reduktion des Dreikörperproblems in geometrischer Form dargestellt. — F. Levi, Die Teilung der projektiven Ebene durch Gerade oder Pseudogerade.

73. Bd., IV. — G. Herglotz, Über die Integration linearer partieller Differentialgleichungen II. — G. Kowalewski, Geometrisches über die Pickschen Fundamentalgrößen.

Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik. Ingenieurwissenschaftliche Forschungsarbeiten. — 7. Bd., 2. Heft. — E. Sörensen, Potentialströmungen durch rotierende Kreiselräder. — H. Krey, Die Quer-Geschwindigkeits-

kurve bei turbulenter Strömung. — G. Hamel, Über Seilsteifigkeit. — E. Honegger, Festigkeitsberechnung von rotierenden konischen Scheiben. — K. Uller, Die geführten Schwerewellen an der Grenze zweier fließender Mittel. — K. Wolf, Schwingungen elastischer Seile.

Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften. — 33. Jahrg., Nr. 5. — H. Hermann, Aperiodische Feldausbreitung. — W. Grosch, Wieder mehr Freude an der euklidischen Geometrie. — E. Günther, Mathematik und Physik in der Sächsischen Denkschrift. — K. Schulz, Die Stundentafeln für Mathematik und Naturwissenschaften an der Deutschen Oberschule. — A. Flechsenhaar, Carl Heinrich Müller.

The American Mathematical Monthly. — Vol. 34, Nr. 3. — F. Cajori, Frederick the Great on Mathematics and Mathematicians. — J. V. Uspensky, Note on the computation of roots. — J. Pierpont, On an application of Bouguer's theorem.

Vol. 34, Nr. 4. — L. E. Dickson, Extensions of Waring's theorem on nine cubes. — H. T. Davis, Elementary derivation of the fundamental constants in the Poisson and Lexis frequency distributions. — J. W. Campbell, A periodic solution for a certain problem in mechanics. — E. T. Bell, Suggested readings in the theory of numbers.

L'Enseignement Mathématique. — 25. Jahrg., Nr. 4—6. — P. Appell, Sur certaines fractions continues relatives à la série hypergéometrique. — P. Appell, Sur les polynomes de Fontana-Bessel. — E. Lainé, Sur quelques classes particulières de polynomes. — E. Turrière, Solution d'un problème de Diophante. — E. Turrière, Propriétés arithmofocales de la cubique de Weierstraß. — R. Wavre, Sur la réduction des domaines par une substitution à m variables complexes. — E. Schubarth, Sur les courbes admettant un groupe de transformation de Moebius. — T. B. Migliari, Sur la résolution de quelques systèmes homogènes d'équations du second degré. — I. Oguewetzki, L'illustration du monde physique établie par la théorie de la relativité. — G. Ch. Young, Pythagore, comment a-t-il trouvé son théorème? — S. Gagnebin, L'Enseignement de la mécanique élémentaire.

Annalen der Physik. — IV. Folge, Bd. 82, 6. Heft. — O. Emersleben, Das elektrostatische Feld einer Raumladung. I. — H. Lenz, Elektronenleitung in Kristallen mit besonderer Berücksichtigung der Verhältnisse bei tiefen Temperaturen. — V. v. Kreussler, Die Polarisation der Resonanzstrahlung des Quecksilberdampfes und ihre Beeinflussung durch Magnetfelder und Zusatzgase. — M. Bodenstein, Analyse der Zeitgesetze zusammengesetzter chemischer Reaktionen. — H. Leupold, Lichtelektrische Untersuchungen an ammoniakbeladenem Platin.

Physikalische Zeitschrift. — 28. Jahrg., 8. Heft. — L. Onsager, Zur Theorie der Elektrolyte II. — T. Oryng, Über Farbenmessung. — K. C. Kar, Die Quantenstatistik. — F. Nölke, Zur Erklärung der anormalen Schallfortpflanzung. — M. Holtzmann und L. Keller, Ein Apparat zur Messung der atmosphärischen Turbulenz.

28. Jahrg., 9. Heft. — R. Gans, Die Dielektrizitätskonstante im Rahmen der Wellenmechanik. — F. Skaupy und W. Daudt, Elektronenströme und Raumladung in dichten Gasen. — J. A. Stratton, Zerstreuungskoeffizient für kurze Wellen nach der Schrödingerschen Theorie. — H. Müller, Die Aktivitätskoeffizienten kleiner Ionen. — F. Běhounek, Über die Verhältnisse der Radioaktivität im Uranpecherzbergbaurevier von St. Joachimsthal in Böhmen. — J. Koenigsberger, Das magnetische Feld einer Stromquelle im Raum.

Zeitschrift für Physik. — 42. Bd., 4. Heft. — S. Valentiner, Über die Löslichkeit der Edelgase in Wasser. — H. Gieseler, Gesetzmäßigkeiten im Funkenspektrum von Blei. — E. Goldstein, Über sekundäre Magnetkanalstrahlen an Elektroden. — R. Karnop und G. Sachs, Versuche über die Rekristallisation von Metallen. — W. D. Kusnezow (in Gemeinschaft mit W. M. Kudrjawzewa), Experimentelle Bestimmung der Oberflächenenergie von Steinsalzkristallen. — S. J. Wawilow, Die Fluoreszenzausbeute von Farbstofflösungen als Funktion der Wellenlänge des anregenden Lichtes. II. — A. E. Malinowski, Über die Bewegungsgröße der leitenden Elektronen. — R. Conrad und J. Koenigsberger, Zu der Bemerkung von G. P. Thomson betr. Streuungsmessungen an Wasserstoffkanalstrahlen. — B. Trumpy, Intensität von Serienlinien.

42. Bd., 5./6. Heft. — A. Goetz, Untersuchungen über die glühelektrische Emission von Metallen bei Zustandsänderungen des Kathodenmaterials. — F. London, Quantenmechanische Deutung der Theorie von Weyl. — R. Mecke, Bandenspektra und periodisches System der Elemente. — Th. Dreisch, Die Absorption von Quarz und Quarzglas unterhalb 4,1 μ. — Th. Dreisch, Die Absorption von optischen Gläsern und Borax unterhalb 4,1 μ. — A. Petrikaln, Über die Lumineszenz des Chininsulfats. — V. Bursian, Notiz über die Herleitung der Minkowskischen Gleichungen für die Weltlinie eines Elektrons aus einem Variationsprinzip. — Iwao Kobayashi, Über die Bewegung einer zähen Flüssigkeit um eine dünne Kreisscheibe, die in dieser Flüssigkeit um ihre Achse schwingt. — Wilhelm Anderson, Eine neue Erklärung der Aufrechterhaltung der negativen Erdladung. — Karl Becker, Zur Kristallstruktur des Thalliums.

42. Bd., 7. Heft. — L. S. Ornstein und H. A. Kramers, Zur kinetischen Herleitung des Fermischen Verteilungsgesetzes. — H. Schüler, Weitere Untersuchungen am ersten Li-Funkenspektrum. — A. Filippov, Intensitätsmessungen in den Spektren des Cäsiums und des Kaliums. — S. C. Roy, Über die Absorptionsfähigkeit der Sternmaterie. — P. Lukirski, Elektronengeschwindigkeit beim Compton-Effekt. — V. Fréedericksz und A. Rapiewa, Theoretisches und Experimentelles zur Frage nach der Natur der anisotropen Flüssigkeiten. — M. Schuler, Ein neues Pendel mit unveränderlicher Schwingungszeit. — G. Wataghin, Beitrag zu einer wellenmechanischen Theorie der Frauenhoferschen Beugungserscheinungen. — D. Iwanenko und L. Landau, Bemerkungen über Quantenstatistik.

42. Bd., 8. Heft. — G. Hoffmann, Über neue Apparaturen zur Messung der durchdringenden Strahlung. — E. Steinke, Über die durchdringende Strahlung im Meeresniveau. — T. Wetterblad, Die $K\beta_1$-Linien von Natrium, Magnesium und Aluminium und die Abhängigkeit ihrer Wellenlängen von der chemischen Bindung. — T. Wetterblad, Über die Funkenlinien des K-Spektrums von Natrium, Magnesium und Aluminium. — H. Lessheim und R. Samuel, Bemerkungen über den Aufbau der Elektronengruppen im Atom. II. — N. v. Raschevsky, Zur Theorie des photoelektrischen Effektes. — K. Herrmann, Zur Frage nach der Symmetrie der Atome in den Kristallen. — A. Markoff, Über eine Minimumeigenschaft der Schrödingerschen Wellengruppen.

42. Bd., 9./10. Heft. — G. Kirsch und H. Pettersson, Die Zerlegung der Elemente durch Atomzertrümmerung. — H. Pettersson, Die Zertrümmerung des Kohlenstoffatomes. — R. Holoubek, Die Sichtbarmachung von Atomtrümmerbahnen. E. A. W. Schmidt, Über die Zertrümmerung des Aluminiums durch α-Teilchen. — G. Stetter, Die Massenbestimmung von Atomtrümmern aus Aluminium, Kohlenstoff, Bor und Eisen. — G. Stetter, Zur Umladung langsamer H-Partikeln.

42. Bd., 11./12. Heft. — A. Güntherschulze, Der Gradient in der positiven Säule der Glimmentladung. II. Sauerstoff, Luft, Wasserdampf, Helium, Argon, Krypton, Xenon, Quecksilber. — K. Heegner, Über Schwingungserzeugung mittels eines Elektronenröhrensystems, welches keine Selbstinduktion enthält. — E. Schmid und G. Wassermann, Über die Textur hartgezogener Drähte. — A. E. v. Arkel und M. G. v. Bruggen, Rekristallisationserscheinungen bei Aluminium. — W. Ehrenberg und H. Mark, Über die natürliche Breite der Röntgenemissionslinien. I. — W. Ehrenberg und G. v. Susich, Über die natürliche Breite der Röntgenemissionslinien. II. — W. Kossel und M. Steenbeck, Absolute Messung des Quantenstroms im Röntgenstrahl. — A. Landé, Spontane Quantenübergänge. — A. Krethlow, Selektive Absorption und anomale natürliche und magnetische Drehung von Campherchinonlösungen in Toluol. — E. Gaviola, Ein Fluorometer. Apparat zur Messung von Fluoreszenzabklingungszeiten. — E. Gaviola, Der Einfluß von Temperatur und Konzentration auf die Abklingungszeit der Fluoreszenz von Farbstofflösungen. — D. Nasledow und P. Scharawsky, Die Abhängigkeit der Intensität der Röntgenspektrallinien von der Zahl der Kathodenelektronen. — W. Schneider, Untersuchungen über Magnetisierungskurven und Vergrößerung der Empfindlichkeit des Scheringschen Deflektorenmagnetometers. — A. E. Brodsky, Über die Intensität der Spektrallinien. — W. D. Kusnezow, Über die Spaltung von Steinsalzkristallen in Flächen rhombischer Dodekaeder und Oktaeder. — F. J. v. Wiśniewski, Eine mögliche Erläuterung des Zeemaneffekts vom Typus D_1 und D_2.

43. Bd., 1./2. Heft. — G. Wentzel, Zur Theorie des Comptoneffekts. — W. Ortmann und P. Pringsheim, Über die Verbreiterung der Hg-Resonanzlinie durch Zusatz fremder Gase. — H. Kallmann und M. A. Bredig, Über die Ionisationsvorgänge im Wasserstoff und Stickstoff. — J. R. Oppenheimer, Zur Quantenmechanik der Richtungsentartung. — M. J. O. Strutt, Eigenwertprobleme bei Differentialgleichungen mit absatzweise konstanten Koeffizienten. I. — W. Kuhn, Absorptionsvermögen von Atomkernen für γ-Strahlen. — F. Klaiber, Halleffekt bei Wismuth in schwachen magnetischen Feldern. — B. Rosen, Resonanz-, Fluoreszenz- und Absorptionsspektra in der sechsten Gruppe des periodischen Systems. — V. Fischer, Die Berechnung der Unveränderlichen zur Bestimmung von Dampfspannungs- und Schmelzkurven. — J. E. Verschaffelt, Über Wärmeaufwand beim absoluten Nullpunkt.

Zeitschrift für technische Physik. — 8. Jahrg., 4. Heft. — W. Möbius, Otto Wiener †. — G. Sachs, Beitrag zum Härteproblem. — R. Holm, Über Kontaktwiderstände. — P. Melchior, Die Einheiten für den spezifischen elektrischen Widerstand und für die elektrische Leitfähigkeit. — E. Gehrcke und E. Lau, Verschärfte Interferenzen. — W. Jazyna, Die Interpolationszustandsgleichung des überhitzten Wasserdampfes. — R. Ambronn, Der kleine Erschütterungsmesser der „Prospektion“ G. m. b. H. — K. Lichtenecker, F. Seidels „selbsttönender Kristall“. — B. Ostroumoff, Der Charakterograph und die dynamischen Charakteristiken einer Elektronenröhre.

8. Jahrg., 5. Heft. — Güntherschulze, Kathodenzerstäubung. — H. Kornfeld, Zur Frage des Temperaturverlaufs und des Wärmeflusses in periodisch beheizten Wänden mit veränderlicher Wärmeleitfähigkeit. — A. Klughardt, Untersuchungen zur Farbenlehre. — F. Brüche, Über den teilweisen Ersatz des Quecksilbers beim McLeod durch einen starren Körper. — J. Scholz, Geschichte und Kritik des Lagrangeschen Problems.

Die Naturwissenschaften. — 15. Jahrg., 15. Heft. — A. Corlin, Der kosmische Ursprung der Höhenstrahlung. — H. Faßbender, K. Krüger und H. Plendl, Versuche über die Ausbreitung kurzer Wellen.

15. Jahrg., 16. Heft. — L. Meitner, Über den Aufbau des Atominnern. — K. Büttner und W. Feld, Der kosmische Ursprung der durchdringenden Höhenstrahlung. — F. Paneth, Neuere Versuche über die Verwandlung von Wasserstoff in Helium.

15. Jahrg., 18. Heft. — E. Waetzmann, Zur Ausbreitung elastischer Wellen in der Erdoberfläche. — Satyendra Ray, Die Feinstrukturkonstante als eine numerische Konstante. — E. Brüche, Wirkungsquerschnitt der Gasmoleküle.

15. Jahrg., 19. Heft. — K. Przibram, Lichtenberg als Physiker.

15. Jahrg., 20. Heft. — R. Pohl, Zum optischen Nachweis eines Vitamins. — L. Vegard, Neuere Ergebnisse über das Leuchten verfestigter Gase und ihre Beziehung zum Nordlicht. — W. Bothe und H. Fränz, Untersuchung von Atomtrümmern mit dem Spitzenzähler.

15. Jahrg., 21. Heft. — K. Vorovka, Zur Ganzzahligkeit bei kontinuierlichen Vorgängen. — J. Hellerich, Hydrodynamik der Sonne.

Aus verschiedenen Zeitschriften. — K. Metzner, Über den Kulturwert der Mathematik (Deutsches Philologen-Blatt **35** [1927] Nr. 23). — Ch. Betsch, Über Zweck und Ziel des Rechen- und Mathematikunterrichts an höheren Mädchenschulen (Deutsche Mädchenbildung **3** [1927] Heft 4). — J. Ruska, Carl Schoy (Isis **9** [1927]). — P. Luckey, Das Analemma des Ptolomäus (Astronom. Nachrichten **230** [1927]). — E. Rembs, Die Verbiegung des verlängerten Rotationsellipsoids (Heidelberger Akademieberichte 1927, 5. Abh.). — K. Ippisch, Gleichstromcharakteristiken von Kontaktdetektonen und Wheatstonsche Brückenanordnung (Zeitschrift für die österreichischen Mittelschulen **3** [1927] II. Heft).

Neuerscheinungen.[1])

Sammelwerke.

Beihefte der Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften. Berlin, Salle.
9. E. Dobers, Angewandte Biologie im Unterricht. 94 S. 1927. Geh. RM 3.80.

Mathematisch-naturwissenschaftlich-technische Bücherei, herausgeg. von E. Wasseroos und G. Wolff. Berlin, Salle.
Bd. 6. H. Schwerdt, Einführung in die praktische Nomographie. 122 S. 1927. Geb. RM 3.—.

Mathematisch-Physikalische Bibliothek, herausgeg. von W. Lietzmann und A. Witting. Leipzig, B. G. Teubner. Kart. RM 1.20.
Bd. 70. W. König. Grundzüge der Meteorologie. 54 S. 1927.

Sammlung Göschen. Berlin, de Gruyter. Geb. RM 1.50.
Nr. 13. E. Dacqué, Geologie. I. Teil. Allgemeine Geologie. 3. Aufl. 124 S. 1927.

Wissenschaftliche Grundfragen, herausgeg. von R. Hönigswald. Leipzig, B. G. Teubner.
VIII. P. Bommersheim, Beiträge zur Lehre von Ding und Gesetz. 108 S. 1927. Geh. RM 5.60.

Mathematische Wissenschaft.

L. E. Dickson, Algebra und ihre Zahlentheorie. Mit einem Kapitel über Zahlentheorie von A. Speiser. 310 S. Zürich 1927, Füßli. Brosch RM 14.40.

A. Föppl, Vorlesungen über technische Mechanik. 3. Bd.: Festigkeitslehre, 10. Aufl. von O. Föppl. 451 S. Leipzig 1927, B. G. Teubner. Geb. RM 16.60.

W. E. Franz, Fermat $x^n + y^n \lesseqgtr z^n$. 25 S. Berlin SW 61, Verlag f. soziale Ethik und Kunstpflege. Geh. RM 1.50.

E. Pascal, Repertorium der höheren Mathematik. 2. Aufl. von E. Salkowski und H. E. Timerding: E. Salkowski, Repertorium der höheren Analysis. 2. Teilband. S. 529—1023. Leipzig 1927, B. G. Teubner. Geb. RM 18.—.

G. Schewior, Gestirnkoordinaten und Beiwerte für das Jahr 1927. 64 S. Stuttgart 1927, Wittern. Brosch. RM 3.—.

Mathematischer Unterricht.

Behrendsen-Götting-Harnack, Lehrbuch der Mathematik mit Aufgaben. Unterstufe. Teil I: Geometrie Ausg. A (ohne). 182 S. Geb. RM 3.20. Ausg. B (mit Trigonometrie). 216 S. Geb. 3.80. Teil II: Arithmetik und Algebra. 7. Aufl. 207 S. Geb. RM 3.80. Leipzig 1927, B. G. Teubner.

Kambly-Thaer-Rouwolf, Rechenbuch für höhere Schulen, neubearbeitet von F. Behrend und A. Morgenstern. Ergänzungsheft. 8. Aufl. 104 S. Breslau 1927, Hirt. Kart. RM 1.75.

W. Lietzmann, Mathematisches Unterrichtswerk für höhere Knabenschulen. Leipzig, B. G. Teubner:
Lietzmann-Zühlke, Leitfaden der Mathematik. Ausgabe B. Oberstufe. 5. Aufl. 145 + 111 S. 1927. Geb. RM 4.—.
—— Aufgabensammlung und Leitfäden für Arithmetik, Algebra und Analysis. Ausgabe B. Oberstufe. 5. Aufl. 242 + 111 S. 1927. Geb. 5.60.

O. Lörcher und E. Löffler, Methodischer Leitfaden und Aufgabensammlung der Geometrie. 6. Aufl. 200 S. Leipzig 1927, B. G. Teubner. Geb. RM 3.40.

---

1) An dieser Stelle werden alle bei der Schriftleitung einlaufenden Bücher, soweit sie überhaupt den Stoffkreis der Zeitschrift berühren, angezeigt. Eine ausführliche Besprechung der unverlangt einlaufenden Bücher behält sich die Schriftleitung vor. Eine Rücksendung kann in keinem Falle erfolgen.

Die Schriftleitung.

Naturwissenschaften.

C. Bauer, Die Elektrizität als Ätherströmung. Versuch einer Mechanik der Elektrizität. 92 S. Wittenberg, Bez. Halle 1927, A. Ziemsen Verlag. Geb. *RM* 4.—.
E. Cohn, Das elektromagnetische Feld. 2. Aufl. 366 S. Berlin 1927, Julius Springer. Geb. *RM* 24.—.
E. Gehrke, Handbuch der physikalischen Optik. Bd. I. 2. Hälfte. 484 S. Leipzig 1927, Joh. Ambrosius Barth. Brosch. *RM* 32.—.
F. Hund, Linienspektren und periodisches System der Elemente. (Sammlung: Struktur der Materie in Einzeldarstellungen IV. Bd.) 221 S. Berlin 1927, Julius Springer. Geh. *RM* 15.—.
Meyer u. Schweidler, Radioaktivität. 2. Aufl. 721 S. Leipzig 1927, B. G. Teubner. Geb. *RM* 36.—.
K. Nägler, Die Märkische Scholle, ihre Landschaftsformen und Bodenschätze. 60 S. u. 155 Tafeln. Neudamm 1927, J. Neumann. Geb. *RM* 9.—.

Naturwissenschaftlicher Unterricht.

Groß-Haase, Chemie für Mittelschulen und Anstalten mit verwandten Zielen. Ausgabe A. Für Knabenschulen. 2. Aufl. 146 S. Leipzig 1926, B. G. Teubner. Kart. *RM* 2.80.
——, Dass. Ausgabe B. Für Mädchenschulen 2. Aufl. 120 S. Leipzig 1927, B. G. Teubner. Kart. *RM* 2.20.
H. Kleinert, Die Methodik des Physikunterrichts in der Volksschule. 46 S. Bern 1927, Paul Haupt. Geh. *RM* 1.50.
K. Kraepelin, Leitfaden für den zoologischen Unterricht in den unteren und mittleren Klassen der höheren Schulen. I. Teil. Wirbeltiere. 10. Aufl. von C. Schaeffer. 218 S. Berlin 1926, B. B. Teubner. Geb. *RM* 4.60.
——, Dass. II. Teil. Wirbellose Tiere. 9. Aufl. von C. Schaeffer. 149 S. Leipzig 1927, B. G. Teubner. Geb. *RM* 3.—.
K. Rosenberg, Lehrbuch der Physik für die oberen Klassen der höheren Schulen. Ausgabe C. Für Realgymnasien, Oberrealschulen, Studienanstalten und Reformanstalten. 10. Aufl. 425 S. Leipzig 1926, G. Freytag A. G. Geb. *RM* 7.20.
Ch. Schwantke, Reaktions-Schemata. Zur Einführung in die anorganische Chemie und zu Wiederholungen. Zum Gebrauch für Schüler, Studierende und Lehrer. 43 S. München, R. Oldenbourg. Kart. *RM* —.75.
Sumpf-Hartenstein, Grundriß der Physik. Ausgabe B. I. Teil. Unterstufe, bearb. von R. Krüger u. K. Bleicher. 267 S. 10. Aufl. Hildesheim 1927, August Lax.
Sumpf-Hartenstein-Günther, Grundriß der Physik. Ausgabe B. II. Teil. Oberstufe, bearb. von H. Hartenstein u. E. Günther. 375 S. Hildesheim 1927, August Lax.

Lustige Ecke.

56. Als der im 18. Jahrhundert lebende Kurfürst Karl Theodor von der Pfalz einmal nach seinem Alter gefragt wurde, antwortete er: „Ich war x Jahre im Jahre x^2.“

57. Schmackhafte Mathematik. Aus dem Amtlichen Fernsprechbuch für Berlin und Umgegend 1927:

Pythagoras-Gesellschaft, Inh. Max Pohl, Fleisch- und Fisch-Gelee, Feinkost und Majonnaisenfabrik N 39, Tegeler Str. 52. Hansa 3244. Dr.

Vermischtes. — Sprechsaal.

Jungbluth teilt Jahrg. 55 (1924), S. 82 ff. *ein umfassendes arithmetisches Gesetz* mit. Dasselbe findet sich schon in der Programmabhandlung d. Kaiserin-Augusta-Gymnasiums Charlottenburg 1910: O Nitsche, Der arithmetische Lehrgang in symmetrischem Aufbau

Berlin-Schöneberg. W. Weber.



Für die Schriftleitung verantwortlich: W. Lietzmann in Göttingen.

Hierzu Beilagen von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin, die der Beachtung der Leser empfohlen werden.

Druck von B. G. Teubner in Leipzig. Ausgegeben am 16. Juli 1927

ZEITSCHRIFT FÜR MATHEMATISCHEN UND NATURWISSENSCHAFTLICHEN UNTERRICHT ALLER SCHULGATTUNGEN

BEGRÜNDET 1869 VON J. C. V. HOFFMANN



HERAUSGEGEBEN VON

H. SCHOTTEN und W. LIETZMANN
in Halle a. S. in Göttingen
unter Mitarbeit von
W. HILLERS
in Hamburg

58. JAHRGANG. 1927 · 7 HEFT



LEIPZIG · B. G. TEUBNER · BERLIN

Inhaltsverzeichnis des 7. Heftes.

Fortsetzung auf der dritten Umschlagseite

Die Schrödingersche Wellenmechanik.[1])

Von W. Cauer in Berlin-Friedenau.

Unsere Vorstellung von dem Atom als positiven Kern, der von Elektronen umgeben ist, führte bei der Unmöglichkeit, die Spektrallinien durch die klassischen Gesetze der Mechanik und der Elektrodynamik zu deuten, zur Bohrschen Theorie. Nach dieser befolgt die Bewegung der Elektronen im Coulombschen Kraftfelde zwar die Gesetze der klassischen Mechanik, wobei aber nur eine diskrete Zahl aller klassisch mechanisch möglichen Bahnen physikalisch möglich sein soll. Die Strahlungsfrequenzen sind nach dieser alten Quantentheorie proportional zu den Energiedifferenzen zweier möglicher Bahnen ($h\nu = W_i - W_k$). Tatsächlich können gewisse Bahnen in einer von der Wahl des Koordinatensystems unabhängigen, nur dem mechanischen System eigentümlichen Weise, als bevorzugt angesehen werden.[2])

Die neue Schrödingersche Theorie behält die Bohrsche Frequenzbedingung bei. Auch bildet wieder die klassische Mechanik die Grundlage, insofern die Frequenzen aus der klassischen Form der kinetischen und potentiellen Energie ermittelt werden. Die ausgezeichneten Energiewerte werden aber in anderer Weise als früher, nämlich als Eigenwerte einer „Schwingungsgleichung" berechnet. Ich möchte nun auseinandersetzen, in welcher Weise einem beliebigen konservativen mechanischen System nach Schrödinger eine „Schwingungsgleichung" zugeordnet wird.[3]) Die physikalische Bedeutung der ihr genügenden Funktion ψ hat Schrödinger erst in seiner vierten Mitteilung klar formuliert. Sie interessiert uns zunächst nicht, solange wir unser Augenmerk nur auf die *Frequenzen* der ausgesandten Strahlung richten.

---

1) Vgl. hierzu das Referat über Quantenmechanik von B. Lammert, diese Zeitschrift, 57. Jahrg., 1926, S. 315. Das vorliegende Referat erstreckt sich auf die bei Barth, Leipzig 1927 in Buchform erschienenen „Abhandlungen zur Wellenmechanik" von Schrödinger [Annalen der Physik (4) Bd. 79, 361, 489, 734; Bd. 80, 437; Bd. 81, 109, 1926; Die Naturwissenschaften, 14. Jahrg., Heft 28, 664, 1926]. — Anmerkung der Redaktion: Der Natur der Sache nach kann das vorliegende Referat keine eingehenderen Ausführungen der rein mechanisch-abstrakten Theorie Schrödingers bringen; es mußte die bloße Mitteilung des Gedankenganges genügen. Da, wie es scheinen will, die Arbeiten Schrödingers einen Wendepunkt in der Entwicklung der Atomphysik bedeuten, wahrscheinlich die von ihm fortgeführte de Broglie sche Grundhypothese, daß bewegte Massenteilchen stets von einem zugeordneten Wellenfeld begleitet sind, auch schon eine experimentelle Bestätigung gefunden hat — über die wir nächstens berichten werden — so glaubten wir trotz der Schwierigkeit des Gegenstandes diesen Überblick mitteilen zu sollen.

2) Siehe z. B. Sommerfeld, Atombau und Spektrallinien. 4. Aufl., 1924.

3) Für den besonderen und wichtigsten Fall eines einzelnen Massenpunktes siehe auch B. Lammert, l. c, S. 321 Gleichung (6). Die folgende Ableitung der Gleichung (4) aus einem Variationsprinzip hat den Zweck, ihre Invarianz in Evidenz zu setzen.

Seien q_i die Koordinaten, p_i die Impulse, $T(q, p)$ die kinetische, $E_{\rm pot}(q)$ die potentielle Energie des mechanischen Systems. $\psi(q_i)$ soll so bestimmt werden, daß das Integral

$$J_1 = \int \left\{ K^2 T\left(q, \frac{\partial \psi}{\partial q}\right) + (W - E_{\rm pot})\,\psi^2 \right\} d\tau, \tag{1}$$

erstreckt über den Konfigurationsraum der q_i, einen stationären Wert annimmt und ψ überall stetig und endlich bleibt. Im Unendlichen soll $\delta\psi = 0$ gesetzt werden, was der Randbedingung $\psi = 0$ im Unendlichen gleichkommt.

K, W sind Konstanten. Das Linienelement des Konfigurationsraums wird definitionsgemäß invariant, d. h. unabhängig vom Koordinatensystem, durch die quadratische Form

$$ds^2 = 2\,\overline{T}(q_i, \dot{q}_i) \cdot dt^2 = \sum g_{ik}\, dq_i\, dq_k \tag{2}$$

gemessen, worin die kinetische Energie als Funktion der Koordinaten und Geschwindigkeiten ausgedrückt ist. ds ist die auch in der allgemeinen Relativitätstheorie benutzte Verallgemeinerung des zweidimensionalen Linienelementes einer Fläche und reduziert sich im Fall des einzelnen Massenpunktes auf

$$ds = \sqrt{m(dx^2 + dy^2 + dz^2)}.\text{[4]}$$

Daraus folgt für das Volumenelement der Ausdruck

$$d\tau = \sqrt{g}\, dq_1\, dq_2 \ldots dq_n = \varrho\, dx, \tag{3}$$

wenn man mit $\varrho = \sqrt{g}$ die Quadratwurzel aus der Diskriminante der quadratischen Form $2\,\overline{T}(q, \dot{q})$ und mit dx das Produkt der Koordinatendifferentiale bezeichnet.

Das Variationsproblem führt auf die Eulersche Gleichung

$$-\frac{K^2}{2} \cdot \underbrace{\frac{1}{\varrho} \sum_k \frac{\partial}{\partial q_k}\, \varrho\, T_{p_k}\left(q, \frac{\partial \psi}{\partial q}\right)} + [W - E_{\rm pot}(q)] \cdot \psi = 0. \quad \left(T_{p_k} = \frac{\partial T}{\partial p_k}\right) \tag{4}$$

Der unterklammerte Ausdruck ist die Verallgemeinerung des Laplaceschen Differentialausdrucks $\Delta\psi$.[4]) Diejenigen Werte W, für welche das Problem (1) oder (4) bei den Randbedingungen ψ stetig und endlich und null im Unendlichen — letzteres ist, wenn man von (4) ausgeht, von selbst erfüllt — Lösungen besitzt, d. h. die Eigenwerte, sind nach der Theorie als diejenigen Energieniveaus anzusehen, aus denen man nach der Bohrschen Frequenzbedingung die beobachtbaren Frequenzen zu berechnen hat. Um Übereinstimmung mit der Erfahrung zu erzielen, hat man $K = \frac{h}{2\pi i}$ zu wählen[5]), worin h die Plancksche Konstante ist. Dadurch, daß sich das Integrationsgebiet ins Unendliche erstreckt, braucht $J_2 = \int \psi^2 d\tau$ nicht zu existieren, d. h. nicht endlich zu sein, und die für endliche

4) Vgl. hierzu z. B. Courant-Hilbert, Methoden der mathematischen Physik I, S. 194, oder irgendeine Darstellung der mathematischen Hilfsmittel der allgemeinen Relativitätstheorie, u. a. auch Riecke, Lehrbuch der Physik, Bd. I, 6. Aufl. S. 588.

5) Die Einführung des imaginären K statt des reellen K^2 geschieht mit Rücksicht auf die dadurch erleichterte Darstellung des Zusammenhangs zwischen der Schrödingerschen und der Heisenbergschen Theorie.

Integrationsgebiete übliche Formulierung des Eigenwertproblems, das Integral (1) für $W = 0$ stationär zu machen unter der Nebenbedingung $J_2 = 1$, würde nicht mehr alle Eigenwerte liefern. Bei unserer Formulierung ist mit ψ auch jedes Vielfache von ψ eine lösende Eigenfunktion. Daraus schließt man leicht, daß J_1 verschwindet und daher jedenfalls existiert.

Als erstes und einfachstes Beispiel möge der eindimensionale Oszillator dienen, dessen kinetische und potentielle Energie durch $\overline{T} = \frac{\dot{q}^2}{2}$ und $E_{pot} = 2\pi^2 \nu_0^2 q^2$ (ν_0 Eigenfrequenz im Sinne der klassischen Mechanik) gegeben sind. q bedeutet Elongation mal Quadratwurzel aus der Masse. Als Schwingungsgleichung erhält man

$$\frac{d^2\psi}{dq^2} + \frac{8\pi^2}{h^2}(W - 2\pi^2\nu_0^2 q^2)\psi = 0. \tag{5}$$

Führt man $x = 2\pi\sqrt{\frac{\nu_0}{h}}\,q$ als neue unabhängige Variable ein, so ergibt sich

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \left(\frac{2W}{\nu_0 h} - x^2\right)\psi = 0 \tag{5a}$$

mit den Randbedingungen $\psi = 0$ für $x = \pm\infty$. Die Eigenwerte dieser Gleichung sind die ungeraden positiven ganzen Zahlen

$$\frac{2W}{\nu_0 h} = 2n + 1 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

und die zugehörigen Eigenfunktionen die Hermiteschen Orthogonalfunktionen[6])

$$e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot H_n(x)$$

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n(e^{-x^2})}{dx^n}; \quad H_0 = 1,\ H_1 = 2x,\ H_2 = 4x^2 - 2, \ldots$$

Abweichend von der alten Quantelung, aber in Übereinstimmung mit der Heisenbergschen Theorie ergeben sich als Quantenniveaus der Energie ungeradzahlige Vielfache von $\frac{h\nu_0}{2}$.

Nun komme ich zu dem für die Prüfung an der Erfahrung besonders wichtigen Fall der Keplerbewegung eines Elektrons um einen ruhenden positiven Kern (H-Atom). Hier erhält man als Schwingungsgleichung

$$\Delta\psi + \frac{8\pi^2 m}{h^2}\left(W + \frac{e^2}{r}\right)\cdot\psi = 0 \tag{6}$$

mit den Randbedingungen $\psi = 0$ im Unendlichen und ψ endlich für $r = 0$. $\Delta\psi$ ist der Laplacesche Ausdruck im gewöhnlichen dreidimensionalen Sinn, m, e die Elektronenmasse und -ladung, r der Abstand vom positiven Kern. Die additive Konstante in der potentiellen Energie ist wie üblich so gewählt, daß die potentielle Energie bei unendlicher Entfernung des Elektrons vom Kern verschwindet.[7]) Zunächst kann man zeigen, daß zu allen positiven Werten W den Bedingungen des Problems genügende Funktionen ψ existieren. Sie verschwinden im Un-

6) Vgl. l. c. [4]) S. 76 und 261. 7) Siehe z. B. l. c. [2])

endlichen wie $\frac{1}{r}$, $\int \psi^2 d\tau$ existiert nicht. Diese Eigenwerte oder Energieniveaus gehören zu den klassisch mechanischen Hyperbelbahnen und liefern das kontinuierliche Wasserstoffspektrum. Im Falle $W < 0$ (Ellipsenbahn) läßt sich die Lösung z. B. durch Einführung von Polarkoordinaten r, ϑ, φ mit Benutzung der Transformation

$$2r\sqrt{-\frac{8\pi^2 m W}{h^2}} = \eta \tag{7}$$

gewinnen. Die Schwingungsgleichung geht über in

$$\Delta\psi + \left(-\frac{1}{4} + \frac{l}{\eta}\right)\psi = 0 \qquad \left(l = \frac{\pi e^2}{h}\sqrt{-\frac{2m}{W}}\right), \tag{6a}$$

worin $\Delta\psi$ jetzt den gewöhnlichen Laplaceschen Ausdruck in η, ϑ, φ bedeutet. Diese Gleichung hat zu Eigenwerten nur die diskreten Werte

$$l = 1, 2, 3, 4, \ldots$$

und als zugehörige orthogonalisierte Eigenfunktionen

$$\psi_{lnm} = P_{n,m}(\cos\vartheta) \frac{\cos}{\sin}(m\varphi)\, \eta^n e^{-\frac{\eta}{2}} \cdot L_{n+l}^{(2n+1)}(\eta). \tag{8}$$

Darin bedeutet

$P_{n,m}$ die m-te zugeordnete Kugelfunktion n-ter Ordnung[8])

$L_{n+l}^{(2n+1)}$ die $(2n+1)$-te Derivierte des $(n+l)$-ten Laguerreschen Polynoms.[9])

Für W ergeben sich nach (6a) die folgenden Werte als die zulässigen Energieniveaus

$$-W_l = \frac{2\pi^2 e^4 \cdot m}{h^2 \cdot l^2}, \tag{9}$$

worin l die Reihe der positiven ganzen Zahlen durchläuft. Hieraus ergibt sich in Übereinstimmung mit der alten Quantentheorie und der Erfahrung die Balmer- und Lymanserie des Wasserstoffs.

Auch die Frequenzen beim Starkeffekt liefert die Schrödingersche Theorie in Übereinstimmung mit der Erfahrung. Die Berechnung der Eigenwerte und Eigenfunktionen wurde hier mit einer Methode durchgeführt, die als Störungstheorie bezeichnet werden kann. Dagegen liefert eine rein formale Übertragung auf den Zeemanneffekt und die relativistische Feinstruktur nur zum Teil mit den Messungen verträgliche Resultate.

Wir wenden uns nun zu der Frage der Bedeutung von ψ und der damit zusammenhängenden Frage der Intensitäten und Polarisationen der Spektrallinien, wobei sich zugleich eine Deutung der Bohrschen Frequenzbedingung ergeben wird. ψ wird als von der Zeit abhängig gedacht, zunächst in der bestimmten rein periodischen Form

$$\psi = u \cdot e^{\frac{2\pi i W t}{h}}. \tag{10}$$

8) Vgl. l. c. [4]) S. 260.
9) Vgl. l. c. [4]) S. 77.

Gleichung (4) ist dann äquivalent mit

$$\varDelta\psi - \frac{2(W - E_{\mathrm{pot}})}{W^2}\ddot{\psi} = 0, \tag{11}$$

was für den Massenpunkt auf die von B. Lammert l. c. S. 321 angeführte Wellengleichung hinausläuft, wenn man unter $\varDelta\psi$ in (11) den verallgemeinerten Laplaceschen Ausdruck versteht, der die Masse enthält.[10])

Um den Fall erfassen zu können, daß die Potentialfunktion E_{pot} von der Zeit abhängt, hat Schrödinger seine Schwingungsgleichung in ein Paar konjugiert komplexer Wellengleichungen verallgemeinert, nämlich

$$\varDelta\psi - \frac{8\pi^2}{h^2}E_{\mathrm{pot}}\cdot\psi - \frac{4\pi i}{h}\frac{\partial\psi}{\partial t} = 0, \quad \varDelta\overline{\psi} - \frac{8\pi^2}{h^2}E_{\mathrm{pot}}\,\overline{\psi} + \frac{4\pi i}{h}\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial t} = 0. \tag{12}$$

Im Falle eines konservativen Systems erhält man die Lösungen dieser Gleichungen durch den Ansatz (10) und

$$\overline{\psi} = u e^{-\frac{2\pi i W t}{h}} \tag{10a}$$

und wird auf die Schwingungs- oder Amplitudengleichung (4) zurückgeführt. Schrödinger hat auf Grund der Wellengleichungen mit Erfolg eine Dispersionstheorie aufgestellt, auf die ich aber nicht eingehen werde. (12) unterscheidet sich von (11) wesentlich dadurch, daß W nicht mehr auftritt und die Gleichung sich daher bei dem Ansatz (10) bei *beliebigem* W auf (4) reduziert. Entsprechend werden für konservative Systeme Lösungen von (12) der Form

$$\psi = \sum_k c_k u_k e^{\frac{2\pi i W_h t}{h}} \tag{13}$$

ins Auge gefaßt, worin u_k die zum Eigenwert W_k gehörige reelle Lösung der Schwingungsgleichung (4) bezeichnet. Eine reale Bedeutung, die durch Beobachtung der Polarisation und der Intensitäten der Spektrallinien geprüft werden kann, wird dem Ausdruck $\psi\overline{\psi}$ zugesprochen. Wir denken uns ψ so normiert, daß

$$\int \psi\overline{\psi}\varrho\,dx = 1 \tag{14}$$

wird. Von vornherein werden damit diejenigen Eigenschwingungen ausgeschlossen, die einen nichtkonvergenten Beitrag zum Integral liefern würden, also z. B. beim Wasserstoffatom diejenigen, die den Hyperbelbahnen entsprechen. $\psi\overline{\psi}$ ist dann eine Gewichtsfunktion, die angibt, mit welcher Wahrscheinlichkeit das System sich zu einer gewissen Zeit in einer bestimmten Konfiguration befindet. Hier habe ich mir eine kleine Abweichung von der Schrödingerschen Ausdrucksweise erlaubt. Die geschilderte Auffassung hat natürlich nur dann einen Sinn, wenn

10) Es wurde in diesem Bericht vermieden, auf die Analogie zwischen Wellenmechanik und Optik einzugehen, wozu man übrigens den zitierten Bericht von B. Lammert vergleichen möge. Dementsprechend wurde für die Berechnung der Strahlungsfrequenzen nicht (11), sondern die einfachere und gleichwertige Gleichung (4) an die Spitze gestellt. Doch sei auf die jetzt erfolgte mehrfache experimentelle Bestätigung (besonders durch Davisson und Gerber, Nature 119, 558) der de Broglieschen Phasenwellen hingewiesen, auf denen jene Beziehungen zur Optik fußen.



(14) einen zeitlich unveränderlichen Wert besitzt. Das läßt sich aber tatsächlich aus den Wellengleichungen ableiten, was ich nun tun will:

$$\left.\begin{aligned}\dot{\psi} &= \frac{h}{4\pi i}\left(\Delta - \frac{8\pi^2}{h^2} E_{\text{pot}}\right)\psi \\ \dot{\bar{\psi}} &= -\frac{h}{4\pi i}\left(\Delta - \frac{8\pi^2}{h} E_{\text{pot}}\right)\bar{\psi}\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(\varrho\psi\bar{\psi}) &= \frac{h}{4\pi i}\varrho(\bar{\psi}\Delta\psi - \psi\Delta\bar{\psi}) \\ &= \sum_k \frac{\partial}{\partial q_k}\frac{h}{4\pi i}\left[\varrho\bar{\psi}T_{p_k}\left(q, \frac{\partial\psi}{\partial q}\right) - \varrho\psi T_{p_k}\left(q, \frac{\partial\bar{\psi}}{\partial q}\right)\right].\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Die rechte Seite hat die Gestalt einer Divergenzdichte eines mehrdimensionalen reellen Vektors. Der Vektor ist als Stromdichte der Gewichtsfunktion im Konfigurationenraum und die Gleichung als Kontinuitätsgleichung der Gewichtsfunktion anzusehen, womit die zeitliche Konstanz von $\int \psi\bar{\psi}\varrho\, dx$ bewiesen ist.

Liegt wie beim Wasserstoffatom ein System von drei Freiheitsgraden mit nur einem Elektron vor, so läßt sich $e\psi\bar{\psi}$ auch als Dichte der Elektrizität und die obige Gleichung unmittelbar als Kontinuitätsgleichung der Elektrizitätsströmung deuten. Dabei wird dann nicht angenommen, daß $\psi\bar{\psi}$ eine Wahrscheinlichkeitsfunktion darstellt, sondern mit Schrödinger postuliert, daß alle mechanisch möglichen Zustände in ein und demselben Atom auf einmal nach der Gewichtsfunktion $\psi\bar{\psi}$ verwirklicht sind.

Auch bei Systemen mit mehreren Elektronen muß natürlich bei der Schrödingerschen Auffassung nach der Definition von $\psi\bar{\psi}$ als Gewichtsfunktion die von jedem einzelnen Elektron für sich herrührende Ladungsverteilung über den wirklichen Raum integriert e ergeben. Nehmen wir kartesische Koordinaten an, so wird diese Ladungsdichte gleich dem Integral von $e\psi\bar{\psi}$ über alle diejenigen Systemkoordinaten sein, welche klassisch-mechanisch die Lage der übrigen Massenpunkte bzw. Elektronen festlegen. Danach läßt sich leicht einsehen, daß man als Gesamtdipolmoment des Atoms

$$\int \mathfrak{M}\psi\bar{\psi}\, dx \tag{17}$$

erhält, worin der Vektor $\mathfrak{M} = \sum e_i \mathfrak{r}_i$ das klassisch-mechanische Dipolmoment einer bestimmten Konfiguration des Elektronensystems angibt. Indem wir berücksichtigen, daß die verschiedenen Eigenfunktionen u_i mit den Amplituden c_i schwingen, ergibt sich als Gesamtmoment in der x-Richtung

$$M_x = e \cdot \sum_{i,k,l} x_l^{ik}\left[c_i \bar{c}_k e^{\frac{2\pi i}{h}(W_i - W_k)t} + \bar{c}_i c_k e^{-\frac{2\pi i}{h}(W_i - W_k)t}\right], \tag{17a}$$

worin

$$x_l^{ik} = \int x_l u_i(x) u_k(x)\, d\tau \tag{17b}$$

das Moment der l-ten x-Koordinate bedeutet und die l-Summierung sich über alle Elektronen erstreckt. Nach Schrödingers Annahme *erzeugen die Elektrizitätsdichteschwingungen eine Strahlung nach den klassischen Gesetzen der Elektrodynamik.* Da sich, wenigstens beim Wasserstoffatom, herausstellt, daß das Gebiet, in dem die Gewichtsfunktion wesentlich von Null verschieden ist, in die-

selbe Größenordnung wie die Bohrschen Bahnen fällt, so sind seine Abmessungen jedenfalls klein gegen die Wellenlänge der ausgesandten Strahlung. Daher gibt das *Dipolmoment* (17) *nach Größe und Richtung ein Maß für die Intensität und Polarisation der ausgesandten Strahlen, womit zugleich die Bohrsche Frequenzbedingung jetzt als Folgerung aus der Theorie herauskommt.* Speziell wird die in der x-Richtung polarisierte ausgesandte Strahlungsenergie von der Frequenz $\frac{W_i - W_k}{h}$ proportional zu $(x^{ik})^2 \left(\frac{W_i - W_k}{h}\right)^4$. Dadurch ist eine weitere Prüfungsmöglichkeit der Theorie an der Erfahrung gegeben, die sich z. B. beim Starkeffekt bewährt hat. Man erhält dort unter anderem die Auswahl- und Polarisationsregeln ohne weiteres aus der Theorie, während man sie in der alten Quantentheorie durch Zusatzannahmen auf korrespondenzmäßigem[11]) Wege ableitete. Darin liegt eine besondere Stärke der neuen Theorie, daß sie auch Aussagen über Polarisation und Intensitäten enthält. Natürlich sind die Amplituden c_i noch unbestimmt. Schrödinger hat für das spezielle Beispiel des Oszillators gezeigt, daß man durch geeignete Wahl der c_i erreichen kann, daß die Gewichtsfunktion für alle Zeiten auf ein gewisses enges Gebiet um den jeweiligen klassischen Konfigurationspunkt beschränkt bleibt. Es ist dann so, daß nur eine Gruppe von Eigenschwingungen hoher Ordnungszahl und kleiner Ordnungszahldifferenzen wesentlich zur Gewichtsfunktion beiträgt. Es wird unter anderem von Born stark bezweifelt, ob dieses Ergebnis sich auf ein beliebiges mechanisches System übertragen läßt. Die wichtige Frage des Überganges von der Mikro- zur Makromechanik, den Schrödinger mit dem Übergang von der Wellenoptik zur geometrischen Optik verglichen hat, ist noch ungeklärt. Es wäre unter Umständen möglich, die c_i auf korrespondenzmäßigem Wege für hohe Ordnungszahlen zu berechnen. Obwohl unmittelbar der Beobachtung zugängliche physikalische Realität nur den Momenten, nicht aber der Gewichtsfunktion beizulegen ist und auch die Deutung als wirkliche Ladungsdichte angefochten wird, ist es doch sicher interessant, sich einmal ein Bild von der Ladungsverteilung im Wasserstoffatom zu machen. Ich beschränke mich auf den Normalzustand des Atoms, in dem man sich nur die niedrigste Eigenschwingung als angeregt zu denken hat ($l = 1$, $n = 0$, $m = 0$):

$$\psi\bar{\psi} = e^{-\eta} \tag{18}$$

(mit $\eta = \frac{2r}{a_0}$, a_0 Radius der innersten Bohrschen Wasserstoffbahn). Dies ist eine zeitlich konstante Ladungsverteilung, die nur eine Abhängigkeit vom Kernabstand zeigt.

Damit habe ich in den Hauptzügen ein Bild der Schrödingerschen Wellenmechanik entworfen und komme nun zu der interessanten Frage des Zusammenhanges mit der Heisenbergschen Quantenmechanik.[12]) Im wesentlichen erweist sich diese nur als eine andere mathematische Form der Schrödingerschen Theorie mit dem gleichen physikalischen Inhalt.

Für den Beweis soll angenommen werden, daß wie beim Oszillator nur ein

11) Vgl. B. Lammert, l. c., S. 316.

12) Literatur siehe l. c. [11]), ferner Mathematische Annalen Bd. 95, 683, 1926. Eine genauere Kenntnis der Heisenbergschen Theorie wird im folgenden nicht vorausgesetzt.



diskretes Eigenwertspektrum vorliegt und die zugehörigen Eigenfunktionen ein vollständiges System[13]) bilden. Beim Wasserstoffatom trifft unsere Annahme nicht zu, aber vermutlich läßt sich bei richtiger Übertragung der Beweis auch beim Vorhandensein eines kontinuierlichen Spektrums analog führen. Wir setzen ferner voraus, daß alle Eigenfunktionen im Unendlichen stärker als jede Potenz von x, sagen wir exponentiell, verschwinden, wie das ja bei den angeführten Beispielen diskreter Eigenfunktionen erfüllt war.

Sei $u_1 \sqrt{\varrho}$, $u_2 \sqrt{\varrho}, \ldots$ ein vollständiges normiertes Orthogonalsystem. Dann wird einem linearen Differentialoperator $[F, \cdot]$ eine Heisenbergsche unendliche Matrix nach der Regel

$$F^{kl} = \int \varrho u_k [F, u_l] dx \tag{19}$$

zugeordnet und umgekehrt gezeigt, daß zur Matrix eindeutig ein Operator F gehört, falls dieser existiert. Was bedeutet nun dieser Operator? Definieren wir eine Funktion F als eine nach Potenzen von p_i entwickelbare wohlgeordnete Funktion der Lage- und Impulskoordinaten eines mechanischen Systems, z. B.

$$F = f(q) \cdot p_r p_s g(q) p_t + \cdots,$$

um nur ein Glied der Reihenentwicklung hinzuschreiben. Wohlgeordnet soll heißen, es ist die Reihenfolge der f, g und p zu berücksichtigen. Ersetzt man nun einfach jedes p_k durch $K \frac{\partial}{\partial q_k}$, so erhält man den Differentialoperator, also in unserem Beispiel

$$[F, \cdot] = f(q) \cdot K^2 \frac{\partial^2}{\partial q_r \partial q_s} g(q) K \frac{\partial}{\partial q_t} + \cdots$$

Offenbar addieren sich bei algebraischer Addition von Operatoren die zugehörigen Matrizen. Es soll gezeigt werden, daß die Matrix des Produktes zweier Operatoren ebenfalls dem Produkt der den Faktoren zugeordneten Matrizen gleich ist, in Buchstaben:

$$(FG)^{km} \sum_l F^{kl} G^{lm}. \tag{20}$$

Der Operator $[FG, \cdot]$ geht definitionsgemäß aus dem Produkt der wohlgeordneten Funktion $F \cdot G$ durch $p_k = K \frac{\partial}{\partial q_k}$ hervor, so daß $[GF, \cdot]$ im allgemeinen einen anderen Operator darstellen wird. Bezeichnet $\bar{F}$ den zu F adjungierten Differentialausdruck[14]), also in unserem Beispiel

$$\bar{F} = (-1)^3 K \frac{\partial}{\partial q_t} g(q) K^2 \frac{\partial}{\partial q_s \partial q_r} f(q) + \cdots,$$

so ergibt sich durch wiederholte partielle Integration

$$F^{kl} = \int [\bar{F}, \varrho u_k] u_l dx. \tag{19a}$$

Danach wird

$$\sum_l F^{kl} G^{lm} = \sum_l \int [\bar{F}, \varrho u_k] u_l dx \cdot \int \varrho u_l [G, u_m] dx = \int [\bar{F}, \varrho u_k][G, u_m] dx, \tag{21}$$

13) Vgl. z. B. l. c. [4]) S. 35, 36. 14) Vgl. z. B. l. c. [4]) S. 199.

letzteres nach der Vollständigkeitsrelation.[13]) Jetzt forme man rückwärts partiell um, und man erhält

$$\sum_l F^{kl} G^{lm} = \int \varrho u_k [FG, u_m] dx = (FG)^{km},$$

was zu beweisen war. Aber überhaupt entsprechen sämtliche Rechenregeln für unendliche Matrizen von Heisenberg, Born, Jordan genau den Rechenregeln für die Operatoren. Der wohlgeordneten Funktion

$$\frac{1}{K}(p_l q_l - q_l p_l)$$

entspricht als Operator die Identität. Daher ist

$$(p_l q_l - q_l p_l)^{ik} = K \int \varrho u_i u_k dx = \frac{h}{2\pi i} \delta_{ik} \quad (\delta_{ik} = 0 \text{ für } i \neq k, \delta_{ii} = 1) \tag{22}$$

eine Diagonalmatrix. Dies ist die Heisenbergsche Quantenrelation. Ohne Beweis will ich die Regeln für partielle Differentiation von Operatoren anführen. Es ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} \left[\frac{\partial F}{\partial q_l}, \cdot\right] &= \frac{1}{K}[p_l F - F p_l, \cdot] \\ \left[\frac{\partial F}{\partial p_l}, \cdot\right] &= \frac{1}{K}[F q_l - q_l F, \cdot] \end{aligned}\right\}. \tag{23}$$

Darin ist $\frac{\partial F}{\partial q_l}, \frac{\partial F}{\partial p_l}$ so aufzufassen, daß man an jeder Stelle, wo in der wohlgeordneten Funktion F q_l bzw. p_l auftritt, differenziert und alle diese Resultate addiert. Aus den Regeln für die Operatoren folgen sofort die entsprechenden Regeln für die Matrizen.

Wir kommen zur Auflösung der Heisenbergschen Bewegungsgleichungen. Ihnen liegt eine Hamiltonsche Funktion zugrunde, aus der durch geeignete Symmetrisierungsmaßnahmen eine wohlgeordnete Funktion und damit eine Matrix gebildet wird, die sich als Diagonalmatrix herausstellt. Eindeutigkeit der Symmetrisierung und Übereinstimmung mit der Schrödingerschen Theorie wird erzielt, wenn man die Wohlordnung der kinetischen Energie nach der Regel

$$T(q, p) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\varrho} \cdot \sum_k p_k \varrho T_{p_k}(q, p) \tag{24}$$

vornimmt.

Die Heisenbergschen Bewegungsgleichungen lauten

$$\left.\begin{aligned} 2\pi i(\nu_i - \nu_k) q_l^{ik} &= \left(\frac{dq_l}{dt}\right)^{ik} = \left(\frac{\partial H}{\partial p_l}\right)^{ik} = \frac{2\pi i}{h}(Hq_l - q_l H)^{ik}, \\ 2\pi i(\nu_i - \nu_k) p_l^{ik} &= \left(\frac{dp_l}{dt}\right)^{ik} = -\left(\frac{\partial H}{\partial q_l}\right)^{ik} = \frac{2\pi i}{h}(Hp_l - p_l H)^{ik}. \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Die ν_i sind zusammen mit den q_l^{ik}, p_l^{ik} die Unbekannten des Gleichungssystems. Die symbolische Schreibweise mit $\frac{d}{dt}$ hat folgende Bedeutung. Führt man statt der alten q_l^{ik}

$$q_l^{ik*} = q_l^{ik} \cdot e^{2\pi i(\nu_i - \nu_k)t}$$

und entsprechend für die p neue Größen p^* ein, so wird die symbolische Schreibweise erklärlich, und es bleiben, wie man leicht sieht, die Relationen zwischen den alten und neuen Größen bestehen, wenn man irgendwelche Matrizenrechenoperationen wie z. B. Multiplikation mit ihnen vornimmt.

Nun läßt sich zeigen, daß man die Matrizenbewegungsgleichungen befriedigt, wenn man als zuordnende Eigenfunktionen die der Schrödingerschen Gleichung

$$-[H, u] + W \cdot u = 0, \tag{26}$$

die wegen (24) mit (4) übereinstimmt, und als $h \cdot \nu_i$ die Eigenwerte W_i wählt. Es wird

$$H^{kl} = \int \varrho u_k [H, u_l] dx = W_l \delta_{lk} \tag{27}$$

eine Diagonalmatrix. Ferner

$$\left.\begin{aligned} (Hq_l)^{ik} &= \sum_m H^{im} q_l^{mk} = W_i q_l^{ik} \\ (q_l H)^{ik} &= \sum_m q_l^{im} H^{mk} = W_k q_l^{ik}, \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

wonach die erste Heisenbergsche Matrizengleichung erfüllt ist. Genau so verhält es sich auch mit der zweiten.

Die Auflösung des Matrizengleichungssystems ist somit auf die Lösung des Schrödingerschen Randwertproblems zurückzuführen.

Ist q_l eine kartesische Koordinate, so wird nach der Heisenbergschen Theorie $(q_l^{mk})^2$ als Maß für die Übergangswahrscheinlichkeit vom m-ten in den k-ten Zustand angesehen. Dies steht im Einklang mit der Schrödingerschen Deutung dieser Größen als Komponenten des Atomdipolmomentes (s. Gl. (17b)).

Der Nachweis des engen Zusammenhangs mit der Heisenbergschen Theorie zeigt am deutlichsten, daß die Schrödingersche Theorie trotz ihrer physikalisch anschaulichen Elemente wie der elektrischen Ladungsdichte im Atom sich als eine rein phänomenologische Theorie auffassen läßt. Sie faßt die durch die Erfahrung bewährten Quantenregeln in vollkommenerer Weise als die früheren Theorien einheitlich zusammen. Doch sei, um falschen Vorstellungen vorzubeugen, ausdrücklich darauf hingewiesen, daß sie ebensowenig wie die früheren Theorien eine physikalische Deutung des geheimnisvollen Wirkungsquantums gibt. Auch enthält sie keine Aufklärung über die Diskrepanz zwischen Quanten- und Wellentheorie des Lichts. Andererseits ist, wie Schrödinger selbst betont hat, seine Theorie noch nicht abgeschlossen, sondern Wandlungen und Ergänzungen fähig, wie auch zahlreiche in jüngster Zeit erschienene und erscheinende Arbeiten beweisen.

Über lineare Interpolation.

Bemerkungen zu dem Aufsatz des Herrn O. Toeplitz: „Zur Theorie und Praxis der Logarithmentafeln.“ Diese Zeitschr. 58, S. 203 ff.

Von Rudolf Rothe in Berlin.

In seinem lesenswerten Aufsatze hat Herr Toeplitz über die Einrichtung und den Gebrauch von Tafeln, insbesondere Logarithmentafeln, eine Reihe von Betrachtungen hinsichtlich der Genauigkeit, der Möglichkeit linearer Interpolation usw. angestellt, die zwar für den Lehrer und den Schulunterricht bestimmt sind, und denen ich in didaktischer Beziehung voll zustimme. Er hat aber auch einige gelegentliche kritische Bemerkungen im Hinblick auf die Praxis, insbesondere auf den Gebrauch solcher Tafeln in der Technik eingestreut; seine Kritik bezieht sich zum Beispiel auf einige im Taschenbuch der „Hütte“ seit langen Jahren enthaltene Tafeln. Er sagt: „Bei den Kubiktafeln ist es besonders beliebt, die vollen Werte der Kuben zu drucken und damit Tafeln zu geben, die in keiner Weise linear interpolierbar sind. Ich glaube, daß die Schule selten zahlentheoretische Studien macht, die die exakten Werte der Kuben erfordern. Noch weniger kann ich mir vorstellen, wo in der Technik solche zahlentheoretischen Notwendigkeiten auftreten, und was die Herausgeber der ‚Hütte‘ veranlaßt, hier eine interpolatorisch unmögliche Tafel in zäher Tradition festzuhalten.“

Da ich (unter Mitwirkung von Herrn Johannes Stein) die Bearbeitung des Abschnittes Mathematik, zu dem auch die Tafeln gehören, für die neue Jubiläumsausgabe der „Hütte“ ausgeführt habe und also für die Beibehaltung der Tafel der Kuben und ebenso der Quadrate, für die natürlich grundsätzlich dieselbe Kritik gelten müßte, verantwortlich bin, glaube ich, zu den vorstehenden Bemerkungen eine Erklärung schuldig zu sein. Ich knüpfe daran einige allgemeine Betrachtungen über die lineare Interpolation.

1. Zunächst stimme ich mit Herrn Toeplitz vollkommen darin überein, daß jedenfalls der *Schulunterricht* sich *mit keiner anderen als linearer Interpolation* zu befassen hat, und daß ferner *auf der Schule* etwa bei der Auswertung physikalischer oder vermessungstechnischer Beobachtungen eine höhere Genauigkeit als die einer vierstelligen Logarithmentafel kaum in Frage kommt, ja nicht einmal wünschenswert ist. Deswegen nicht wünschenswert, weil der Schüler sonst den Einfluß der Meßfehler auf das errechnete Ergebnis nicht einfach genug verfolgen kann. Aber Herr Toeplitz hält es für ausgemacht, daß auch für die „üblichen Zwecke“ der technischen Praxis vierstellige Tafeln genügen, und daß sich die Technik mit keiner anderen als linearer Interpolation zu befassen habe, und er will höhere Interpolationen nur speziellen astronomischen, geodätischen oder abstrakt-mathematischen Unternehmungen vorbehalten wissen.

Nun, ein Blick in das vorhandene Tafelmaterial, um außer der „Hütte“ nur noch die Funktionentafeln von Jahnke und Emde zu nennen, zeigt zunächst sofort, daß in der Technik von einer Beschränkung auf linear interpolierbare Tafeln keine Rede sein kann. Freilich zieht der Ingenieur wie jeder Praktiker die zeichnerischen und instrumentellen Verfahren auch für interpola-

torische Zwecke vor, weil sie für ihn, der an sie gewöhnt ist, in der Regel rascher zum Ziele führen. Die Genauigkeit hängt selbstverständlich von der betreffenden Aufgabe ab.

2. Was zunächst das Rechnen mit Logarithmentafeln überhaupt anlangt, so ist es für den Ingenieur nur noch von untergeordneter Bedeutung. Für die „üblichen Zwecke" gebraucht er den Rechenschieber, der ja zum unentbehrlichen Handwerkszeug jedes praktischen Rechners gehört, und größere Rechnungen führt er überwiegend mit der *Rechenmaschine* aus; auch Produkttafeln (A. L. Crelle, L. Zimmermann u. a.) sind im Gebrauch. Viele Rechnungen werden durch Rechenblätter (Nomogramme) erledigt. Infolgedessen geht das Rechnen in der Praxis — ähnlich immer mehr auch bei Astronomen und Geodäten — ziemlich anders vor sich, als es auf der Schule geschehen kann und soll; eine Parallele zwischen den Bedürfnissen der Praxis und der Schule läßt sich kaum ziehen. Hierin kann ich also mit Herrn Toeplitz nicht übereinstimmen.

Die Tafeln der „Hütte" sind nun nicht für die Schule, sondern für den praktischen Rechner bestimmt. Auf S. 1 der „Hütte", Band I, ist ausreichend genau angegeben, welche von den Tafeln und in welchem Umfange sie linear interpoliert werden dürfen. Es heißt dort ausdrücklich, daß lineare Interpolation nur insoweit zulässig ist, als der achte Teil der zweiten Tafeldifferenz unberücksichtigt bleiben darf. Das ist übrigens nichts anderes als der Inhalt der Toeplitzschen Formel (2). Ich komme darauf noch weiter unten zu sprechen. Hieraus kann man schon entnehmen, daß in die „Hütte" mit vollem Bewußtsein seit langen Jahren auch solche Tafeln aufgenommen worden sind, die nicht linear interpolierbar sind, wozu u. a. die beanstandeten Tafeln der Quadratzahlen und der Kubikzahlen der Argumente 1 bis 1100 gehören.

Solche Tafeln sind also weder zum Interpolieren eingerichtet, noch dazu bestimmt. Um für ihre Verwendung nur ein Beispiel anzugeben, so ist es bekanntlich bei der Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate erforderlich, die numerischen Rechnungen bei der Bildung der Potenzen und Produkte *ungekürzt* durchzuführen.[1]) Wenn man etwa die Veränderliche u als Funktion des Arguments t durch eine parabolische Formel

$$u = A + Bt + Ct^2$$

darstellen will, und $n (> 3)$ Beobachtungen zur Bestimmung der unbekannten Vorzahlen $A, B\, C$, vorliegen, so hat man A, B, C aus den „Normalgleichungen"

$$nA + (\Sigma t)\, B + (\Sigma t^2)\, C = \Sigma u$$
$$(\Sigma t) A + (\Sigma t^2) B + (\Sigma t^3)\, C = \Sigma t u$$
$$(\Sigma t^2) A + (\Sigma t^3)\, B + (\Sigma t^4)\, C = \Sigma t^2 u$$

zu ermitteln, wobei in den Summen die Größen t und die Größen u die beobachteten Werte bedeuten. Man sieht, daß nicht nur die Quadrate und Kuben, sondern sogar die Biquadrate erforderlich sind, die man entweder durch wiederholte Anwendung der Tafel der Quadratzahlen, oder wo diese nicht ausreicht,

1) Vgl. z. B. eine darauf besonders hinweisende Bemerkung in F. Kohlrauschs Lehrbuch der praktischen Physik (10. Auflage S. 14); ein dort durchgerechnetes Beispiel bezieht sich zwar nur auf den linearen Fall ($C = 0$), läßt aber genau erkennen, worauf es ankommt.



mit der Rechenmaschine bestimmen muß. Eine Abrundung auf die geltende Stellenzahl darf erst am Schluß der Rechnung, jedenfalls erst nach Bildung der Summen erfolgen.

Solche quadratischen Formeln kommen in der technischen Physik, in der Vermessungskunde, der Meßtechnik usw. sehr häufig vor.

3. Tafeln der Quadratzahlen können bekanntlich auch als Multiplikationstafeln benutzt werden, wenn man sich der Identität

$$a \cdot b = \tfrac{1}{4}[(a+b)^2 - (a-b)^2]$$

bedient; Summe und Differenz lassen sich leicht im Kopfe berechnen. Und die Tafel der Kuben kann dann auch zur Bestimmung solcher Produkte dienen, wie sie etwa auf der rechten Seite der dritten der obigen Normalgleichungen als Summanden vorkommen, auf Grund der Identität

$$a^2 b = \tfrac{1}{6}\left[(a+b)^3 - (a-b)^3 - 2b^3\right].$$

Die Anwendung einer Quadrattafel zur Produktbildung könnte vielleicht auch für die Schule von Nutzen sein, damit der Schüler auch nicht-interpolierbare Tafeln benutzen lernt, hier etwa zur Probe der beschränkt genauen Produktberechnung mit Logarithmen oder mit dem Rechenschieber.[1])

4. Wie dem auch sein mag — das obige Beispiel zeigt, daß nicht bloß „zähe Tradition" oder die Möglichkeit zahlentheoretischer Studien es war, die die Herausgeber der „Hütte" veranlaßt hat, die Tafeln der Quadrate und Kuben in voller Ausdehnung und ohne Rücksicht auf lineare Interpolationsmöglichkeit beizubehalten. Übrigens finden sich solche Tafeln in zahlreichen anderen Werken und in sehr viel größerer Ausdehnung. Reiche Literaturangaben in der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, französische Ausgabe, I 23, Artikel von R. Mehmcke — M. d'Ocagne; sehr viele Verfasser dieser Tafeln waren Ingenieure, eine Tatsache, die des Nachdenkens wert zu sein scheint.

5. Ich will noch ganz kurz auf einige theoretische Bemerkungen über die lineare Interpolation eingehen. Man findet solche Betrachtungen, wie sie Herr Toeplitz angestellt hat, und auch die von ihm abgeleiteten Formeln u. a. in Lüroths Buch „Vorlesungen über numerisches Rechnen" (Lpzg., Teubner 1900) § 37.

Die Stellen ξ des Argumentes[2]), an denen der Unterschied zwischen den Ordinaten der Sehne $y = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)$ und Kurve $y = f(x)$ einen extremalen Wert erreicht, sind dieselben, wie sie die Formel des Mittelwertsatzes

$$f(b) - f(a) = (b-a)\,f'(\xi) = h f'(\xi) \quad (\xi = a + \vartheta h, 0 < \vartheta < 1) \qquad (1)$$

1) Nebenbei bemerkt: Für Schulzwecke genügt vollständig ein Rechenschieber aus Pappe statt des immerhin teuren Rechenschiebers aus Holz, der leicht in der Hand des Schülers zum Spielzeug wird. Sehr zweckmäßig scheint mir für die Schule der Rechenschieber zu sein, den die Firma Dr.-Ing. Seehase in Berlin SO 33, Elsenstraße 1, seit einigen Jahren anfertigt (Pappe mit Zellhornüberzug und durchsichtigem Läufer; Preis 1,60 RM).

2) Ich schreibe lieber ξ statt des Toeplitzschen t und $-\mu$ statt μ.



liefert, was schon aus geometrischen Gründen einleuchtet. Damit wird das Maximum des Fehlers

$$\mu(a, b) = f(a) - f(\xi) + \vartheta h f'(\xi). \tag{2}$$

Um ihn abschätzen zu können, entwickle man, die gegebene Funktion $f(x)$ als $(p+1)$mal im Bereiche $(a \ldots b)$ differenzierbar ansehend, $f(\xi)$ und $f'(\xi)$ nach Potenzen von ϑh sowie $f(b)$ nach Potenzen von h nach dem Taylorschen Satze mit Restglied

$$\begin{aligned} f(\xi) = f(a) + \vartheta h f'(a) + \frac{\vartheta^2 h^2}{2!} f''(a) + \cdots + \frac{\vartheta^p h^p}{p!} f^{(p)}(a) \\ + \frac{\vartheta^{p+1} h^{p+1}}{(p+1)} f^{(p+1)}(\xi_1), \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} f'(\xi) = f'(a) + \vartheta h f''(a) + \frac{\vartheta^2 h^2}{2!} f'''(a) + \cdots + \frac{\vartheta^{p-1} h^{p-1}}{(p-1)!} f^{(p)}(a) \\ + \frac{\vartheta^p h^p}{p!} f^{(p+1)}(\xi_2), \end{aligned} \tag{4}$$

$$f(b) = f(a) + h f'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \cdots + \frac{h^p}{p!} f^{(p)}(a) + \frac{h^{p+1}}{(p+1)!} f^{(p+1)}(\Xi), \tag{5}$$

wobei

$$\xi_1 = a + \vartheta_1 \vartheta h, \quad \xi_2 = a + \vartheta_2 \vartheta h, \quad \Xi = a + \Theta h \qquad (0 < \vartheta_1 < 1,\ 0 < \vartheta_2 < 1,\ 0 < \Theta < 1)$$

gesetzt worden ist, und $p \geqq 1$ eine beliebige ganze Zahl bedeutet. Man darf dabei nicht vergessen, daß ϑ_1, ϑ_2, Θ sich ändern, wenn a, b oder p geändert werden.

Nun setze man (4) und (5) in (1), sowie (3) und (4) in (2) ein, so erhält man (nach Division durch h^2)

$$\begin{aligned} \left(\vartheta - \frac{1}{2}\right) f''(a) + \left(\vartheta^2 - \frac{1}{3}\right) \frac{h}{2!} f'''(a) + \cdots + \left(\vartheta^{p-1} - \frac{1}{p}\right) \frac{h^{p-2}}{(p-1)!} f^{(p)}(a) \\ + \frac{h^{p-1}}{p!} \left(\vartheta^p f^{(p+1)}(\xi_2) - \frac{1}{p+1} f^{(p+1)}(\Xi)\right) = 0, \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} \mu(a, b) = \frac{\vartheta^2 h^2}{2!} f''(a) + \frac{2\vartheta^3 h^3}{3!} f'''(a) + \frac{3\vartheta^4 h^4}{4!} f^{(4)}(a) + \cdots \\ + \frac{(p-1)\vartheta^p h^p}{p!} f^{(p)}(a) + \frac{\vartheta^{p+1} h^{p+1}}{p!} \cdot \left(f^{(p+1)}(\xi_2) - \frac{1}{p+1} f^{(p+1)}(\xi_1)\right). \end{aligned} \tag{7}$$

6. Aus diesen beiden Formeln kann man nun in aller Schärfe das Verhalten der Größen $\vartheta(a, b)$ und $\mu(a, b)$ erkennen, wenn die Länge $h = b - a$ des Bereiches $(a \ldots b)$ genügend klein ist.

I. Es sei *$f''a$ von Null verschieden* und $f''(x)$ im Bereiche $(a \ldots b)$ *stetig*. Für $p = 1$ gehen (6) und (7) über in

$$\vartheta f''(\xi_2) - \tfrac{1}{2} f''(\Xi) = 0, \tag{7a}$$

$$\mu(a, b) = \vartheta^2 h^2 (f''(\xi_2) - \tfrac{1}{2} f''(\xi_1)); \tag{7b}$$

läßt man nun $h \to 0$ konvergieren, so erhält man wegen

$$b \to a, \ \xi_1 \to a, \ \xi_2 \to a, \ \Xi \to a$$

und infolge der vorausgesetzten Stetigkeit von $f''(x)$

$$\lim_{h \to 0} \vartheta = \tfrac{1}{2}, \tag{8}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\mu(a, b)}{h^2} = \tfrac{1}{8} f''(a). \tag{9}$$

Die erste dieser beiden Formeln ist mir in Laurents Traité d'analyse Vol. I p. 96 begegnet und war vermutlich schon Cauchy bekannt; sie sagt aus, daß, je kleiner der Bereich $(a \ldots b)$ ist, um so mehr die Stelle des größten Fehlers bei linearer Interpolation in die Mitte des Bereiches rückt. Die zweite Formel, in der weniger genauen Form

$$\mu(a, b) \approx \tfrac{1}{8} f''(a) \cdot h^2$$

geschrieben, gibt eine Abschätzung dieses größten Fehlers, ist ebenfalls bekannt und stimmt auch mit Herrn Toeplitz' Formel (2)[1]) überein.

7. Bildet man aus den drei Funktionswerten

$$f(a), \; f(a + h) = f(b), \; f(a + 2h) = f(b + h)$$

die zweite Differenz

$$\Delta^2 f(a) = f(a + 2h) - 2f(a + h) + f(a),$$

so ist bekanntlich
$$\lim_{h \to 0} \frac{\Delta^2 f(a)}{h^2} = f''(a).$$

Man kann daher die Näherungsformel auch in der Gestalt

$$\mu(a, b) \approx \tfrac{1}{8} \Delta^2 f(a)$$

schreiben, und hierin liegt die Begründung für die oben angeführte Bemerkung auf S. 1 der „Hütte", Bd. I, daß lineare Interpolation nur insoweit zulässig sei, als der achte Teil der zweiten Tafeldifferenz (nämlich $\mu(a, b)$) unberücksichtigt bleiben darf.

8. II. Es sei $f''(a) = 0$. Dann gelten die Ergebnisse (8) und (9) nicht mehr. Um gleich den allgemeinsten Fall zu erledigen, werde

$$f''(a) = 0, \; f'''(a) = 0, \; \ldots, \; f^{(p)}(a) = 0,$$

dagegen
$$f^{(p+1)}(a) \neq 0$$

und $f^{(p+1)}(x)$ im Bereiche $(a \ldots b)$ *stetig* angenommen. Dann lauten die Formeln (9) und (7) folgendermaßen

$$\vartheta^p f^{(p+1)}(\xi_2) - \frac{1}{p+1} f^{(p+1)}(\Xi) = 0,$$

$$\mu(a, b) = \frac{\vartheta^{p+1} h^{p+1}}{p!} \left(f^{(p+1)}(\xi_2) - \frac{1}{p+1} f^{(p+1)}(\xi_1) \right).$$

Für $h \to 0$ ergibt sich jetzt
$$\lim_{h \to 0} \vartheta = \frac{1}{\sqrt[p]{p+1}}, \tag{10}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\mu(a, b)}{h^{p+1}} = \frac{1}{(p+1)^2 \sqrt[p]{p+1}\,(p-1)!} \cdot f^{(p+1)}(a). \tag{11}$$

---

1) Abgesehen vom Vorzeichen; vgl. Fußnote [2]) auf S. 317.

Dieser Fall tritt dann ein, wenn die Kurve $y = f(x)$ an der untersuchten Stelle a einen Wende- oder einen Flachpunkt besitzt. Bei der logarithmischen Linie kommt das nicht vor; Beispiele sind $f(x) = \sin x$ bei $x = 0$, $f(x) = x^n$ ($n > 2$ ganz) bei $x = 0$, $f(x) = \log \operatorname{tg} x$ bei $x = \frac{\pi}{4}$ u. a. Für die lineare Interpolation tritt hier überhaupt keine Schwierigkeit auf, da ja in der Formel (11) die Größe des Bereiches von höherer als der zweiten Potenz vorkommen muß. Dieser Fall hat also rein theoretisches Interesse, und ich habe ihn hier nur der Vollständigkeit wegen erwähnt. Für $p = 2$ z. B. ergibt sich

$$\lim_{h \to 0} \vartheta = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0{,}577,$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\mu}{h^3} = \frac{1}{9\sqrt{3}} f'''(a) = 0{,}0641\, f'''(a).$$

9. Es soll sich nun umgekehrt darum handeln, den größtmöglichen Fehler abzuschätzen, der bei der Bestimmung des Argumentwertes (Numerus) zu einem gegebenen Funktionswert y entsteht, wenn man jenen durch lineare Interpolation ermittelt. Bezeichnet man mit $\nu(a, b)$ diesen Fehler, so kann man sich zu seiner Abschätzung derselben Formel (9) bedienen, wenn man statt $f(x)$ darin die Umkehrungsfunktion $x = \varphi(y)$ einführt. Wenn Θ, k, η_1, η_2 die entsprechende Bedeutung in bezug auf diese haben, wie ϑ, h, ξ_1, ξ_2 in bezug auf $y = f(x)$, so hat man zunächst statt (7 b)

$$\nu(a, b) = \Theta^2 k^2 (\varphi''(\eta_2) - \tfrac{1}{2}\varphi''(\eta_1)).$$

Nach Division durch h^2 und Grenzübergang folgt hieraus, falls $f'(a) \neq 0$, $f''(a) \neq 0$ ist, wegen

$$\lim_{h \to 0} \frac{k}{h} = f'(a), \quad \lim_{h \to 0} \Theta = \tfrac{1}{2},$$

$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}, \quad \varphi''(y) = -\frac{f''(x)}{f'(x)^3}$$

nach leichter Zwischenrechnung

$$\lim_{h \to 0} \frac{\nu(a, b)}{h^2} = -\frac{1}{8} \frac{f''(a)}{f'(a)}.$$

Der größte Fehler der Funktion verhält sich daher zum entsprechenden größten Fehler des Argumentes im Grenzfall wie $-f'(a) : 1$. Das ist der Inhalt der Formel (4) bei Herrn Toeplitz.

10. Alle diese Ergebnisse lassen sich nun aber noch nicht ohne weiteres für das praktische Rechnen mit einer tabellarisch gegebenen Funktion verwenden, sondern bedürfen deswegen noch einer wesentlichen Korrektur, weil ja die Funktionswerte nicht genau, wie im vorhergehenden stillschweigend vorausgesetzt war, sondern nur mit einer bestimmten Stellenzahl tabuliert sind. Es kommt also zu dem Fehler der linearen Interpolation noch der Fehler hinzu, der durch die Abrundung entstanden ist. Bei einer $r$stelligen Tafel beträgt er höchstens

$$\pm 0{,}5 \cdot 10^{-r}.$$

Es mag hier genügen, bezüglich der sehr einfachen Betrachtungen, die dann noch anzustellen wären, auf den § 39 des Lürothschen Buches zu verweisen.

Über die neue Zählweise der Stundenwinkel in der Astronomie.

Von Ruoss in Stuttgart.

Mit 2 Figuren im Text.

Vom Jahre 1925 an ist in den nautisch-astronomischen Werken aller Kulturvölker statt der bisher üblichen astronomischen die nautisch-bürgerliche Zählweise des Datums eingeführt worden, wobei die Stunden mit 0 Uhr Mitternachts beginnen und bis 24 Uhr durchgezählt werden. (Vgl. die Nautischen Jahrb. 1925, 1926, 1927, herausgegeben vom Reichswirtschaftsministerium, ferner The Nautical Almanac and Astronomical Ephemeris der britischen Admiralität, sowie The American Ephemeris and Nautical Almanac des U. S. Naval Observatory.)

Der Stundenwinkel eines Gestirns wird jetzt definiert (siehe Seite VIII des Nautischen Jahrbuchs) als Winkel zwischen dem *unteren* Himmelsmeridian eines Orts und dem Stundenkreis des Gestirns, gezählt vom *unteren* Meridian im Sinne der scheinbaren täglichen Bewegung der Himmelskugel von 0 Stunden bis 24 Stunden. Beim neuen Jahrbuch fällt es auf, daß der Ausdruck „*Sternzeit*" für den Stundenwinkel des Widderpunktes sichtlich vermieden wurde. Die Tatsache aber, daß es Sternuhren gibt, und daß wir im Unterricht gute Erfahrungen mit Einführung des Begriffes Sternzeit gemacht haben, dürfte dazu führen, daß wir künftig von „*nautischer Sternzeit*" sprechen.

(In früheren Jahrgängen des Nautischen Jahrbuchs war noch die Rede von „*Sternzeit* im mittleren Mittag von Greenwich", später hieß es dafür „Rektaszension der mittleren Sonne im mittleren Mittag von Greenwich".)

Das Nautische Jahrbuch ist so billig und das Interesse der Schüler für sphärische Trigonometrie und Astronomie wird durch dasselbe so gesteigert, daß sich die jährliche Beschaffung sehr lohnt. Unumgänglich notwendig wird es für astronomische Schülerübungen.

Die Vorteile der neuen Zählweise sind so beträchtlich, daß die Einführung der letzteren in Kürze allgemein sein dürfte. Ich möchte hier auf einen Nachteil der früheren Zählweise hinweisen an einem Beispiel.

Fragt man, wann ein Ereignis am 15. Juli eines Erdorts eintritt, so muß man bei der alten Zählweise mit dem astronomischen 15. Juli, d. h. mit der Zeit Mittag den 15. Juli bis Mittag den 16. Juli rechnen, findet also eventuell ein Resultat, das in den bürgerlichen 15. Juli überhaupt nicht hineinpaßt, bei der neuen Zählweise ist dies nicht mehr möglich.

Für die neue Zählweise ist, wie früher,

Sternzeit = Rektaszension eines beliebigen Gestirns plus Stundenwinkel des Gestirns (1)

$$s = \alpha + t,$$

die obere Kulmination des Gestirns tritt aber nunmehr ein zur Sternzeit

$$s = \alpha + 12\,st.$$

Sternzeit und MOZ nehmen zu pro 1^0 O — wie bisher — um 4 Minuten oder um die sogenannte Längenzeit; auch hat man wie früher

Mittlere Zeit = wahre Zeit plus Zeitgleichung (2)

$$m = w + g.$$



Die wahre Sonne wird passend mit ⊙, die mittlere Sonne mit Φ (falsche oder durchstrichene Sonne) bezeichnet.

Ist an einem Erdort, an einem bestimmten Tag, z. B. am *10. Juli 1927*, die Sternzeit des Orts um 0 Uhr morgens MOZ gleich s_0, so besteht für den ganzen 10. Juli bis 24 st nachts, zwischen Sternzeit s und MOZ m die Beziehung

$$\left.\begin{aligned} m &= \text{in mittlere Zeit verwandeltes } (s - s_0); \\ s - s_0 &= \text{in Sternzeit verwandeltes } m. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Die Sternzeit s_0 um 0 Uhr ist auch gleich der Rektaszension der Φ um 0 Uhr. Die hier vorkommenden Verwandlungen lassen sich leicht vollziehen mit den Tafeln 178 und 179, welche auf meine Veranlassung hin, in die Logarithmentafeln von Gauß aufgenommen wurden. Für den 10. Juli nachts 24 Uhr, d. h. den 11. Juli morgens 0 Uhr ist $s - s_0 =$ verw. 24 st = 24. 3. 57 = 0. 3. 57 also $s = s_0 + 0.\,3.\,57$, d. h. die Sternzeit um 0 Uhr morgens nimmt für ein und denselben Ort pro Tag um 0 · 3 · 57 zu.

Ist um 0 Uhr, 10. Juli morgens, in Greenwich die Sternzeit s_0, so ist sie z. B. um 0 Uhr morgens, *10. Juli in Ulm*

$$s_0' = s_0 - \tfrac{2}{3}\,\lambda^0 \text{ Sekunden}, \tag{4}$$

wo λ_0 die östliche Länge von Ulm ist, d. h.

die Sternzeit um 0 Uhr morgens nimmt um $\frac{2}{3}$ Sekunden für 1 Grad Ost ab.

Ich glaube nicht, daß man ohne den letzten Satz, den man vergebens in unsern Schulbüchern sucht, auskommen kann.

Schwab-Lesser, *Trigonometrie*, vollzieht auf S. 100 die Verwandlung von Sternzeit eines Erdortes in mittlere Zeit eines anderen Ortes ohne Benutzung des letzten Satzes; würde man aber in seinem Beispiel, statt $s = 15$ Uhr New-Haven, nehmen $s = 23$ Uhr New-Haven, so würde man zu einem falschen Resultat gelangen, da für den angegebenen Zeitpunkt das Datum von New-Haven und Greenwich differiert.

Man nennt in der Astronomie $\frac{2}{3}\lambda$ *die Korrektion der Sternzeit* (Berliner Astr. Jahrbuch S. 465).

Der Beweis für den letzteren Satz kann etwa folgendermaßen geführt werden, indem man die Bewegungen der *Schnittlinien* des Stundenkreises von Φ und ♈ mit dem Himmelsäquator betrachtet und alle Winkel und Bögen in Stunden mißt. NS sei die Schnittlinie des Himmelsmeridians von Greenwich mit dem Äquator; $N'S'$ diejenige des Himmelsmeridians des Ortes X, der die Länge λ Stunden **West** besitzt, so daß $NN' = \lambda$ st.

Ist die Schnittlinie des Stundenkreises der Φ nach ON gelangt, so möge diejenige des ♈ nach O♈ gelangt sein, es ist dann in Greenwich 0 Uhr MOZ und s_0 Uhr Sternzeit (siehe die Figur). Die Φ bewegt sich jetzt weiter; die Schnittlinie ihres Stundenkreises gelangt nach ON', unterdessen ist die Schnittlinie des Stundenkreises des ♈ nach ♈′ gelangt. Es ist jetzt, im Orte X, 0 Uhr MOZ und s_0' Sternzeit. Da sich der ♈ schneller bewegt hat als die Φ, so ist

$$\text{Bogen } \Upsilon\Upsilon' > NN' \text{ und zwar Bogen } \Upsilon\Upsilon' = \frac{24\text{ st}}{23{,}934\text{ st}}\,\lambda = 1{,}0027\,\lambda.$$

Nun ist für die Bögen $\Upsilon\Upsilon' + s_0 = \lambda + s_0'$, also $1{,}0027\lambda + s_0 = \lambda + s_0'$, daher $s_0' = s_0 + 0{,}0027\ \lambda$ für λ Stunden West.

Der 2. Summand ist gleich $0{,}0027 \cdot 60 \cdot 60 \cdot \frac{\lambda^0}{15} = \frac{2}{3}\lambda^0$ Sekunden.

Das nautische Dreieck projiziert man am einfachsten auf dem Horizont (Fig. 1 und 2). Die Lage eines Gestirns im Osten oder Westen des Ortsmeridians sowie die betreffenden Stundenwinkel werden dadurch besonders deutlich und es ist nicht notwendig, den Ostpunkt des Horizonts bald nach vorn,

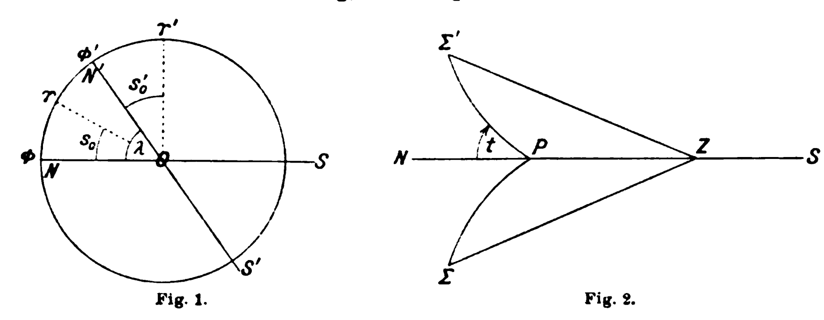


Fig. 1. Fig. 2.

bald nach hinten zu legen, um ein in der Zeichnung *sichtbares* sphärisches Dreieck zu erhalten, wie z. B. bei Schmehl, *Sphärische Astronomie.*

Die folgenden Aufgaben, bei denen für Erdorte und Sternorte absichtlich ganze Zahlenangaben gewählt wurden, werden die Anwendung der Formeln dartun.

Aufgabe 1. Um wieviel Uhr Weltzeit findet in Philadelphia, im Philadelphiaer 7. Juli (0 Uhr morgens bis 24 Uhr abends) 1927, die obere Kulmination des Aldebaran statt? $\lambda = 75^0$ West; $\alpha = 4$ st und, nach dem nautischen Jahrbuch, $s_0 = 6$ st. 55. 51 die Rektaszension der Φ um 0 Uhr Weltzeit am 7. Juli.

Lösung. $s = \alpha + t$, $s = 4 + 12 = 16$ st. Phil.; $s_0 = 6.\ 55.\ 51 + \frac{2}{3}\ 7\ 5$ sec $= 6.\ 56.\ 41$, 7. Juli Phi.; $m =$ verwand. $(16 - 6.\ 56.\ 41) = 9.1.50$; 7. Juli Phi. $m = 14$ st. 1. 50 Greenw. 7. Juli, also 14 st. 1. 50 Weltzeit oder 15. 1. 50 MEZ.

	Phi.	Greenw.	Stargard	
λ östliche Länge Längenzeit	-75^0 -5 st.	0 0	15^0 1 st.	
s_0	6. 56. 41 *7. Juli*	*6. 55. 51* *7. Juli*		Abnahme $^2/_3$ sec. für 1° Ost
s	16 st			Zunahme 4 m für 1° Ost (Längenzeitzunahme)
m	9. 1. 50 *7. Juli*	14. 1. 50 7. Juli		

s_0 Sternzeit um 0 Uhr morgens.

s Sternzeit, m dazu gehörige mittlere Zeit.



Aufgabe 2. Wie Aufgabe 1, aber $\alpha = 18$st. (Wega). Man hat

$s = 18 + 12 = 30$st. $= 6$ st., $s_0 = 6.\ 56.\ 41$; $m =$ verw. $(6 - 6.\ 56.\ 41)$

Die Klammer ist durch Addition von 24 st. positiv zu machen.

$m =$ verw. 23. 3. 19 = 22. 59. 32, 7. Juli Phi damit $m = 27.\ 59.\ 32$, 7. Juli
= 3. 59. 32, 8. Juli Weltzeit oder 4. 59. 32, 8. Juli MEZ.

Es findet Datumswechsel statt.

Aufgabe 3. Wie Aufgabe 1, aber $\alpha = 19$ st. Man hat $s = 7$ st. $m =$ verw. $(7 - 6.\ 56.\ 41) =$ verw. 0. 3. 19 = 0. 3. 18, 7. Juli Phi., auch die nächstfolgende obere Kulmination, die einen Sterntag = 23. 56. 4 später eintritt, fällt noch in den 7. Juli und findet statt um $m_1 = 23.\ 59.\ 22$ Phi. oder 28. 59. 22, 7. Juli Green., d. h. um 4. 59. 22, 8. Juli Weltzeit. Der 7. Juli Phi. dauert von $s = 6.\ 56.\ 41$ bis $s = 6.\ 56.\ 41 + 24.\ 3.\ 56 = 31.\ 0.\ 37$, zweimal steht an diesem Tag der Zeiger der Sternuhr auf 7 Uhr.

Diese drei Aufgaben zeigen die Verwandlung der Sternzeitangaben in mittlere Zeitangaben.

Aufgabe 4. In Ulm, $\lambda = 10^0$O, tritt ein Ereignis um 0 Uhr 10.0 am 7. Juli 1927 MEZ ein, welches sind in diesem Augenblick die MOZ und SOZ in Ulm und Greenwich?

Nach dem Jahrbuch ist in Greenwich um 0 Uhr 7. Juli, $s_0 = 6.\ 55.\ 51$ also in Stargard, um 0 Uhr; 7. Juli, $s_0 = 6.\ 55.\ 51 - \frac{2}{3} \cdot 15$ sec $= 6.\ 55.\ 41$; $s - 6 \cdot 55 \cdot 41 =$ verw. 0. 10. 0 = 0. 10. 1; $s = 7.\ 5.\ 42$ Stargard, hieraus

	Green.	Ulm	St.	
λ	0 0	10° 40m	15° 1 st.	
s_0	6. 55. 51 *7. Juli*		6. 55. 41 *7. Juli*	Abnahme ⅔ sec für 1°O
s			7. 5. 42 0	Zunahme gleich Längenzeitzunahme
m	23. 10. 0 6. Juli	28. 50. 0 6. Juli	0. 10. 0 *7. Juli*	

Greenwich: Sternzeit 6. 5. 42; mittlere Zeit 23. 10. 0, 6. Juli
Ulm: Sternzeit 7. 5. 22; mittlere Zeit 23. 50. 0, 6. Juli.

Wäre statt der MEZ die MOZ von Ulm gegeben, so würde man die Spalte von Ulm berechnen, es wäre für Ulm alsdann $s_0 = 6.\ 55.\ 44$, 7. Juli. In den Schemen werden die Tage zu s unter m angegeben; etwaiges negatives s und s_0 ist durch Addition von 24 st. positiv zu machen.

Aufgabe 5. Man stelle den Sternglobus[1]) in Ulm für 23 Uhr (nachts) 7. Juli 1927 ein. $\lambda = 10^0$, $\varphi = 48^0$, $s_0 = 6.\ 55.\ 51$ für Greenwich 7. Juli. Für Ulm ist $m = 22.\ 40.\ 0$; $s_0 = 6.\ 55.\ 51 - \frac{2}{3} \cdot 10 = 6.\ 55.\ 44$, also $s - 6.\ 55.\ 44$

1) Ein solcher ist für den astronomischen Unterricht unbedingt notwendig.

= verw. 22. 40. 0 = 22 · 43 · 43, hieraus s = 5. 39. 27. Durch den Nordpol des Globus sind 24 Stundenkreise gezogen, sie machen je 15^0 = 1 st. miteinander, von diesen geht einer (der sogenannte erste) durch ♈. Man stellt den nicht rotierenden Metallmeridian in den Ortsmeridian, die Rotationsachse unter 48^0 Neigung gegen den Horizont, parallel der Himmelsachse und dreht die Kugel, bis der Stundenkreis des ♈ mit dem unteren Teil des Metallmeridians 5 st. 39. 37 macht.

Die Stellung zeigt jetzt Wega im Osten des Meridians, Arcturus im Westen desselben, es kulminieren augenblicklich die Sterne mit der Rektaszension

$$\alpha = s - 12 = 17.\ 39.\ 27 \quad \text{usw.}$$

Kleine Mitteilungen.

„Über die stereographische Projektion“. Zu diesem Artikel von Herrn H. Späth (dieser Jahrgang, S. 71) sei an einen alten Beweis erinnert, der für die Zwecke der Mittelschule die Hauptsätze dieser Abbildung wohl am einfachsten wiedergibt.

Sind g und h zwei Tangenten an die Kugel im Punkte P, ferner N der Augpunkt und Π die Bildebene, so schneiden die Ebenen Ng und Nh die Ebene Π und die dazu parallele Tangentialebene Π_0 von N nach parallelen Geradenpaaren: g', h' in Π und g_0, h_0 in Π_0. Wegen der Symmetrie bezüglich der Symmetrieebene der Sehne $\overline{NP}$ ist

$$\sphericalangle gh = \sphericalangle g_0 h_0$$

und weiter

$$\sphericalangle g_0 h_0 = \sphericalangle g' h'.$$

Damit ist die Winkeltreue für beliebige Kurven, die in P die Tangenten g und h haben, bewiesen.

Ist ein Kreis k auf der Kugel angenommen, so gibt es einen Drehkegel mit dem Scheitel S, der die Kugel längs k berührt. Die Erzeugenden dieses Kegels sind Kugeltangenten, welche je eine Tangente von k normal schneiden. Projiziert man diese Kegelerzeugenden von N auf Π, so erhält man ein Strahlbüschel mit dem Träger S', der die Projektion von S ist. Das Bild von k muß nun eine Kurve k' sein, die alle Strahlen eines Büschels normal schneidet; k' kann also nur ein Kreis mit dem Mittelpunkt S' sein.

Wien XIII. L. Eckhardt.

Ein Mittelwert. In den Anfangsgründen der Grenzwertlehre pflegt man diesen Satz zu beweisen: Wenn $a > b > 0$, dann haben diese Zahlenfolgen

$$a, a_1, a_2, a_3, \ldots; \quad \text{und} \quad b, b_1, b_2, b_3, \ldots,$$

wo

$$a_i = \sqrt{a_{i-1} b_{i-1}}, \quad b_i = \frac{a_i + b_{i-1}}{2}$$

ist (unter dem Wurzelwert immer den positiven Wert verstanden), denselben bestimmten Grenzwert. Bezeichnen wir diesen Grenzwert mit $L(a, b)$. Ich will diesen Grenzwert durch zyklometrische Funktion darstellen, analog zur Dar-



stellung des sogenannten Gaußschen arithmetisch-geometrischen Mittels, welches durch elliptische Integrale dargestellt wird.

Zu diesem Zweck nehmen wir zuerst den Winkel α an, wo $0 < \alpha < \pi$ ist. Dann ist

$$L\left(\frac{2}{\sin\alpha},\quad \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{2}{\alpha}.$$

Wenn wir nämlich

$$a = \frac{2}{\sin\alpha},\quad b = \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}$$

setzen (wobei, wie leicht zu zeigen ist, die Bedingung $a > b > 0$ erfüllt ist), so ist

$$a_1 = \sqrt{ab} = \frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}},\quad b_1 = \frac{a_1 + b}{2} = \frac{1}{2}\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{4}$$

$$a_2 = \frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{4}},\qquad b_2 = \frac{1}{4}\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{8}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_n = \frac{1}{2^{n-1}\sin\frac{\alpha}{2^n}},\qquad b_n = \frac{1}{2^n}\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2^{n+1}},$$

woraus nach einem sehr bekannten Grenzwertsatz $\left(\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1\right)$ folgt, daß

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \frac{2}{\alpha}.$$

Es ist klar, daß wenn ϱ eine beliebige positive Zahl bedeutet, dann ist

$$L(\varrho A,\ \varrho B) = \varrho L(A,\ B).$$

Nach dieser Bemerkung bestimmen wir ϱ und α so, daß

$$\frac{2\varrho}{\sin\alpha} = a,\quad \varrho\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} = b$$

sei, wo a und b die der Bedingung $a > b$ entsprechende gegebene positive Zahlen sind. Aus diesen Gleichungen erhalten wir

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{b}{a}},\quad \varrho = \sqrt{b(a-b)},$$

folglich ist

$$L(a,b) = L\left(\varrho\cdot\frac{2}{\sin\alpha},\quad \varrho\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\sqrt{b(a-b)}}{\arccos\sqrt{\frac{b}{a}}},$$

und damit haben wir den gesuchten Grenzwert $L(a,b)$ durch die zyklometrische Funktion $\arccos\sqrt{\frac{b}{a}}$ ausgedrückt.

Budapest. E. Beke.

Aufgaben-Repertorium.

Redigiert von Studienrat M. Brettar in Viersen (Burgstr. 2c).

(Alle das Aufgaben-Repertorium betreffenden Zusendungen und Anfragen sind an die Adresse dieses Herrn zu richten.)

A. Auflösungen.

905. Wie kann man sich leicht Zahlenmaterial zusammenstellen für die Aufgabe: Eine Kugel durch eine Ebene im Verhältnis $p:q$ zu teilen, wobei sowohl p und q als auch der Kugelradius und die Segmenthöhen ganzzahlig sein sollen? (Heft 3, 1926, Höhmann-Oranienburg.)

Lösung. Das Problem führt auf die Gleichung

$$q \cdot \tfrac{1}{3}\pi h^2(3r - h) = p \cdot \tfrac{1}{3}\pi(2r - h^2)(r + h),$$

die mit $\frac{r}{h} = x$ nach Umformung übergeht in $x^3 - \frac{3(p+q)}{4p}x + \frac{p+q}{4p} = 0.$

Für $x = 2$ ergibt sich $p:q = 5:27$,
$x = 3$ „ „ $= 8:100$,
$x = 4$ „ „ $= 11:245$,
$x = 5$ „ „ $= 14:486$,
$x = 6$ „ „ $= 17:847$,
$x = 7$ „ „ $= 20:1352$.

Die Verhältniszahlen von p bilden eine arithmetische Reihe 1. Ordnung mit dem allgemeinen Gliede $a_{1,y} = 5 + 3y$, die von q eine solche 3. Ordnung mit dem allgemeinen Gliede $a_{3,y} = A_0y^3 + A_1y^2 + A_2y + A_3$.

$y = 0$ liefert $A_3 = 27$,
$y = 1$ „ $A_0 + A_1 + A_2 + A_3 = 100$,
$y = 2$ „ $8A_0 + 4A_1 + 2A_2 + A_3 = 245$,
$y = 3$ „ $27A_0 + 9A_1 + 3A_2 + A_3 = 486$.

Hieraus fließt: $A_0 = 4$, $A_1 = 24$, $A_2 = 45$. Mithin hat das allgemeine Glied die Form $a_{3,y} = 4y^3 + 24y^2 + 45y + 27 = (y+3)(2y+3)^2$. Die zugehörigen x-Werte ergeben sich aus $x = 2 + y$. Es steht uns also folgendes Formelmaterial zur Verfügung:

$$x = 2 + y; \quad r = (2 + y)\cdot h; \quad p = 5 + 3y; \quad q = (y + 3)(2y + 3)^2.$$

Ergebnisse sind in folgenden Tabellen zusammengestellt.

1.

y	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
r	$2h$	$3h$	$4h$	$5h$	$6h$	$7h$	$8h$	$9h$	$10h$	$11h$
p	5	8	11	14	17	20	23	26	29	32
q	27	100	245	486	847	1352	2025	2890	3971	5292

2.

y	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$x = \frac{y+3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{6}{2}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{8}{2}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{10}{2}$	$\frac{11}{2}$	$\frac{12}{2}$
$2r = (y+3) \cdot h$	$3h$	$4h$	$5h$	$6h$	$7h$	$8h$	$9h$	$10h$	$11h$	$12h$
$p = 7 + 3y$	7	10	13	16	19	22	25	28	31	34
$q = (y+5)(y+2)^2$	20	54	112	200	324	490	704	972	1300	1694

3.

y	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$x = \frac{y+3}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{6}{3}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{9}{3}$	$\frac{10}{3}$	$\frac{11}{3}$	$\frac{12}{3}$	$\frac{13}{3}$
$3r = (y+4) \cdot h$	$4h$	$5h$	$6h$	$7h$	$8h$	$9h$	$10h$	$11h$	$12h$	$13h$
$p = 81 + 27y$	81	108	135	162	189	216	243	270	297	324
$q = (y+7)(2y+5)^2$	175	392	729	1210	1859	2700	3757	5054	6615	8464

Bücking. Conrad. Diez. Hoffmann. Höhmann. Jacob. Janzen. Mahrenholz. Peters. Rall. Sós. Stiegler.

906. Innerhalb einer dreiseitigen Ecke mit den Kantenwinkeln λ, μ, ν liege Punkt P in den Abständen l, m, n von den Seitenflächen. Man soll durch P dasjenige Dreieck legen, das von der Ecke die Pyramide von kleinstem Mantel abschneidet. ($\lambda = \mu = \nu = 90^0$; $l = 1$, $m = 2$, $n = 3$. Heft 3, 1926, Emmerich-Mülheim/Ruhr.)

Lösung. Mit den Seiten λ, μ, ν eines sphärischen Dreiecks sind auch seine Höhen λ', μ', ν', gegeben; es ist z. B. $\sin \lambda' = 2R : \sin \lambda$, wo

$$R = \sqrt{\sin \sigma \sin (\sigma - \lambda) \sin (\sigma - \mu) \sin (\sigma - \nu)}$$

ist. Mithin sind durch $l, m, n, \lambda, \mu, \nu$ auch die Koordinaten von P bestimmt, z. B. $a = l : \sin \lambda' = \frac{1}{2} l \sin \lambda : R$.

Bildet man nun aus $f: yz \sin \lambda + zx \sin \mu + xy \sin \nu$ und $\varphi: \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} - 1$ die Funktion $f + \varkappa \varphi$ und setzt deren partielle Ableitungen gleich Null, so erhält man den Zyklus

$$z \sin \mu + y \sin \nu - \varkappa \frac{a}{x^2} = 0, \ldots, \ldots$$

Multipliziert man diese Gleichungen der Reihe nach mit x, y, z und addiert, so ergibt sich $\varkappa = 2f$. Die erste Gleichung wird daher

$$z \sin \mu + y \sin \nu - \frac{2a}{x} \left(\frac{yz}{x} \sin \lambda + z \sin \mu + y \sin \nu \right) = 0,$$

und nach Division durch yz

$$\left(\frac{\sin \lambda}{x} + \frac{\sin \mu}{y} + \frac{\sin \nu}{z} \right) \left(1 - \frac{2a}{x} \right) - \frac{\sin \lambda}{x} = 0.$$

Entsprechendes erhält man aus der zweiten und dritten Gleichung. Daher wird unter Einführung einer Hilfsgröße w

$$\frac{x-2a}{\sin\lambda} = \frac{y-2b}{\sin\mu} = \frac{z-2c}{\sin\nu} = \frac{w}{R},$$

$$x = (w+l)\frac{\sin\lambda}{R}, \quad y = (w+m)\frac{\sin\mu}{R}, \quad z = (w+n)\frac{\sin\nu}{R}.$$

Gemäß der Bedingung $\varphi = 0$ ist nun w Wurzel der Gleichung

$$\frac{l}{w+l} + \frac{m}{w+m} + \frac{n}{w+n} = 2 \quad \text{oder} \quad \frac{1}{w+l} + \frac{1}{w+m} + \frac{1}{w+n} - \frac{1}{w} = 0,$$

$$\psi(w) \quad : \quad 2w^3 + (l+m+n)w^2 - lmn = 0.$$

Neben einer positiven Wurzel w_1 haben wir zwei negative Wurzeln $-l > w_2 > -m > w_3 > -n$, falls $l < m < n$, wie aus $\psi(-l) = -l(l-m)(l-n)$, $\psi(-m) = -m(m-n)(m-l)$, $\psi(-n) = -n(n-l)(n-m)$ folgt. w_2 und w_3 kommen also für ein positives Wertsystem x, y, z nicht in Betracht. Mit w_1 ergibt sich für den Mantel vom kleinsten Flächeninhalt

$$M_0 = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin\lambda\sin\mu\sin\nu}{R^2}\cdot\frac{(w+l)(w+m)(w+n)}{w}$$

und für den Inhalt des Tetraeders $\frac{2}{3}M_0 w$. — Im Beispiel erhalten wir aus $w^3 + 3w^2 - 3 = 0$ die positive Wurzel $w_1 = 2\cos 20^0 - 1$, daraus $x = y - 2 = z - 4 = 3{,}75877$, $M_0 = 47{,}745$ und $J = 27{,}991$.

Zusatz. Soll mittels einer durch P gelegten Ebene die Pyramide vom kleinsten Volumen abgeschnitten werden, so erhält man (vgl. Bd. 14, S. 188) $x = 3a$, $y = 3b$, $z = 3c$, $J_0 = 9Rabc = 9lmn \sin\lambda \sin\mu \sin\nu : 8R^2$; in unserem Zahlenbeispiel $J_0 = 27$, $M = 49{,}5$.

Brehm. Bücking. Conrad. Diez. Emmerich. Hoffmann. Mahrenholz. Münst. Rall. Scharffetter. Stiegler.

B. Neue Aufgaben.

962. Ist H der Höhenschnittpunkt des Dreiecks ABC, so ist

$$2\overline{CH} = \varrho + \varrho_a + \varrho_b - \varrho_c.$$

Hörting-Zeitz.

963. Auf der Kugeloberfläche sei ein größter Kreis K und ein Punkt P außerhalb desselben gegeben. Man bestimme jenen größten Kreis durch P, der mit K einen möglichst kleinen spitzen Winkel einschließt. Stengel-München.

964. Durch den Brennpunkt F einer Parabel vom Parameter $2p$ zieht man eine Gerade, welche die Parabel in Q_1 und Q_2, ihre Scheiteltangente in R schneidet. In Q_1 bzw. Q_2 wird auf FR das Lot errichtet, und mit der Parallelen durch R zur Parabelachse in P zum Schnitt gebracht. Dann durchläuft P eine Kurve 6. Ordnung, wenn sich FR um F dreht. Diese Kurve geht durch den Scheitel der Parabel und verläuft ganz in ihrem Innern. Sie hat die Parabelachse zur Rückkehrasymptote und in deren unendlich fernem Punkt einen Selbstberührungspunkt. Zieht man in dieser Kurve die Sehnen parallel zur Parabelachse, so ist der Ort ihrer Mitten eine Kurve 4. Ordnung mit derselben Rück-

kehrasymptote, die ganz innerhalb der koaxialen Parabel vom Parameter $\frac{p}{2}$ verläuft. HOFFMANN-Ravensburg.

965. Errichtet man auf den Seiten eines Vierecks die Mittellote und wiederholt die Zeichnung bei dem Viereck, das durch die Schnittpunkte zweier benachbarter Mittellote entsteht, so erhält man ein drittes, dem ersten ähnliches Viereck. CONRAD-Moers.

966. Es sind alle Dreiecke mit ganzzahligen Seiten derart zu bestimmen, daß in jedem die Maßzahl des Umfangs gleich der Maßzahl des Inhalts ist. MICHNIK-Beuthen.

967. Konstruiert man im Punkte P der Ellipse die Normale, welche die Nebenachse in B schneidet, so ist der Ort der Schnittpunkte S der Geraden BF und der Parallelen durch P zur Hauptachse die Leitlinie, wenn P auf der Ellipse wandert. Gilt diese Behauptung auch für die andern Kegelschnitte? PREUSS-Dortmund.

Briefkasten zum Aufgaben-Repertorium.

Bis zum 24. Juli gingen an Auflösungen ein: Bücking-Darmstadt 952. 956. Busse-Berlin/Wilmersdorf 956. Ehrlich-Berlin 956. Förster-Haspe 931. 936. 939. 941. 943. 944. 947—951. Hoffmann-Ravensburg 949. 951. 952. 954—956. Jacob-Erfurt 946. 951. Klobasa-Troppau 950. 951. 956. Michnik-Beuthen 956. 957. Münst-Ebingen 954. 956. Neumann-München 949. 950. Stiegler-Madrid 935. 950. 951.
Schülerlösung ging ein von Erna Lutter-Madrid 931.

Neue Aufgaben sandten ein: a) mit Lösung: Förster-Haspe (1), Hermann-Tübingen (1), Michnik-Beuthen (1), Neumann-München (5), Ruff-Wien (1); b) ohne Lösung: Fiebig-Charlottenburg (4), Nix-Höchst (1).

Notiz. Herr *L.-O.*: Das angeführte Problem läßt sich ohne algebraische Analysis *nicht* lösen. — Herr Hermann-*Tübingen* wird um kurze Formulierung der eingesandten Aufgaben gebeten.

Berichte.

Organisation, Verfügungen.

Mathematik und Physik in der Sächsischen Denkschrift. Die preußische Reform des höheren Schulwesens, wie sie in den Richtlinien von 1925 niedergelegt ist, hat mancherlei ernsthafte und wohlbegründete Widersprüche und Widerstände gefunden, die sich grundsätzlich gegen das System der starren Schultypen und die ihnen zur Pflege zugewiesenen Kulturbezirke richten. Der schwerwiegendste Einwand ist der, daß sich Begabungs- und Interessenrichtung eines Kindes, das mit 10 Jahren einer bestimmten höheren Schule zugeführt wird, in diesem Alter nur in den seltensten Fällen feststellen läßt, und daß dann, wenn diese Richtung später erkennbar ist, im preußischen System darauf kaum noch Rücksicht genommen werden kann und eine Umschulung fast unmöglich ist. So ist die Gefahr nicht von der Hand zu weisen, daß viele junge Menschen zwangläufig in eine Bahn geraten, die ihren Fähigkeiten und Neigungen nicht gemäß ist. Die in der Denkschrift von 1926[1]) festgelegte sächsische Reform

1) Zur Neuordnung des höheren Schulwesens in Sachsen, Denkschrift des Ministeriums für Volksbildung. C. C. Meinhold & Söhne, Dresden, 1926.



macht diesen Gedanken zur Grundlage ihres Aufbaues. Die sächsische Unterrichtsverwaltung „sieht das Ziel der Entwickelung — abgesehen von dem Gymnasium und dem Realgymnasium mit grundständigem Latein — in der *gegliederten höheren Einheitsschule*, die auf einem möglichst weitgehenden gemeinsamen Unter- und Mittelbau eine im wesentlichen nach Berufskomplexen gegliederte, aber durch eine Gruppe von Kernfächern zusammengehaltene Oberstufe trägt." Es wird damit die Entwickelung des Schulwesens der letzten Jahre bewußt aufgenommen und organisch weitergeführt. Das Gymnasium wird in keiner seiner Formen beeinträchtigt; vor allem wird das Reformgymnasium im Gegensatz zu Preußen erhalten. Mit Rücksicht auf die Pflege der griechischen Sprache nimmt das humanistische Gymnasium eine Sonderstellung ein ebenso wie das Realgymnasium mit grundständigem Latein, das nur noch in geringer Zahl besteht. Diese beiden Schularten gleichen sich aber doch auf der Unterstufe, so daß noch nach dem dritten Jahre ein Übergang ohne weiteres möglich ist. Eine Angleichung der übrigen Schularten ist dadurch erreicht worden, daß als erste neuere Fremdsprache überall das Englische vorgeschrieben worden ist. Auch im Mittelbau ist weitgehende Vereinheitlichung erreicht worden. Gymnasium und Realgymnasium mit grundständigem Englisch gleichen sich in den beiden ersten Jahren (UIII und OIII) und die deutsche Oberschule weicht von ihnen nur unwesentlich ab, wenn in ihr Latein und eine neuere Fremdsprache gelehrt wird, während sie sich im Mittelbau der Oberrealschule nähert, wenn sie zwei neuere Fremdsprachen hat. So ist der Bildungsgang auf der Unter- und Mittelstufe solange als möglich für die Schüler einheitlich, ein Schulwechsel also in dieser Zeit ohne Schwierigkeiten durchzuführen und die Entscheidung für eine bestimmte Berufsrichtung möglichst lange hinausgeschoben. Stärkere Differenzierung nach Begabungs- und Berufsrichtung macht sich in der Oberstufe der einzelnen Schulgattungen bemerkbar. In diesem Sinne ist weiter überall Gabelung in verschiedene Abteilungen und die Möglichkeit von Kursunterricht vorgesehen, wobei durch vorsichtige Begrenzung Zersplitterung vermieden wird und jeder Schule ihre Bildungseinheit gesichert bleibt. Religion, Deutsch, Geschichte, Erdkunde, philosophische Propädeutik und Turnen bilden auf der Oberstufe als Kernfächer die allen Schulen gemeinsame Bildungsgrundlage.

Die weitere Entwickelung stellt sich der sächsischen Unterrichtsverwaltung folgendermaßen dar (S. 50): „Für die Oberstufe wird als organisatorisches Prinzip die Gliederung nach Berufskomplexen immer größere Beachtung finden müssen. Schon heute lassen sich ja bestimmte Berufsgruppen unterscheiden, für die die einzelnen Schularten die beste Vorbildung geben. Eine wichtige Aufgabe wird darin bestehen, die Berufsgruppen für die verschiedenen Schulgattungen zusammen mit Wissenschaft und Wirtschaft immer deutlicher herauszuarbeiten und ihnen den Bildungsinhalt der einzelnen Schulart möglichst anzupassen. Darunter wird die Geschlossenheit der Bildungsziele nicht zu leiden brauchen. Diese Geschlossenheit wird aber nicht durch Kulturbezirke begründet, die sich zwar in der wissenschaftlichen Betrachtung, aber nicht im Leben voneinander trennen lassen, sondern durch Kulturbezirke, wie sie das praktische Leben tatsächlich formt."

Geradezu als grundlegend muß die entscheidende Betonung des Berufsgedankens im Rahmen des Bildungsaufbaues angesprochen werden. Denn dieser Gedanke ist recht gesehen tatsächlich der zentrale Gedanke unserer Zeit. Daß

damit die höheren Schulen nicht zu Fachschulen werden, braucht kaum gesagt zu werden, denn sie bereiten nie auf bestimmte Berufe vor, sondern führen, ausgehend von der „grundlegenden Bildung“ zu den allgemeinen Berufskomplexen hin. Abschließend und überzeugend sagt die Denkschrift zu diesem wichtigen Kapitel (S. 41): „Es ist klar, daß die Schule der ganzen Problematik der Berufswahl nicht gerecht werden kann, aber das darf sie nicht hindern, auf diesem auch sozialökonomisch so wichtigen Gebiete zu tun, was in ihren Kräften steht.“

Hier interessiert nun vor allem, welche Stellung in diesem Rahmen der Mathematik und den Naturwissenschaften insbesondere der Physik zugewiesen worden ist. Je ein allgemeiner Abschnitt ist in der Denkschrift der Mathematik (S. 124) und den Naturwissenschaften (S. 127) gewidmet. Freudig zu begrüßen ist es, welche hohe Anerkennung hier dem erziehlichen und dem kulturellen Werte der Mathematik und der Naturwissenschaften gezollt wird. Wir finden die wesentlichen und grundlegenden Motive moderner mathematischer und naturwissenschaftlicher Didaktik wieder. Betont wird für die Mathematik die Pflege der Raumanschauung und -phantasie. „Durch diese Entbindung von schöpferischen Phantasiekräften im Kinde wird der mathematische Unterricht reicher und vielgestaltiger. Auch die kulturkundliche Seite des mathematischen Unterrichts verlangt heute ihr Recht. Sie zeigt die Verbindungsfäden mit anderen Wissensgebieten. Die Geschichte der Mathematik reiht sich als wichtiges Glied in die Geschichte der Erfindungen und Entdeckungen des menschlichen Geistes ein. Die Lektüre von ausgewählten Stücken mathematischer und naturwissenschaftlicher Schriftsteller in beschränktem Umfang kann zur Belebung des Mathematikunterrichts dienen“. Auch die Bedeutung der Mathematik für die Tecknik wird unter dem Gedanken der Lebensnähe gewürdigt: „Jede Form der höheren Schule hat ihren Schülern soviel an mathematischen Kenntnissen mit in das Leben zu geben, daß sie Verständnis für die Welt der Technik und der Industrie, die eine so wichtige und beherrschende Rolle spielen, in ihre späteren Berufe mitbringen. Die altsprachlichen Anstalten und die Oberschulen müssen ihren Schülern eine solche mathematische Ausbildung zuteil werden lassen, daß von ihnen aus die Ausbildung zum Techniker und Ingenieur noch möglich ist.“ Hervorgehoben wird, daß sich die Lebensnähe besonders in der Auswahl der Aufgaben auszuwirken habe, die unter Ausscheidung ererbten, toten Ballastes aus dem unmittelbaren Anschauungskreise des Schülers hervorwachsen sollen. Es wird betont, daß die Aufgaben teilweise für den Schüler nachmeßbar und nachprüfbar sein müssen und der Nutzen wird anerkannt, den die Schüler davon haben, daß sie die praktisch gebräuchlichen Maß- und Beobachtungsmittel anschaulich kennenlernen. Auch der Hinweis auf die philosophische, besonders erkenntnistheoretische Seite der Mathematik fehlt nicht.

Freilich müssen auch mancherlei Einwände gegen den einen und anderen Gedanken der Denkschrift erhoben werden. So wird gesagt: „Die Verminderung der Stunden für Mathematik an der Oberrealschule entspricht Wünschen aus den Kreisen der Hochschulen. Vielfach kamen von ihnen Klagen weniger über ein Zuviel als über ein Zuvielerlei von mathematischem Wissen bei den Oberrealschülern. Was ihnen in Vorlesungen und Übungen in den ersten Semestern geboten wurde, glaubten sie längst zu wissen. Sie versäumten den Besuch der Vorlesungen für Anfänger und verloren dadurch vielfach den Anschluß an die spä-

teren Vorlesungen.“ Es kann kein Zweifel sein, daß diese Meinung nur in ganz vereinzelten Fällen tatsächlich begründet ist und es ist tief bedauerlich, daß zufolge dieser Einzelfälle die Oberrealschule in ihrer Hauptaufgabe, die erziehlichen und kulturellen Werte der Mathematik in ihrer vollen Tiefe auszuschöpfen, stark eingeschränkt wird; werden ihr doch 5 Stunden Mathematik genommen. Das Problem liegt freilich tiefer: Solange sich die Hochschule in ihren Anfangsvorlesungen auf die Abiturienten des Gymnasiums einstellt, solange wird die von den Abiturienten der Oberrealschulen geleistete Mehrarbeit auf mathematisch-naturwissenschaftlichem Gebiet ungenutzt bleiben und es werden sich immer wieder gewisse Schwierigkeiten und Spannungen ergeben. Man sieht unter dem Gesichtspunkte des Wirkungsgrades nicht ein, weshalb die Hochschulen sich diese Mehrarbeit nicht zunutze machen wollen; man darf der Meinung sein, daß die Anfangsvorlesungen auf der Hochschule sich so einrichten lassen, daß auch der Oberrealschüler von der ersten Stunde an fühlt, daß ihm hier neues geboten wird; man darf weiter der Meinung sein, daß aus Gründen der Billigkeit die Gymnasiasten ebenso ihre mathematischen Kenntnisse ergänzen könnten, wenn sie sich dem Studium der Mathematik oder der Technik widmen wollen, wie die Oberrealschüler ihr sprachliches Können und Wissen erweitern müssen, wenn sie klassische Sprachen oder Theologie studieren wollen. Das Dilemma wird noch schwieriger, wenn man den folgenden Satz der Denkschrift betrachtet, der die Zielsetzung für die sprachlich-geschichtliche Abteilung des humanistischen Gymnasiums behandelt: „Man wird sich damit zufrieden geben müssen, in den beiden Primen das bis Obersekunda Erreichte und Behandelte festzuhalten und zu vertiefen.“ Da nun immerhin die Möglichkeit besteht, daß auch Abiturienten dieser Abteilungen auf den Gedanken kommen könnten, Mathematik oder ein technisches Fach zu studieren, so steht zu befürchten, daß das hier gekennzeichnete Niveau für die Anfangsvorlesungen der Hochschulen richtunggebend werden könnte. Aber auch wenn man davon absieht, so muß doch diesen Abteilungen die Möglichkeit bleiben, ihren Schülern wenigstens in bescheidenem Maße einen Einblick in moderne mathematische Methoden zu geben.

Auch für die Naturwissenschaften werden die modernen didaktischen Ideen im allgemeinen Teile hervorgehoben. Lebensnähe des Unterrichts, Selbsttätigkeit der Schüler, praktische Schülerübungen werden eingehend gewürdigt. Während der Physikunterricht in Sachsen bisher in UII seinen Anfang nahm, wird der Beginn jetzt in den realen Anstalten nach OIII verlegt, im Gegensatz zu Preußen, das mit Physik schon in UIII beginnt. Auch werden in OIII im Winter zwei Wochenstunden für Übungen angesetzt an Stelle der beiden Spielstunden im Sommer. Der Lehrer soll diese Übungsstunden zur Herstellung einfacher physikalischer Apparate verwenden und als physikalische Propädeutik ausnutzen. Die Wertschätzung der Übungen findet ihren Ausdruck darin, daß die Übungen nicht wahlfrei, sondern für alle Schüler verbindlich eingeführt werden. Freilich wird dieser Gewinn sofort wieder illusorisch, wenn man das für die Übungen angesetzte Ausmaß an Zeit betrachtet. Physik, Chemie und Biologie erhalten in den drei Oberklassen je in einem Winterhalbjahr zwei Wochenstunden an Stelle der beiden Stunden für Bewegungsspiele im Sommer eingeräumt. Gegen diese ganz unzureichende Lösung des Problems hat denn auch in Fachkreisen energischer Widerstand eingesetzt. Die Biologie macht geltend,

daß sie im Winter brauchbares Material für die Übungen kam beschaffen kann. Gefordert wird von allen Seiten die Möglichkeit wahlfreien Übungsunterrichts, die gegenwärtig völlig ausgeschlossen ist. Ist doch eine große Anzahl von Schulen grundsätzlich auf den wahlfreien Übungsbetrieb eingestellt und wird doch bei der neuen Regelung eine Fülle wertvollster Apparate völlig ungenutzt bleiben müssen. Gerade im wahlfreien Unterricht erhalten die für das betreffende Gebiet Interessierten tiefgehende Förderung, während in den obligatorischen Übungen die Zahl der Uninteressierten einen immerhin beträchtlichen Ballast darstellt, wobei natürlich zugegeben werden mag, daß es verdienstlich und wertvoll ist, auch denen einen Einblick in naturwissenschaftliche Arbeitsmethoden zu geben, die sich später nicht mehr mit diesem Gebiete beschäftigen werden.

Zum Schluß möge nun noch ein Überblick über die Stundentafeln gegeben werden, wobei von einer eingehenden Kritik abgesehen werden soll.

		VI	V	IV	UIII	OIII	UII	OII	UI	OI	Summe
Gymnasium	Math.	4	4	4	3	3	3	3 a) 2 b) 5	3 a) 3 b) 4	3 a) 2 b) 4	30 a) 28 b) 34
	Phys.						2	2	2	2	8
Reform-gymnasium	Math.	4	5	5	4	4	3	3	3	3	34
	Phys.					2	2	2	1	1	8
Realgymnasium	Math.	4	4	4	5	4	4	4 a) 4 b) 5	3 a) 3 b) 5	3 a) 3 b) 4	35 a) 35 b) 39
	Phys.					2	2	2	3	2	11
Reformreal-gymnasium	Math.	4	5	5	4	4	4	4 a) 4 b) 5	3 a) 3 b) 5	3 a) 3 b) 4	36 a) 36 b) 40
	Phys.					2	2	2	3	2	11
Oberrealschule	Math.	4	5	5	5	5	4	5 a) 4 b) 4 c) 5	5 a) 4 b) 4 c) 5	4 a) 4 b) 4 c) 5	42 a) 40 b) 40 c) 43
	Phys.					3	3	3	3	2	14
Deutsche Oberschule	Math.	4	5	5	4	4	4	4 a) 3 b) 5	4 a) 3 b) 5	3 a) 3 b) 4	37 a) 35 b) 40
	Phys.							3	3	3	9
Reform-Oberrealschule für Mädchen	Math.	4	4	4	4	4	3	5 a) 4 b) 4 c) 5	5 a) 3 b) 3 c) 5	5 a) 3 b) 3 c) 5	38 a) 33 b) 33 c) 38
	Phys.				1	2	2	3 a) 2 b) 2 c) 3	3 a) 2 b) 2 c) 3	2 a) 2 b) 2 c) 2	13 a) 11 b) 11 c) 13

In der Oberrealschule und der Reform-Oberrealschule bedeutet: a) Lateingabel, b) neusprachliche Gabel, c) mathematisch-naturwissenschaftliche Gabel.

In den übrigen Schulen bedeutet: a) sprachlich-historische Abteilung, b) mathematisch-naturwissenschaftliche Abteilung.

Der Kampf gegen diese Tafeln hat natürlich, wie das immer der Fall zu sein pflegt, von allen Seiten eingesetzt. Bemerkt sei, daß eine allgemeine, wenn auch sehr mäßige Herabsetzung der Stundenzahlen vorgenommen worden ist, daß aber überdies in OI mit zwei Wochenstunden in der philosophischen Pro-

pädeutik ein ganz neues, viel umstrittenes Unterrichtsfach eingeführt worden ist, dessen Stundenanspruch natürlich von den Fächern mit der relativ größten Stundenzahl, also den charakteristischen Fächern getragen werden soll. So erklärt es sich, daß sich die O I des Realgymnasiums in der mathematischen Abteilung mit 4 Wochenstunden in Mathematik, die bei Kursunterricht gar auf 3 vermindert werden, begnügen soll und daß sich die OI der Oberrealschule in Physik mit 2 Wochenstunden abfinden soll. Der Mathematische Reichsverband hat in einem Gutachten an das Sächsische Ministerium für Volksbildung vor allem bemerkt, daß dort, wo die Mathematik wesentlich als dreistündiges Fach auftritt, eine für das Studium an einer technischen Hochschule ausreichende mathematische Vorbildung, so wie sie die Denkschrift selber fordert, keinesfalls erteilt werden kann, und daß ein zweistündiger Unterricht überhaupt wertlos ist. Die Fachorganisationen Sachsens stehen wesentlich auf demselben Standpunkte. Auch die Herabsetzung des Mathematikunterrichts in Quinta und Quarta des Realgymnasiums und in UII des Realgymnasiums und vor allem der Oberrealschule auf 4 Wochenstunden ist sehr bedauerlich. Möchten die Bemühungen der Fachkreise, diese Härten zu beseitigen, bei einer Überprüfung der Stundentafeln berücksichtigt werden.

Dresden. E. Günther.

Methodik.

Entscheidung von Problemen der Methodik des Rechenunterrichts durch Massenversuche. Wie bei der Beurteilung der Leistungen so fehlt es auch bei der Beurteilung der Methoden noch fast ganz an objektiven Maßstäben. Zumeist wird „aus der Tiefe des Gemütes" heraus geurteilt; Einzelerfahrungen, die selbst nicht einmal objektiver Kritik immer stand zu halten geeignet sind, werden verallgemeinert zu allgemeinen Gesetzen. Ich habe schon bei einer Untersuchung der Leistungsbeurteilung[1]) auf besonders zahlreiche und zum Teil überraschende Massenversuche hinweisen können, die in den Vereinigten Staaten in den letzten Jahren angestellt worden sind. Ich möchte nun im folgenden über einen weiteren sehr lehrreichen Versuch berichten, der sich schließlich den Vergleich dreier verschiedener Methoden im Rechenunterricht zum Ziel gesetzt hat. Da die Leistung des Schülers wesentlich auch durch die beim Unterricht angewandte Methode bedingt ist, gibt dieser Bericht zugleich eine Ergänzung zu meiner kleinen Broschüre.

Die Versuche wurden mit allergrößter Sorgfalt — Einzelheiten in dieser Hinsicht anzugeben, muß ich mir im allgemeinen versagen, begnüge mich vielmehr mit einem Hinweis auf eine Quelle, meinen Aufsatz von C. W. Washburne und R. Osborne[2]) — in Nordillinois während zweier Jahre angestellt; als Versuchspersonen waren Schüler einer großen Zahl von Schulen herangezogen worden.

1) Vgl. W. Lietzmann, Über die Beurteilung der Leistungen in der Schule (Mathematisches, Psychologisches, Pädagogisches). Leipzig 1927, Teubner.

2) C. W. Washburne and R. Osborne, Solving Arithmetic Problems, The Elementary School Journal, Vol. XXVII (1926) S. 219 ff. und 296 ff. — Neuerdings ist ein weiterer Artikel erschienen, den ich nur erwähnen kann: C. W. Waschburne, Comparison of two methods of teaching pupils to apply the mechanics of arithmetic to the solution of problems. Ebenda XXVII (1927) S. 758 ff.

I. Man warf zunächst im ersten Jahre folgende Fragen auf, die sich alle auf leichte, eingekleidete Rechenaufgaben, sogenanntes problems, beziehen:

1. Ist Unfähigkeit, sich die Sachlage, um die es sich in der Aufgabe handelt, (etwa visuell) vorzustellen, eine wesentliche Ursache für das Versagen bei der Lösung der Aufgabe? Die Versuche beantworten die Frage mit nein.

2. Viele Lehrer legen großen Wert darauf, vor Beginn der Lösung einer Aufgabe sie zu analysieren, also z. B. feststellen zu lassen, was gegeben ist, was gesucht ist, was von den Angaben überflüssig für die Lösung ist, was für Rechenoperationen anzuwenden sind, was ungefähr herauskommen wird usf. und erst dann, nach einer solchen formalen Analyse, zur Lösung zu schreiten. Besteht, so war die Frage, irgendwelche Beziehung zwischen der Fähigkeit, die Aufgaben zu lösen, und der Fähigkeit, eine derartige formale Analysis anzustellen. Das Ergebnis war überraschender Weise, daß eine solche Beziehung nicht besteht. — Und doch würde jeder Lehrer wohl „nach dem Gefühl" anders geantwortet haben. Da man den Dingen auf den Grund gehen wollte, wurde die weitere sorgfältige Untersuchung dieser Frage auf das nächste Jahr verschoben.

3. In welchem Ausmaß ist mangelnde Vertrautheit mit der in der Aufgabe gegebenen Sachlage oder mit dem behandelten Stoff Ursache eines Versagens bei der Lösung der Aufgabe?

Die Ergebnisse besagen, daß ein Einfluß unverkennbar, daß er aber nicht allzu groß ist. So wurden von den vorgelegten Aufgaben aus vertrauten Sachgebieten in der einen Schule 74 %, in der anderen 87 % gelöst, hingegen von den Aufgaben mit weniger vertrauten Sachgebieten in der ersten Schule 60 %, in der zweiten 75 %; der Unterschied betrug also 14 % und 12 %.

4. Haben Schüler, die richtig mit den Zahlen die in Frage kommenden Operationen ausführen und die eingekleideten Aufgaben mit *einfachen* Zahlen im Kopfe lösen können, Schwierigkeiten bei der Lösung ähnlicher Aufgaben, die Feder und Papier erforderlich machen? Die Testergebnisse bejahen diese Frage unbedingt. Wie zu erwarten, sind die Schwierigkeiten besonders groß in den unteren Klassen, wenn die anzuwendenden Rechenoperationen eben erst behandelt sind; sie verschwinden in den höheren Klassen mehr und mehr, wenn die Operationen mechanisiert sind.

II. Sehr lehrreich sind nun die Untersuchungen, die im Anschluß an das unerwartete Ergebnis von 2 im folgenden Jahre unternommen wurden. Man wollte geradezu drei verschiedene Unterrichtsmethoden auf ihren Erfolg miteinander vergleichen:

Die erste Methode, ich will sie Drillmethode nennen — bitte aber nicht an den üblen Beigeschmack zu denken, den das Wort Drill hat —, geht so vor, daß möglichst viele Aufgaben wirklich gelöst werden, ohne daß man sich lange bei Erklärungen, Analysen u. dgl. aufhält.

Die zweite, die Analysenmethode, legt demgegenüber nicht so viel Wert auf die Anzahl der gelösten Aufgaben, als vielmehr auf eine gründliche Anleitung, sich den Sinn der Frage, die Mittel und Wege zur Lösung u. dgl. klar zu machen, kurz, die Aufgaben genau zu analysieren, und geht erst dann an die Aufgabenlösung selbst heran.

Die dritte, Analogiemethode, schließlich erinnert erst an einfache, mündlich lösbare Aufgaben gleicher Art und geht von da aus zur Lösung der schwierigeren, schriftlich zu lösenden Aufgabe über.

Bei der Durchführung der Versuche waren natürlich wieder Vorsichtsmaßnahmen der verschiedensten Art zu treffen, um „die Waffen gleichzumachen". Es wurde jemals eine Klasse in zwei gleichfähige Abteilungen — dabei mußten Lehrerurteil, allgemeine Intelligenztests usf. entscheiden — gespalten und der gleiche Stoff nun unter genau formulierten gleichen Bedingungen nach zwei verschiedenen Methoden behandelt. Das Ergebnis eines sechswöchentlichen Unterrichts wurde durch bestimmte Testserien bei Beginn und am Schluß der Lehrperiode festgestellt.

Die Schüler machten bei allen Methoden bemerkenswerte Fortschritte. Sie waren am größten bei der Drillmethode. Es hat sich herausgestellt, daß wirksamer als die Erziehung zu einer formalen oder technischen Analysis das Verfahren ist, den Schülern viele Aufgaben zu geben und jedem Schüler bei den besonderen Schwierigkeiten, auf die er im einzelnen trifft, Hilfen zu geben.

Das Ergebnis spricht genau so gegen die „formale Bildung", wie es Untersuchungen des „Transfer"-Problems tun, d. h. der Frage, inwieweit auf einem Gebiet erworbene Fähigkeiten automatisch die Erhöhung der Fähigkeiten in mehr oder weniger verwandten Gebieten zur Folge haben. Es scheint auch gegen „Klassen"unterricht, für „Einzel"unterricht zu sprechen.

Selbstverständlich darf man diesen Versuch nicht ohne weiteres verallgemeinern, muß sich vielmehr durchaus über die Begrenzungen im Klaren sein. Die Verfasser äußern sich auch in dieser Hinsicht sehr vorsichtig. Ich möchte hier nur sagen, daß die — in unserer Ausdrucksweise etwa auf die Unterstufe der höheren Schulen erstreckten — Untersuchungen keine bündigen Schlüsse zulassen über das gleiche Problem im Anfangsunterricht und ebensowenig über entsprechende verschiedenartige Methoden im abstrakteren arithmetischen und geometrischen Unterricht. Außerdem muß man im Rechenunterricht neben die technisch fehlerfreie Lösung von Aufgaben — auf die allein die vorstehenden Unterrichtungen gerichtet zu sein scheinen — die Einsicht in die Richtigkeit des Verfahrens als gleichwichtiges Ziel stellen. Immerhin ist es lehrreich, wie man hier den Versuch gemacht hat, über den Erfolg verschiedenen Unterrichtsmethoden durch einen psychologischen Massenversuch zu entscheiden.

Göttingen. W. Lietzmann.

Versammlungen und Kurse.

Tagung des deutschen Realschulmännervereins. Die diesjährige Hauptversammlung des *Deutschen Realschulmännervereins* fand am 28. und 29. Mai in Eisenach statt. Den Hauptteil der Verhandlungen bildete die Besprechung der vom Vorstand aufgestellten Leitsätze für die Arbeit des Vereins in den nächsten Jahren. An die Spitze seiner Thesen stellt der Verein die Forderung nach einer Vereinheitlichung und Vereinfachung des höheren Schulwesens durch eine allgemeine deutsche Schulreform. Dabei schwebt ihm als höhere Schule der Zukunft offenbar die elastische Einheitsschule vor, etwa in der Form, wie sie von Felix Behrend u. a. vertreten wird. Der Verein empfiehlt daher für alle Orte mit nur einer höheren Lehranstalt eine Schule mit einer modernen Fremdsprache auf der Unterstufe (Ref.-Realg. oder Oberrealsch.), wie dies z. B. in Thüringen schon seit 1922 grundsätzlich durchgeführt ist, und fordert für die Oberklassen Gabelung und Wahlfreiheit — etwa nach dem Vorbild Sachsens. Die willkürliche Umgestaltung der preußischen realgym-

nasialen Anstalten in einseitig „neusprachliche“, der Oberrealschulen in einseitig „mathematisch-naturwissenschaftliche“ Anstalten wird vom Realschulmännerverein abgelehnt. Er stellt sich also auch ausdrücklich auf den Standpunkt, den bereits die „Meraner Lehrpläne“ von 1905 („die Kommission wünscht, daß auf allen höheren Lehranstalten weder eine einseitig sprachlich-geschichtliche, noch eine mathematisch-naturwissenschaftliche Bildung gegeben werde“) und der „Förderungsverein“ auf seiner Heidelberger Tagung im Jahre 1924 eingenommen haben.

Mit größter Entschiedenheit und in völliger Einmütigkeit wurde die Beseitigung aller Hemmungen verlangt, die in Preußen dem Reformrealgymnasium des Frankfurter Systems auferlegt sind. Welches der beiden Reformrealgymnasien (Latein von U III oder von U II an) sich durchsetzt, soll der freien Entwicklung überlassen bleiben.

Von den Einzelforderungen zur Neuordnung des höheren Schulwesens in Preußen verdienen einige vom Standpunkt der mathematisch-naturwissenschaftlichen Fächer aus besondere Beachtung. Der Realschulmännerverein verlangt ebenso wie der Förderungsverein, daß die *Kontinuität* in den einzelnen naturwissenschaftlichen Fächern wiederhergestellt wird. Am *Realgymnasium* und am *Reform-Realgymnasium* sollen die Naturwissenschaften auf der Oberstufe verstärkt werden. Zugleich soll an diesen Anstalten — namentlich zur Beseitigung der qualitativen Überbürdung — eine neuere Fremdsprache auf der Oberstufe in der Stundenzahl beschränkt oder wahlfrei gemacht werden. Die so gewonnenen Stunden sind allerdings nicht nur für die Naturwissenschaften, sondern auch für eine Verstärkung des Latein vorgesehen. Für die *Oberrealschule* wurde eine Vermehrung der neusprachlichen Stunden um je eine Stunde in den Klassen U II bis O I gefordert. In der Aussprache über diesen Punkt wurde von verschiedenen Seiten — u. a. auch von dem anwesenden Vertreter des DAMNU — die Frage aufgeworfen, welchem Fache diese Stunde entzogen werden solle, und mit aller Entschiedenheit festgestellt, daß Mathematik und Naturwissenschaften hierfür keinesfalls in Betracht kommen können, wenn sie die ihnen innewohnenden Bildungswerte nach arbeitsunterrichtlichen Methoden voll zur Geltung bringen sollen.

Am Sonntagvormittag sprachen Oberstudiendirektor Dr. Gelfert (Zwickau) über „Das Ringen um die Einheit der deutschen Bildung“ und Oberstudiendirektor Dr. Felix Behrend (Berlin) über „Das Berechtigungswesen und die höhere Schule“. Rettung der durch die starre Typenbildung der preußischen Schulreform schwer bedrohten deutschen Bildungseinheit! — das war der Grundton der Ausführungen von Dr. Gelfert. Dr. Behrend zeigte, wie durch das Überangebot von Arbeitskräften in allen Berufen die Anforderungen an die Schulbildung der Anwärter dauernd heraufgesetzt werden. Trotzdem ist es falsch, von einer in den letzten Jahren eingetretenen „Inflation“ im höheren Schulwesen zu sprechen: Eine umfassende Statistik des deutschen Philologen-Verbandes hat gezeigt, daß seit 30 Jahren sowohl die jährliche Gesamtzunahme der Schüler an den höheren Schulen Preußens, wie die Verteilung der Schüler auf die einzelnen Schulstufen nahezu konstant geblieben ist.

Vacha (Rhön). A. KRAFT.



Bücherbesprechungen.

Die Preise der besprochenen Bücher sind nach den Mitteilungen der Verlagsanstalten im Erscheinungsmonat angegeben. Da die Buchhandlungen sich Änderungen vorbehalten, kann keine Sicherheit dafür geboten werden, daß die angegebenen Preise auch heute noch gelten.

Bertrand Russell, Unser Wissen von der Außenwelt. Übersetzt von Walther Rothstock. VIII u. 331 S. Leipzig 1926.

Das Werk des englischen Mathematikers und Philosophen, das 1914 in englischer Sprache unter dem Titel „Our knowledge of the external world" erschien, sucht mit den Hilfsmitteln der modernen Logik die klassischen Probleme der Philosophie zu bewältigen, vor allem das Problem des Verhältnisses der Sinnesgegebenheiten zu dem Raum, der Zeit und der Materie der mathematischen Physik. Die Bedeutung, die der Verf. den neuen logischen Methoden beilegt, kommt gleich in den einleitenden Abschnitten über die gegenwärtigen (1914) Tendenzen der Philosophie zum Ausdruck. Es wird unterschieden zwischen der klassischen Tradition (Kant, Hegel), deren Keimzelle der naive Glaube der griechischen Philosophen an die Allmacht des Denkens sei — dem Evolutionismus (Darwin, Spencer, James, Bergson) und dem „logischen Atomismus", einer Methode, die in Anlehnung an die Untersuchungen der Mathematiker langsam entstanden ist. Die Wichtigkeit, die diese Methode nach der Auffassung des Verfassers hat, erkennt man daraus, daß nach seiner Ansicht jedes philosophische Problem entweder überhaupt nicht wahrhaft philosophischer oder logischer Natur ist. Die Wirksamkeit der modernen Logik ist aber nach Russell gerade entgegengesetzt derjenigen der Logik, die in den klassischen Schulen gepflegt wurde. Denn die alte Logik erblickte ihre Aufgabe darin, Hypothesen, die zunächst als möglich erschienen, als unmöglich nachzuweisen und im voraus festzusetzen, die Wirklichkeit müsse einen ganz bestimmten Charakter haben. Die neue Logik läßt im Gegenteil die vorhandenen Hypothesen in der Regel bestehen, ja bereichert unseren Bestand an logischen Formen durch Aufstellung neuer Hypothesen. Die alte Logik schlug den Geist in Fesseln, die neue verleiht ihr Flügel.

Von zentraler Bedeutung für die Ausführungen des Werkes ist der Begriff der Transitivität und das Prinzip der Abstraktion: Eine Beziehung wird transitiv genannt, wenn sie in allen Fällen, wo sie zwischen A und B und zwischen B und C besteht, auch zwischen A und C Geltung hat. In diesem Sinne sind „vorher", „nachher", „größer als" transitiv. Nicht transitiv ist z. B. der Begriff der „Verschiedenheit" oder der „Blutsverwandtschaft".

Überall nun, wo wir eine transitive, symmetrische Relation haben, lassen sich Klassen von Elementen definieren, so daß je zwei Elemente einer Klasse in dieser Relation stehen, und daß jede Klasse auch alle Elemente enthält, die zu einem ihrer Elemente in dieser Beziehung stehen. Man wird dann den Elementen einer solchen Klasse eine gemeinsame Eigenschaft zuschreiben. Aber schon die Klasse selbst erfüllt alle formalen Forderungen, die an die gemeinsame Eigenschaft der Elemente zu stellen ist. Daher können wir an Stelle der Eigenschaft die Klasse betrachten. Das ist das sogenannte Prinzip der Abstraktion, das man auch als das Prinzip bezeichnen könnte, „das die Abstraktion unnötig macht", und das daher, wie der Verfasser meint, mit einer unglaublichen Menge metaphysischen Plunders aufräumt.

Dieses Prinzip wird nun auf das Problem von der Existenz der Außenwelt angewandt. Russell geht aus von den Ansichten, die erkennende Wesen von der Welt haben, von sogenannten „Privatwelten". Neben diesen wirklichen Privatwelten werden noch mögliche Ansichten der Welt betrachtet; mögliche oder wirkliche zusammen heißen Perspektiven. Außer den einzelnen Räumen, die den einzelnen Perspektiven entsprechen, gibt es noch einen einzigen interperspektiven Raum, dessen Elemente eben die einzelnen Perspektiven sind. „Das Ding" ist nichts weiter als ein Inbegriff von Erscheinungsformen; alle Ansichten eines Dinges sind wirklich, das Ding selbst ist bloß logische Konstruktion.

Außerdem enthält das Werk noch Betrachtungen über die Kontinuitätstheorie und das Unendlichkeitsproblem. Auch hier wird wieder von dem Prinzip der Abstraktion Gebrauch gemacht. Russell geht von der Fregeschen Definition aus:

Die Zahl der Glieder einer Klasse ist die Klasse aller Klassen, die der gegebenen Klasse gleich sind. Diese Definition läßt sich auch auf unendliche Mengen anwenden. Indem es so der Logik gelingt, die Schwierigkeiten, die mit dem Begriff des Unendlichen verknüpft sind, zu überwinden, bestätigt sich, was eingangs gesagt wurde, daß sie nicht die Zahl der möglichen Hypothesen einschränkt, sondern vergrößert. Den Schluß des Buches bilden Ausführungen über den Ursachbegriff.

Göttingen. P. Hertz.

H. Fenkner und **H. Wagner, Lehr- und Übungsbuch der Mathematik für Oberlyzeen und Studienanstalten.** Sonderdruck: Differenzial- und Integralrechnung. Berlin 1926, Otto Salle. *RM* 3.60.

Als Ergänzung des I. Bandes „Arithmetik und Algebra" ist das vorliegende Buch als Sonderdruck erschienen. Das bedingt gewisse Nachteile, die möglichst zu vermeiden versucht sind, aber nicht völlig ausgeglichen werden können. Die Infinitesimalrechnung muß naturgemäß hier als ein besonderes Gebiet erscheinen, während ihre Einordnung in den allgemeinen Lehrstoff der Funktionsuntersuchungen das erstrebenswerte Ziel ist, also mehr Mittel zum Zweck und weniger Selbstzweck. Viele Funktionsbetrachtungen sind dem Buche eingefügt. Sie sind aber nicht der bindende Faden, sondern mehr gelegentliche Anwendungen.

Die didaktische Ausgestaltung der Infinitesimalrechnung ist noch längst nicht abgeschlossen. Auch dieses Buch legt Beweis ab von dem Ringen um die Lösung dieses Problems. Wenn meine Auffassungen sich daher nicht mit denen des Verfassers decken, so soll das in keiner Weise irgendeine Beeinträchtigung des Buches bedeuten. Der erfreuliche und dankenswerte Vorsatz der Herausgeber dieser didaktischen Zeitschrift, eingehendere Besprechungen mathematischer Lehrbücher zu bringen, kann ja nur dann zum vollen Erfolge führen, wenn auch entgegengesetzte Ansichten vertreten und genügend belegt werden.

Von kleineren Beanstandungen sehe ich ab, z. B. wenn (S. 2) $y = x^a$ als ganze rationale Funktion bezeichnet wird ohne genaue Angabe der Konstanten a, wenn in der Summenformel für unendliche Reihen (S. 68)

$$s = \frac{1}{1-q}$$

$q < 1$ gesetzt wird, wenn von einem dem Funktionswert $f(a)$ „unmittelbar vorhergehenden" Funktionswerte gesprochen wird (S. 27) usw. Vermieden werden sollten Inkorrektheiten wie z. B. solche (S. 2), daß eine Funktion transzendent genannt wird, „wenn die Anzahl der Glieder unendlich groß ist". Gegenbeispiel

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

Nach einer Einteilung der Funktionen folgt der Begriff der Differentiation. Was stellt sich nun aber der Schüler unter „einer unendlich kleinen Größe" vor? S. 5 wird mit dieser Größe so operiert, als ob sie noch eine endliche Größe ist, denn es wird von einem Intervall gesprochen, ohne dessen Vorhandensein ja auch die Stetigkeitsdefinition bedeutungslos ist. Es könnte so scheinen, als ob es nur eine andere Ausdrucksweise ist, wenn ich diesem Begriff der „unendlich kleinen Größe" die „beliebig kleine Größe" gegenüberstelle, d. h. eine Größe, die kleiner ist als ein beliebig vorgegebenes $\delta > 0$. Und doch liegt hierin der wesentlichste Unterschied, wie sich noch ergeben wird. Der Verfasser unterscheidet nun nämlich zwischen dem „wirklichen Nichts, der absoluten Null" (S. 6) und einem neuen Begriff (S. 6): „Setzt man das Verfahren (der sukzessiven Halbierung einer Strecke) unendlich oft fort, so bleibt immer noch eine unendlich kleine Strecke übrig. Alle diese unendlich kleinen Strecken sind verglichen mit einer endlichen Strecke, ein Nichts, relative Nullen". Also wir haben zu unterscheiden zwischen einem „wirklichen Nichts" und einem „Nichts". Ich muß gestehen, daß mir hier meine Vorstellung jetzt genau noch so versagt, wie sie früher versagt hat, als ich als Schüler mit meinem Mathematiklehrer über denselben Punkt niemals zu einer

Einigung gekommen bin. Für mich war und ist dieses „Nichts" immer noch ein „Etwas", eine endliche Größe.

Von diesem „Nichts" werden, nachdem gezeigt ist, daß die Division der absoluten Nullen sinnlos ist, folgende Rechenangaben gemacht: Die Division der relativen Nullen kann eine endliche Zahl sein (S. 7), ferner (S. 9) die Vermehrung oder die Verminderung einer endlichen Größe um eine unendlich kleine Größe hat keinen Einfluß. Das Beispiel lautet (S. 9)

$$B = \frac{4 + dx}{7 + dx} \quad \text{also} \quad B = \frac{4}{7}.$$

Es steht natürlich vollkommen frei, neue Größen nach Belieben zu definieren, auch wenn man sich zunächst darunter kaum etwas vorstellen kann. Die Einführung solcher Größen darf aber niemals zu Sinnwidrigkeiten führen. Ich führe nun folgende kleine Rechnung aus:

Nach der Angabe S. 9 ist, wenn δ ein solches „Nichts" ist,

$$a = a - \delta, \quad \text{wo} \quad a \neq 0.$$

Besondere Einschränkungen über Rechenregeln sind nicht gegeben. Im Verlauf des Buches wird auch mit dem δ oder „Zuwachs dx" stets wie mit endlichen Größen operiert. Ich darf also potenzieren.

$$a^2 = (a - \delta)^2 = a^2 - 2a\delta + \delta^2$$

$$2a\delta = \delta^2.$$

Ich dividiere durch δ. S. 7 sagt Verfasser vom Verhältnis: es „kann" endlich sein. Hier ist es endlich, also

$$2a = \delta.$$

Das „Nichts" ist doch ein „Etwas", sogar jede beliebige Zahl. Solange also für diese relativen Nullen nicht völlig einwandfreie Rechengesetze definiert sind, die Sinnwidrigkeiten ausschließen, ist ihre Definition falsch. Ob die Sache durch solche Axiomatisierung leichter und vor allem auch anschaulicher wird, verneine ich. Ob alle Schwierigkeiten einer genauen Grundlagenschaffung überwunden werden können, bezweifle ich. Dabei läßt sich der Kern doch ganz einfach aus den Sätzen, die der Verfasser gibt, herausarbeiten.

Es handelt sich im wesentlichen um drei Begriffe.

1. Begriff der Definition einer Funktion in einem Punkte.

(1) $y = x$ ist definiert im Punkte $x = 0$.

(2) $y = \frac{x^2}{x}$ ist **nicht** definiert im Punkte $x = 0$, da dann hier die sinnlose Form $\frac{0}{0}$ vorliegt.

2. Begriff der Stetigkeit, wie ihn der Verfasser in § 2 (S. 4) etwa gibt.
3. Begriff des Grenzwertes.

Hierauf muß näher eingegangen werden, denn das ist der wesentliche Unterschied der beiden Auffassungen. Eine Zahlenfolge $a_1, a_2, a_3, \ldots$ sei vorgelegt. Dann kann es einen Wert a geben, der **nicht** der Zahlenfolge anzugehören braucht, mit folgender Eigenschaft: Ist ein beliebig kleines $\delta > 0$ gegeben, so kann von einem gewissen n ab, wo dieses n von δ also abhängig ist, für alle $m \geq n$ sein

$$|a_m - a| < \delta.$$

Dann **sagt** man, a ist der Grenzwert der Zahlenfolge, oder a_n strebt gegen a, oder a_n nähert sich beliebig dem a, oder a_n „strebt mit unendlichem n" gegen a, oder in jeder Umgebung von a liegen fast alle Punkte der Zahlenfolge (**Kowalewski**). Diese Definition wird ausgedrückt durch die Schreibweise

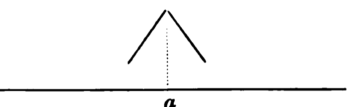
$$\lim_{n=\infty} a_n = a.$$

Der Verfasser benutzt auch gelegentlich diese Form, ihre Bedeutung ist aber verschieden von dieser hier angegeben. Es folgt unmittelbar, daß eine Zahlenfolge nur einen Grenzwert haben kann.

Was bedeutet ein solcher Grenzwert für unsere Funktion $y = \frac{x^2}{x}$? Es handelt sich hier nicht um den „wahren Wert $\frac{0}{0}$“ (S. 114), sondern um einen Grenzwert, dem eine Funktion zustrebt (Verfasser spricht auch anfänglich S. 113 vom Grenzwert), wenn Zähler und Nenner 0 **werden**. Die Funktion (2) hat einen Grenzwert für $x = 0$, nämlich $y = 0$. Es hindert mich nichts, die Funktion $y = \frac{x^2}{x}$ für $x = 0$ zu $y = 0$ zu definieren. Diese Definition ist zweckmäßig, denn die Funktion (2) ist stetig im Punkte $x = 0$ und nunmehr identisch mit der Funktion (1). Damit darf ich in der Funktion (2) auch $x = 0$ einsetzen, da die Funktion jetzt für $x = 0$ definiert ist. In diesem Sinne spreche ich von der Funktion für einen Punkt $x = a$, wenn der Zähler und Nenner je gleich Null werden. Gemeint ist damit der Grenzwert.

Mit diesen Ausführungen ist aber jede Lücke geschlossen. An keiner Stelle braucht mehr mit dem „Nichts“ dx des Lehrbuchverfassers operiert zu werden, das je nach passender Willkür gleich dem absoluten Nichts gesetzt wird. Ich hebe ausdrücklich hervor, daß der Unterricht den Begriff „Zahlenfolge“ an einfachsten Beispielen klar macht, die Tatsachen entwickeln, ohne diese hier der Deutlichkeit wegen gebrachte Formulierung des δ benutzen soll.

Ich möchte an dieser Stelle auch vor dem Ausdruck „Zuwachs“ der Veränderlichen warnen. Im Schüler wird damit die Vorstellung des lediglich positiven Wertes Δx hervorgerufen, was auch in vielen Lehrbüchern — wie im vorliegenden — zum Ausdruck kommt. Ich halte das Wort „beliebig kleine Abszissenänderung“ für vorteilhafter. Die Folge solcher falschen Vorstellungen ist die, daß nach den Lehrbüchern folgende Funktion im Punkte a einen Differentialquotienten, d. h. eine Tangente, haben müßte:



Man könnte hier den Einwand der übertriebenen, für den Schulunterricht schädlichen Strenge erheben. Ich stehe nicht auf diesem Standpunkt. Die Schüler sollen zur scharfen Logik und folgerichtigem genauen Denken erzogen werden. Dann müssen solche Einwände von Seiten der Schüler ganz von selbst kommen. Es genügt der Hinweis hierauf mit dem Zusatz, daß solche Funktionen in der Schule nicht weiter behandelt werden können. Übergangen werden dürfen aber nach meiner Ansicht solche Punkte nicht, das hieße ja geradezu, die schönsten Ergebnisse der selbständigen mathematischen Erkenntnis verscherzen. Ein anderer Einwand würde sein, daß man doch im Anfang nicht mit dem ganzen schweren Geschütz der mathematischen Strenge beginnen könne. Das ist auch meine Ansicht. ein Ziel gehört an das Ende, nicht an den Anfang. Man beginne ruhig mit unstrengen Begriffen und stoße, wenn Ergebnisse dazu zwingen, das bisherige Gebäude um und beginne einen neuen Aufbau. Das ist sogar geboten im Sinne des Arbeitsunterrichtes. Dieser Unterrichtsweise kann aber ein Lehrbuch nicht folgen. Wohl braucht ein Lehrbuch nicht von Anfang an bis zum äußersten alle strengen Folgerungen zu ziehen. Das kann später nachgeholt werden. Aber die Grundlagen, der Aufbau müssen unantastbar sein. Ein Lehrbuch ist eben nicht der Niederschlag einer Unterrichtsstunde. Sein Inhalt ist das bleibende Gut, das schließlich der Unterricht entwickelt. Sonst brauchten wir ja gar keinen lebendigen Unterricht, es genügte ja, einfach den Schülern gedruckte Unterrichtsbriefe zum Selbststudium in die Hand zu geben.

Der Lehrbuchverfasser spricht beim Differentialquotienten von dem „charakteristischen Dreieck“, das unendlich klein ist. Die Katheten sind relative Nullen. Er kommt hierzu vom Differenzenquotienten, indem er zum Limes übergeht. Der Limes $x_1 = x_2$ in $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ bedeutet bei ihm aber den Übergang zur „relativen Null“.

Wenn Verfasser nun aber sagt, „der Differentialquotient ist kein Differentialquotient im gewöhnlichen Sinne", so sind mir diese Ausführungen unverständlich. Vorher hat er angeführt, daß man mit dx wie mit gewöhnlichen Zahlen operieren darf, er tut es auch später oft genug noch, jetzt heißt es, daß dieser Quotient eigentlich kein Quotient (im gewöhnlichen Sinne) ist, sondern der Grenzwert eines Differenzenquotienten. Gemäß meiner oben skizzierten Entwicklung wird im Differenzenquotienten

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

die (negative und positive) Abszissenänderung Δx wirklich gleich Null (absolut). Man kommt damit wirklich zur Tangente, das charakteristische Dreieck ist wirklich Null, nicht nur „unendlich klein", worunter ich mir mit dem besten Willen nichts vorstellen kann. Der Ausdruck $\frac{dy}{dx}$ wird zu einem Symbol für den Grenzübergang und ist überhaupt kein Quotient mehr.

Ich möchte nun noch auf einige Punkte hinweisen. Die Ableitung von $f(g(x)) = f(z)$ wird in der üblichen Form gegeben. Die relative Null dz kann aber sehr wohl die absolute Null sein. Dann ist die Ableitung falsch. (Vgl. meine Abhandlung „Typische Fehler in der mathematischen Lehrbuchliteratur", erschien in dieser Zeitschrift.)

Eine recht klare Entwicklung wird über die Extremalwerte und Wendepunkte gegeben, erwünscht wäre allerdings ein scharfer Hinweis auf die hinreichenden und notwendigen Bedingungen und daß unter Umständen höhere Ableitungen erforderlich sind. Bei den Kurven 3. Grades fehlt der Fall, daß eine kubische Gleichung mit reellen Koeffizienten auch eine dreifache reelle Nullstelle haben kann.

Bei den unendlichen Reihen ist mir die Bemerkung unklar, daß die unendliche Potenzreihe ein „(angenäherter) Ersatz für die unentwickelte Funktion" zu gelten haben; um so mehr, wenn zwei Seiten später die Potenzreihe zum völlig identischen Ersatz für die Hauptfunktion bezeichnet wird. Als angenäherten Ersatz verstehe ich gerade die abgebrochene, endliche Reihe.

Zu den Konvergenzsätzen habe ich folgendes anzuführen. Als erste und wichtigste Bedingung für die Konvergenzen wird bezeichnet, daß sich die Glieder „allmählich der Null nähern". Wie ist es mit der Reihe: $a + 0 + 0 + 0 + \cdots$? Es wird weiter an dieser Stelle nicht der Fall betrachtet, daß der $\lim a_n$ gar nicht vorhanden zu sein braucht.

Die anderen Reihensätze geben auch noch Anlaß zu Beanstandungen. Ich verweise auf meinen oben angeführten Aufsatz.

Ich halte es nicht für vorteilhaft, wenn immer wieder durch die Methode der Koeffizientenvergleichung die Potenzreihen für die üblichen Funktionen abgeleitet werden und die Taylorreihe erst am Schluß folgt. Die formalen Rechnungen und die umständlichen Betrachtungen für die Binomialreihe könnten doch erspart bleiben, wenn die Taylorreihe an die Spitze gestellt wird.

Das Aufgabenmaterial besonders das der Anwendungen halte ich für etwas knapp. Anwendungen auf Physik usw. sind nur bei der Differentialrechnung ausreichend vorhanden.

Göttingen. H. Willers.

H. Falkenberg, Elementare Reihenlehre. Mit 4 Fig. im Text. Sammlung Göschen Nr. 943. Berlin 1926, Walter de Gruyter & Co. *RM* 1.20.

Eine Darstellung der Reihenlehre, welche die moderne mathematische Strenge durch straffe Gliederung und übersichtliche Anordnung des Stoffes für den Leser erträglich zu machen sucht. Die Bezeichnung „elementar" ist im Weierstraßschen Sinn zu verstehen, als unabhängig von der Differential- und Integralrechnung. Das ausgezeichnete Büchlein ist für den Kenner ein Genuß, für den Anfänger aber sicher zu schwer.

Vaihingen a. F.-Stuttgart. K. Fladt.

L. Peters, Determinanten. Mit 15 Fig. im Text. Math.-phys. Bibl. Nr. 65. Leipzig 1925, B. G. Teubner. Kart. *RM* 1.20.

Eine kurze, etwas abstrakte Einführung in die Lehre von den Determinanten, die durch eingehendere Bezugnahme auf die Geometrie im Sinne von Graßmann und Klein noch gewinnen würde.

Vaihingen a. F.-Stuttgart. K. Fladt.

A. Herrmann, Das Delische Problem. Math.-phys. Bibl. Nr. 68. Leipzig 1927, B. G. Teubner. Kart. *RM* 1.20.

Ein entzückendes Bändchen, das unsern Primanern eindringlich zeigen kann, wie viel Arbeit die vollständige Lösung eines mathematischen Problems erfordern kann, und hoffentlich möglichst vielen von ihnen in die Hände gelangt.

Vaihingen a. F.-Stuttgart. K. Fladt.

R. Rothe, Höhere Mathematik. I. Teil. 2. Aufl. (Teubners Technische Leitfaden Bd. 21.) 186 S. Leipzig 1927, B. G. Teubner. Kart. *RM* 5.—.

Noch ehe die beiden geplanten weiteren Teile dieses Werkes erschienen sind, war eine neue Auflage des ersten Teiles erforderlich. Da nur sehr wenige Änderungen vorgenommen sind, kann ich mich damit begnügen, auf meine Besprechung der ersten Auflage [d. Zeitschr. **56** (1925 S. 246)] zu verweisen.

Göttingen. W. Lietzmann.

A. Fraenkel, Zehn Vorlesungen über die Grundlagen der Mengenlehre. (Wissenschaft und Hypothese XXXI.) 182 S. Leipzig 1927, B. G. Teubner. Geb. *RM* 8.—.

Das vorliegende Werk von Fraenkel verhält sich zu den üblichen, an die „naive" Elementar-Mengenlehre Cantor's anschließenden Darstellungen, als deren beste ich etwa die von Fraenkel selbst, von Hessenberg (Abh. der Friesschen Schule I) und Grelling (Math.-Phys. Bibl.) nenne, wie eine streng-axiomatische Grundlegung der Geometrie nach Art derjenigen von Hilbert zu einer elementaren Darstellung in der Art unserer Schulbücher. Es setzt also eine Vertrautheit mit der Mengenlehre selbst bereits voraus.

Der Verfasser hat um eine strengere, über Zermelo einen entscheidenden Schritt hinaus tuende Fassung der Axiomatik der Mengenlehre große Verdienste. Seine Kieler Vorlesungen von 1925 behandeln unter Berücksichtigung der großen (am Schluß zusammengestellten) neueren Literatur die Axiomatik der Mengenlehre im Rahmen der großen Grundlagenkrisis der Gegenwart, insbesondere des Widerstreites zwischen Intuitionismus und Formalismus.

Göttingen. W. Lietzmann.

F. Enriques, Zur Geschichte der Logik. (Wissenschaft und Hypothese Bd. XXVI). Deutsch von L. Bieberbach. 240 S. Leipzig 1927, B. G. Teubner. Geb. *RM* 11.—.

Es handelt sich keineswegs um eine öde Geschichte jener trockenen Aristotelischen Logik, vor der man sich noch heute in manchen Kollegs bekreuzigt. Genauer kennzeichnet der Untertitel den Inhalt: „Grundlagen und Aufbau der Wissenschaft im Urteil der mathematischen Denker". So steht also die Wissenschaftslehre und insbesondere Methode und Grundlegung der Mathematik vornehmlich zur Erörterung. Soll eine solche Darstellung nicht im Formalen stecken bleiben, dann muß sie stark von erkenntnistheoretischen Elementen durchsetzt sein, und daraus folgt, daß die metaphysische Einstellung des Verfassers eine große Rolle spielt. Da zudem die Auseinandersetzung mit der neueren und neuesten Zeit den größten Raum einnimmt, kann das Buch des aktuellen Interesses gewiß sein. Die Hinneigung zum Positivismus hat eine entschiedene Ablehnung des Idealismus ebenso wie des Konventionalis-

mus zur Folge, die freilich den Anhänger der einen oder der anderen Richtung nicht umstimmen wird.

Die Übersetzung des empfehlenswerten Buches liest sich flüssig — nur stören gelegentlich Druckfehler.

Göttingen. W. LIETZMANN.

J. H. Schogt, Beginselen der theoretische Mechanica. 198 S. Groningen 1926, P. Noordhoff. Geb. f. 3.50.

Dies Werk bringt kurz gesagt eine mathematische Behandlung der Mechanik für die Oberstufe höherer Lehranstalten. Abgesehen von der Verwendung der Vektorrechnung wird auch durchgehends von der Differential- und Integralrechnung Gebrauch gemacht. Der für die Behandlung der Mechanik überraschend große Umfang des Buches erklärt sich daraus, daß jeweils eine gründliche Einführung in die mathematischen Hilfsmittel ihrer Anwendung vorausgeschickt wird, eine Aufgabe, mit der wir gewiß in Deutschland unsere Physikstunden nicht auch noch belasten könnten. Diese Eigenart findet ihre Erklärung in der besonderen Organisation des mathematisch-physikalischen Unterrichts unseres Nachbarlandes. Außerdem sind bei allen Abschnitten entsprechende mathematische Übungsaufgaben eingeschaltet. Im einzelnen finden wir die Statik, die geradlinige Bewegung, die Kreisbewegung und den Energiebegriff behandelt.

Göttingen. H. WEINREICH.

A. Kiefer, Leitfaden für elementares technisches Rechnen. Zum Gebrauch für technische Assistentinnen, Techniker usw. Frankfurt a. M. 1925, Diesterweg.

Die Frage, ob ein Bedürfnis nach einem solchen Buche vorliegt, soll hier nicht untersucht werden. — Unter Hervorhebung der praktischen Seite werden auf etwa 4 Druckbogen die arithmetischen Grundgesetze, die Lehre von den Gleichungen, den Proportionen, den Potenzen, Wurzeln, Logarithmen usw. behandelt und recht geschickt aufgebaut. Das Kapitel über den Genauigkeitsgrad logarithmischer Rechnungen verdient Beachtung. Trifft man doch heute noch an höheren Schulen, Genauigkeitsfanatiker, die aus der fünfstelligen Tafel die sechste, und mit viel List und Tücke sogar eine siebente Stelle bei jeder Rechnung zu entnehmen verstehen! — Einige Schwächen des Büchleins: Es empfiehlt sich nicht, Fehler, selbst wenn sie noch so häufig verkommen, dem Lernenden gedruckt vor Augen zu führen. Die Regel vom Potenzieren einer Potenz ist in der vorliegenden Form falsch. Warum die fehlerhafte Kürze bei dieser Regel, während alle anderen einwandfrei formuliert sind?

Viersen. BRETTAR.

Illo Peters, Die Grundlagen der Musik. Einführung in ihre mathematisch-physikalischen und physiologisch-psychologischen Bedingungen. 156 S. Mit 32 Fig. Leipzig und Berlin 1927, B. G. Teubner. Geb. *RM* 7.60.

Das Buch ist dafür gedacht, dem ausübenden Musiker zu dienen; deshalb ist das Musikalische stärker betont, als es sonst bei der Darlegung der Grundlagen der Musik zu geschehen pflegt. Es beschränkt sich streng auf das Wesentliche und will sowohl einen orientierenden Überblick geben, „wie einer Vorbereitung auf das Studium der bez. Quellenwerke und Monographien einzelner Fragen dienen. Die in Betracht kommende Literatur ist in weitgehender Vollständigkeit verzeichnet.“ Der Inhalt ist in die vier Abschnitte: A. Grundlagen des Tonsystems, B. Erzeugung des Tones, C. Ausbreitung des Tones, D. Aufnahme und Würdigung des Tones gegliedert; dazu kommt noch ein Anhang: 1. Messungs- und Untersuchungsmethoden, 2. Biographische Notizen. — Was ich an Darstellungen physikalischen Inhaltes in dem Büchlein gelesen habe, hat mir im allgemeinen wohlgefallen. Die Entstehung des Tones einer Lippenpfeife (S. 82) wird aber, wie in vielen Büchern, auch nicht erklärt, sondern nur mit Behauptungen umschrieben; eine Einsicht in den perio-

dischen Vorgang der Luftbewegung an der Lippenschneide wird wenigstens nicht vermittelt. — Von den Tönen der Glocke hätte wohl etwas mehr gesagt werden müssen; so vermißt man eine Erwähnung und Erklärung des allbekannten „Wimmerns hoch vom Turme“; auch die Bedeutung des Schlagringes und seine bestimmende Beziehung zum geheimnisvollen — mit Resonatoren nicht nachweisbaren — Schlagton kommt zu kurz. — Die Erklärung dafür (S. 106), „daß man aus der Ferne im allgemeinen die tiefen Töne besser vernimmt als die hohen“, „. . . daß durch Interferenz mit anderen gleichzeitigen Schallerscheinungen besonders leicht die kleineren Wellen vernichtet werden“, scheint mir recht unklar und auch dem Wortlaut nach unrichtig. — Auch der nächste Satz, in welchem erklärend auf die Tatsache hingewiesen wird, daß die Schallstärke eines Orchesters nicht fortgesetzt mit der Zahl der tönenden Instrumente wächst, scheint mir nicht durchsichtig genug; die Sachlage ist doch wohl einfach die, daß, je mehr Instrumente denselben Ton geben, auch die Wahrscheinlichkeit desto größer ist, daß immer je zwei Instrumente in entgegengesetzter Phase schwingen, also gegenseitig sich in ihrer Klangwirkung schwächen bzw. aufheben. — Bemerkenswert ist die elegante Aufmachung des Büchleins in Papier, Druck und Einband. — Da kürzere Darstellungen des behandelten Gebietes in der Literatur nicht zahlreich sind, auch musikinteressierte Schüler oft gern im Physikunterricht mehr über die Beziehungen der Musik zur Physik hören möchten, als ihnen im Rahmen des Physikunterrichtes geboten zu werden pflegt, so kann es für eine Vertiefung in dieser Richtung empfohlen werden und eignet sich vielleicht auch aus diesem Grunde für Schülerbibliotheken.

Hamburg. W. Hillers.

O. Hahn, Was lehrt uns die Radioaktivität über die Geschichte der Erde? 64 S. Mit 3 Abb. Berlin 1926, Julius Springer. *RM* 3.—.

Die vorliegende Schrift ist eine Erweiterung eines Vortrages, den der Verfasser — der zweite Direktor des Kaiser-Wilhelm-Instituts für Chemie in Berlin-Dahlem, der erfolgreichste deutsche Forscher der Radioaktivität — am 21. Nov. 1925 in einer öffentlichen Sitzung der Akademie der Wissenschaften gehalten hat. Die Darstellung wendet sich an die nicht fachwissenschaftlich vorgebildete Allgemeinheit. Auf etwa 20 Seiten „Erläuterungen und Zusätze“ wird der Inhalt nach der wissenschaftlichen Seite hin ergänzt, u. a. z. B. auch die Tabelle der üblichen Bezeichnungen für die geologischen Formationen gegeben. — Der Inhalt gliedert sich in zwei voneinander der Aufgabe nach verschiedene Teile. Im ersten wird über die englisch-amerikanischen Arbeiten berichtet, deren Ziel ist, aus der durch radioaktive Prozesse beeinflußten Zusammensetzung eines Minerals auf dessen absolutes Alter zu schließen. Sie gipfeln in der Festlegung eines Alters von 1600 Millionen Jahren für das Unter-Präkambrium, das älteste ausgesprochene Meeressediment. Bemerkenswert ist, daß der Verfasser den wissenschaftlichen Wert dieser Altersbestimmungen voll anerkennt. — Der zweite Teil beschäftigt sich mit der Bedeutung der in dem Gesteinsmantel der Erde durch radioaktive Vorgänge dauernd entwickelten Wärme. Zunächst rückt sie das aus wärmetheoretischen Betrachtungen erschlossene Alter weit über die Grenze von 400 Millionen Jahren hinaus, die vor beinahe 60 Jahren W. Thomson als Höchstwert annehmen zu dürfen glaubte. Dann aber ist auch die radioaktive Wärme nach John Joly wahrscheinlich die alleinige Grundlage des Vulkanismus. Die schlechte Leitfähigkeit der äußersten Erdrinde ist nämlich gar nicht imstande, die radioaktive Wärme so schnell nach außen abzuleiten, daß nicht in gewisser Tiefe sich die Wärme anhäufen und dadurch Temperatursteigerungen hervorrufen müßte. Besonders unter den Festländern entstehen auf diese Weise „Schmelzherde“ der tieferen Erdschichten. Und die Kontinente müßten in diesen Schmelzherden untergehen, wenn nicht — ein deus ex machina — infolge einer Mondflut dieses flüssigen Magmas die Kontinente — nach Art der Wegnerschen Kontinentalverschiebung — ihren Platz auf der Erdoberfläche änderten, d. h. auf dem flüssigen Magma wegschwämmen. An ihre Stelle tritt dann das Meer, das das Magma wieder abkühlt. In diesem Sinne würden nach den Jolyschen Spekulationen die in der Erdgeschichte periodisch auftretenden geologischen Zeitalter eines gesteigerten Vulkanismus, einer gesteigerten Gebirgsneubildung, kurz der Revolutionen der Erdgeschichte ihre Erklärung finden. Ohne die radioaktiven Ele-

mente wären Festland, Festlandleben und mit ihnen der Mensch und der denkende Geist durch die Abtragung schon längst im allgemeinen Ozean verschwunden, wenn sie eben in jenen radioaktiv bedingten Kreisprozessen nicht immer von neuem wieder geboren würden. — Zweifellos dürfen diese neuartigen Betrachtungen ein hervorragendes allgemeines Interesse beanspruchen, wenn auch in den Jolyschen Spekulationen noch viel unsichere Theorie stecken wird.

Hamburg. W. Hillers.

Zeitschriftenschau.

Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften. — 33. Jahrg., Nr. 6. — R. Fetscher, Einige Anregungen zu biologischen Rechenbeispielen. — Pyrkosch, Zwei Jahre physikalische Arbeitsgemeinschaft. — H. Weinreich, Die sokratische Methode im naturwissenschaftlichen Unterricht. — K. Fladt, Die Quadratur der rationalen Kurven dritter Ordnung.

The American Mathematical Monthly. — Vol. 34, Nr. 5. — F. D. Murnaghan, The duty of exposition with special reference to the Cauchy-Heaviside expansion theorem. — M. E. Mullings, The rotational derivative and some applications. — J. V. Uspensky, A curious case of mathematical induction in geometry. — W. E. Milne and V. Rojansky, Note on the smoothing of curves. — P. A. Caris, Cartesian equations of circles connected with a plane triangle. — D. E. Smith and Salih Mourad, The dust numerals among the ancient Arabs.

Mathematics Teacher. — Vol. 20, Nr. 4. — S. B. Farmer, The Place and Teaching of Calculus in Secondary Schools. — J. A. Nyberg, Uniform Grading of Examinations in Algebra. — V. Wattawa, A Study of the Errors Made in a Ninth Year Algebra Class. — E. H. Taylor, Mathematics in the Junior High School. — New Books. — New Notes.

Vol. 20, Nr. 5. — G. W. Evans, A riddle from Archimedes. — M. H. Ingraham, William James and Henri Poincaré. — I. O. Helseth, The four fundamental arithmetical processes in adults. — H. M. Walker, A mathematical contest. — W. S. Flewelling, A critical evaluation of individualized instruction in mathematics. — C. A. Austin, The laboratory method in teaching of geometry.

Il Bollettino di Matematica. — Anno 23, Aprile 1927, Fasc. 1. — C. Schor, Il calcolo approssimato di π per mezzo d'una proprietà della curva $y = \frac{1}{1+x^2}$. — G. Loria, Nota sopra un'antika soluzione del problema di Delo. — G. Loria, La relatività sulla scena.

Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde. — Bijvoegsel, 3. Jaarg., Nr. 5. — B. Coster, De ontwikkeling van het ruimte-inzicht (Vervolg). — Ontwerp-leerplan voor wiskunde en aanverwante vakken voor de H. B. S. met 5-jarigen cursus. — B. P. Haalmeijer, Nog een opmerking in verband met mijn naschrift in no. 3 van dezen jaargang. — Boekbespreking. — S. W. F. Margadant, De Drievlakshoek. — H. C. Schamhardt, Een wiskunde-boek uit het laatst der 17e eeuw.

Annalen der Physik. — IV. Folge, 82. Bd., 7. Heft. — W. Busse, Über die Natur der Phosphorionisation. — E. Brüche, Über den Querschnitt von Wasserstoff- und Stickstoffmolekülen gegenüber langsamen Elektronen. (Fortsetzung und Schluß.) — H. Goldschmidt, Der Durchgang des Lichtes durch planparallele, isotrope, durchsichtige Platten. — H. Moser, Verfeinerung der Eötvösschen Reflexionsmethode zur Messung von Oberflächenspannungen. — H. Moser, Der Absolutwert der Oberflächenspannung des reinen Wassers nach der Bügelmethode und seine Abhängigkeit von der Temperatur. — W. Bauer, Bemerkungen zu meiner Arbeit: Über das Widerstandsgesetz schnell bewegter Kugeln in Wasser.

82. Bd., 8. Heft. — T. Engset, Die Bahnen und die Lichtstrahlung der Wasserstoffelektronen. — E. Schult, Intensitätsmessungen an Interferenzerscheinungen (nebst Untersuchungen stehender Lichtwellen). — H. W. Ernst, Quantitatives über die Erregung der Phosphoreszenz durch langsame Kathodenstrahlen. — J. W. Dekker, Beitrag zur thermodynamischen Theorie der Kapillarität. — W. Groth, Eine Methode zur Bestimmung des elektromechanischen Äquivalents.

83. Bd., 1. Heft. — W. Wien, Die Leuchtdauer der ultravioletten Wasserstoffserie. — W. Wien, Über Einwirkungen auf Schumannplatten im Vakuumspektrographen bei der Beobachtung von Kanalstrahlen. — H. Schilling, Über die kleinsten Elektrizitätsträger in Gasen. — W. Busse, Über die Natur der Phosphorialisation. — G. Borelius, Löslichkeit und Diffusion von Wasserstoff in Metallen. — Hans Schiller, Elektrolytische Leitung bei hohen Feldstärken.

83. Bd., 2. Heft. — I. Waller, Die Einwirkung der Wärmebewegung der Kristallatome auf Intensität, Lage und Schärfe der Röntgenspektrallinien. — U. Adelsberger, Über Hysteresiswärme und magnetische Energie in ferromagnetischen Körpern. — F. Schmidt, Bandenarten und Absorptionskantenserien der Erdalkaliphosphore. — G. v. Gleich, Veränderliche Elementarladung. — W. Thomas, Schalldruck auf resonierende Körper. — R. Kolisko, Die Erdachsvibration eine Folge der Sonnentätigkeit. — H. Kerschbaum, Über Messungen der Leuchtdauer der Atome. — A. March, Eine Ableitung des Gesetzes von Wiedemann-Franz aus dem zweiten Hauptsatz. — H. Diesselhorst, Bemerkung zu den verschiedenen Ausführungsformen der Kohlrauschschen Methode zur Bestimmung des Leitverhältnisses von Metallen.

Zeitschrift für Physik. — 43. Bd., 3./4. Heft. — J. Franck, H. Kuhn und G. Rollefson, Beziehung zwischen Absorptionsspektren und chemischer Bindung bei Alkalihalogeniddämpfen. — J. Franck und H. Kuhn, Über ein Absorptions- und ein Fluoreszenzspektrum von Silberjodidmolekülen und die Art ihrer chemischen Bindung. — W. Heisenberg, Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik. — H. Lessheim, Jul. Meyer und R. Samuel, Über den Zusammenhang der Komplexbildung mit dem Bau des Zentralatoms. — J. Eggert und W. Noddack, Über die Quantenausbeute bei der Wirkung von Röntgenstrahlen auf Silberbromid. — W. L. Lewschin, Die Auslöschung der Fluoreszenz in festen und flüssigen Farbstofflösungen. — W. Rump, Energiemessungen an Röntgenstrahlen. — W. Weaver, Die Diffusion kleiner Teilchen in einer Flüssigkeit.

43. Bd., 5./6. Heft. — L. Vegard, Gitterschwankungen bei Mischkristallbildung durch Fällung von Lösungen. — E. Back, Das Zinnbogenspektrum nach seiner magnetischen Zerlegung. — S. Goudsmit und E. Back, Feinstrukturen und Termordnung des Wismutspektrums. — H. Ebert, Das Aspirationspsychrometer. II. — E. Pietsch und G. Wilcke, Ionisierungsspannung von Methan. — D. Skobelzyn, Die Intensitätsverteilung in dem Spektrum der γ-Strahlen von RaC. — E. Fermi und F. Rasetti, Eine Messung des Verhältnisses h/k durch die anomale Dispersion des Thalliumdampfes. — E. Gaviola und P. Pringsheim, Zur Frage nach dem Übergang von Fluoreszenz in Phosphoreszenz. — G. I. Pokrowski, Beobachtungsergebnisse über die Lichtzerstreuung im Wassernebel. I. — L. S. Ornstein und M. Minnaert, Die Intensitätsverteilung in Aufnahmen von Spektrallinien und ihre Anwendung auf photometrische Messungen. — J. R. Oppenheimer, Bemerkung zur Zerstreuung der α-Teilchen. — V. Bursian, Zur Berechnung der Mittelwerte in der Lorentzschen Elektronentheorie. — M. Asterblum, Über das Abklingen des Bandenspektrums des Quecksilberdampfes. — D. Nasledow und P. Scharawsky, Zur Frage nach der Abhängigkeit der Intensität der Röntgenspektrallinien von der Spannung. — M. Jeżewski, Über Resonanz in einem Schwingungskreise mit parallel geschaltetem Widerstand.

43. Bd., 7. Heft. — K. W. Meissner, Resonanzstrahlung des elektrisch erregten Argons. — K. W. Meissner, Objektive Demonstration des Zeemaneffekts. — W. Bothe und H. Fränz, Atomzertrümmerung durch α-Strahlen von Polonium. — R. Holm, Die Wärmeleitfähigkeit der Retortenkohle. — H. Schüler, Eine Bemerkung über das Na-Molekülspektrum. — M. Rössiger, Zur Messung von magnetischen Feldern und Feldänderungen mit dem Magnetron. — M. Broszko, Über die Irrtümlichkeit der Navier-Stokesschen Hydromechanik. — G. v. Gleich, Eine Verallgemeinerung der Lorentztransformation. — N. v. Kolossowsky, Die experimentelle Begründung des dritten Hauptsatzes der Thermodynamik und seiner Verallgemeinerung. — J. Kasarnowsky und M. Proskurnin, Die Elektronenaffinität des Wasserstoffs und die Dichten der Alkalihydride. — V. S. Vrkljan, Bemerkung

zu der Arbeit von K. Schaposchnikow: „Ein neues Prinzip in der Dynamik der Lichtquanten".

43. Bd., 8. Heft. — P. Pringsheim und E. Rosen, Über Molekülspektra des Kaliums, Natriums und K-Na-Gemisches. — G. Wentzel, Über strahlungslose Quantensprünge. — A. Goetz, Untersuchungen über die glühelektrische Emission von Metallen bei Zustandsänderungen des Kathodenmaterials. — A. Unsöld, Quantentheorie des Wasserstoffmolekülions und der Born-Landéschen Abstoßungskräfte. — O. Blüh und N. Stark, Über die elektrische Beeinflussung der Adsorption. — W. Anderson, Über Fernando Sanfords Hypothese, daß die Sonne und der Mond hohe negative Eigenladungen haben. — O. Klüsener, Poissonsches Gesetz und Hugoniotgleichung.

Physikalische Zeitschrift. — 28. Jahrg., 10. Heft. — J. Tagger, Versuche und Gedanken über Reibungselektrizität. — U. Adelsberger, Ein Apparat zur Bestimmung des mechanischen Wärmeäquivalents. — H. Jung, Die Reduktionen der Schwerebeschleunigung und die Lehre von der Isostasie. — R. G. Loyarte und A. T. Williams, Über vermutete anormale Serien des Quecksilberatoms. — A. E. F., Ausschuß für Einheiten und Formelgrößen.

28. Jahrg., 11. Heft. — H. Benndorf, Zur Erinnerung an Franz Exner. — J. Dejmek, Zur Kenntnis einer allgemeinen Eigenschaftsfunktion mischkristallfreier Aggregate. — K. Lichtenecker, Über die gemeinsame Wurzel des logarithmischen Mischungsgesetzes und des Ansatzes für die Entropiefunktion. — S. Mizushima, Anomale Dispersion und Absorption elektrischer Wellen. — J. Stark, Neue Tatsachen betreffend die Axialität der Lichtemission und der Struktur chemischer Atome.

28. Jahrg., 12. Heft. — H. Witte, Über die Bestimmung von Elektrometerkapazitäten. I. — W. Kastrow, Zur Theorie des Stromes der elektrischen Zerstreuung. — R. Ambronn, Ein Elektrometer zur Bestimmung des Emanationsgehaltes der Bodenluft (D. R. P.). — H. Lorenz, Wärmeübergang und Turbulenz. — A. C. Lunn und J. K. Senior, Über die Raum-Zeit-Gruppen von Kolkmeijer. — G. B. Hagen, Ein Demonstrationsmodell zur Veranschaulichung des Laue-Effektes. — R. Sänger, Dielektrizitätskonstante des dampfförmigen Äthyläthers und Äthylalkohols.

Zeitschrift für technische Physik. — 8. Jahrg., 6. Heft. — P. Melchior, Die Begriffe Masse und Gewicht. — H. Barkhausen und H. Tischner, Die Lautstärke von zusammengesetzten Tönen und Geräuschen. — H. Sell, Drei Demonstrationsversuche auf dem Gebiete der Schwingungstechnik. — P. Selényi, Methoden der Vakuumbestimmungen an fertigen Glühlampen. — M. von Ardenne, Über Röhrenverzerrungen bei Verstärkern. — H Naumann, Glanzmessung an Geweben. — G. Hauffe, Über die Eigenschaften des allgemeinen elliptischen Drehfeldes.

8. Jahrg., 7. Heft. — Br. Seegert, Adolf Miethe †. — V. M. Goldschmidt, Konstruktion von Kristallen. — E. Schwerin, Über Transversalschwingungen von Stäben veränderlichen Querschnitts. — A. Bouwers, Über den Temperaturverlauf an der Anode einer Röntgenröhre. — H. Fassbender und K. Krüger, Geräuschmessungen in Flugzeugen.

Die Naturwissenschaften. — 15. Jahrg., 22. Heft. — R. v. Mises, Pflege der angewandten Mathematik in Deutschland. — R. Courant, Erwiderung.

15. Jahrg., 23. Heft. — H. Bartels, Zur Polarisation des Atomrumpfes. — Bericht über Band XIX der Collected researches des national physical laboratory in Teddington.

15. Jahrg., 24. Heft. — R. v. Mises, Das Gesetz der großen Zahlen und die Häufigkeitstheorie der Wahrscheinlichkeit. — Lübcke, Über die Erzeugung von Kathodenstrahlen großer Intensität außerhalb der Röhre. — S. Frisch, Über das Funkenspektrum des Na.

15. Jahrg., 25. Heft. — E. Lange und G. Meissner, Verdünnungswärmen einiger starker Elektrolyte im Grenzgebiet der Debye-Hückelschen Theorie.

15. Jahrg., 26. Heft. — M. Planck, Die physikalische Realität der Lichtquanten. — M. Polyakoff, Das Kontaktaktivieren des Wasserstoffs durch Metalle. — H. Beutler und B. Josephy, Resonanz bei Stößen zweiter Art.

15. Jahrg., 27. Heft. — Otto Baschin, Die Polflucht des Meerwassers. — G. W. Kellner, Die Ionisierungsspannung des Heliums nach der Schrödingerschen Theorie.

Zeitschrift für den physikalischen und chemischen Unterricht. — 40. Jahrg., 3. Heft. — H. Lorenz, Die Möglichkeit der Raumfahrt. — P. Werner, Messung der Winkel eines Glasprismas mit nahezu gleichseitigem Hauptschnitt. — W. Dahmen, Über das natürliche System der Elemente. — P. Rischbieth, Dissoziationsversuche mit einer Platinröhre. — W. Volkmann, Ein neuer Stativfuß. — E. Hensel, Widerstandsänderung infolge Temperaturänderung. — J. Willip, Ein Doppelkondensator für flüssige und feste Dielektrika. — K. Lichtenecker, Über linearen, logarithmischen und hyperbolischen Potentialabfall. — L. Doermer, Die Wärmestrahlung von Karbonaten im Reagenzglase als Schülerversuche. — R. Dautzenberg, Die häufigsten Lichtschaltungen, dargestellt in einfachen Modellen. K. Metzner, Kant als Naturforscher. — A. Wenzel, Zur Bildtelegraphie.

Naturwissenschaftliche Monatshefte für den biologischen, chemischen, geographischen und geologischen Unterricht. — VII. Bd, der ganzen Folge XXIV. Bd., 4. Heft. — Fr. Dannemann, Die Geschichte der Naturwissenschaften und der Technik an den Universitäten und Technischen Hochschulen.

Physik und Chemie (Wien). — 27. Jahrg., 3. Heft. — J. Jung, Zur Beobachtung der Fata Morgana in Wien. — R. Schmidt, Das Zelenysche Influenz-Elektroskop. — J. Deisinger, Kurzschlüsse beim Experimentieren mit Starkstrom. K. Ippisch, Demonstrationsversuche über elektrische Leitung vom Flammen und Glühelektronen. — H. Pabisch, Robert Boyle, zu seinem 300. Geburtstag.

Das Wetter. — 44. Jahrg., 4. Heft. — Nachruf, Alfred de Quervain †. — J. Letzmann, Gleichzeitiges Auftreten von Gewitter und Nordlicht am 8. September 1926.

Aus verschiedenen Zeitschriften. — M. Wolff, Eine mikrophotographische Vertikalkamera (Blätter für Untersuchungs- und Forschungs-Instrumente, 1. Jahrg., 1. Heft). — Vith, Wie unsere Töpfe gemacht werden, ein Beitrag zur Anwendung der Photographie und der Projektion im Unterricht (Optik und Schule, 2. Jahrg., Nr. 3/4).

Sonderschriften. — O. Scheffler, Die Diskriminantenkurve der reduzierten Gleichung vierten Grades mit einer Unbekannten (Jahresbericht Francisceum zu Zerbst, 1927).

Neuerscheinungen.[1])

Sammelwerke.

Abhandlungen zur Didaktik und Philosophie der Naturwissenschaft. (Sonderhefte der Zeitschr. für den phys. u. chem. Unterr.) Berlin, J. Springer.
12. W. Volkmann, Die Linsenoptik in der Schule. Anleitung zu den Versuchen und zur rechnenden Behandlung. 104 S. 1927. Geh. *RM* 7.50.

Aus Natur und Geisteswelt. Leipzig u. Berlin, B. G. Teubner. Geb. je *RM* 2.—.
301. R. Vater, Die Maschinenelemente. 5. Aufl. von F. Schmidt. 119 S. 1927.

Mathematisch-Physikalische Bibliothek, herausgeg. von W. Lietzmann und A. Witting. Leipzig, B. G. Teubner. Kart. *RM* 1.20.
Bd. 70. W. König, Grundzüge der Meteorologie. 54 S. 1927.

Sammlung Göschen. Berlin, de Gruyter. Geb. *RM* 1.50.
Bd. 611. R. Lang, Eyperimentalphysik I. 3. Aufl. 146 S. 1926.
Bd. 961. L. Zipperer, Technische Schwingungslehre II. Schwingungen in Maschinenanlagen (Torsions- und Biegungsschwingungen). 123 S. 1927.

---

1) An dieser Stelle werden alle bei der Schriftleitung einlaufenden Bücher, soweit sie überhaupt den Stoffkreis der Zeitschrift berühren, angezeigt. Eine ausführliche Besprechung der unverlangt einlaufenden Bücher behält sich die Schriftleitung vor. Eine Rücksendung kann in keinem Falle erfolgen.
Die Schriftleitung.

Mathematische Wissenschaften.

K. Kleppisch, Willkür oder mathematische Überlegung beim Bau der Cheopspyramide. 38 S. München 1927, Oldenbourg. Geh. RM 1.—.

Mathematischer Unterricht.

Feller und Odermann, Das Ganze der kaufmännischen Arithmetik. III. Teil. 22. Aufl. von B. Kämpfe und P. Prater. 144 S. Leipzig 1927, B. G. Teubner. Geb. RM 3.—.
E. Fettweis, Das Rechnen der Naturvölker. 96 S. Leipzig 1927, B. G. Teubner. Kart. RM 5.—.
W. Lietzmann, Mathematisches Unterrichtswerk für Mittelschulen. Leipzig, B. G. Teubner:
W. Lietzmann und O. Eckhardt, Aufgabensammlung und Leitfaden der Geometrie. Teil II: Trigonometrie und Stereometrie. 3. Aufl. 57 + 29 S. 1926. Kart. RM 1.80.
W. Lietzmann, Mathematisches Unterrichtswerk für höhere Mädchenbildungsanstalten. Leipzig, B. G. Teubner:
W. Lietzmann, Aufgabensammlung und Leitfaden für Arithmetik, Algebra und Analysis. Für die Unter- und Mittelstufe. 5. Aufl. 211 + 65 S. 1927. Geb. RM 4.40.
K. Pilizotti, Lösungen der Aufgaben der Arithmetik, Algebra und Analysis von W. Lietzmann u. J. Jarosch. 139 S. Wien 1927, Deuticke.
A. Schülke, Vierstellige Logarithmen-Tafeln. 16. Aufl. Ausg. B: Mit Anhang: Mathematische Formeln. 34 S. Geb. RM 2.—.

Naturwissenschaften.

E. Gehrcke, Handbuch der physikalischen Optik. Bd. II. Zweite Hälfte, erster Teil. 361 S. Leipzig 1927, Joh. Ambr. Barth. Brosch. RM 28.—.
W. Henle, Anleitung für das organisch-chemische Praktikum. 308 S. Leipzig 1927, Akad. Verlagsgesellsch. Geh. RM 12.—.
F. Kohlrausch, Lehrbuch der praktischen Physik. 15. Aufl. 832 S. Leipzig 1927, B. G. Teubner. Geh. RM 23.—, geb. RM 26.—.
K. Mühlbrett, Funkschaltungen. Ein Leitfaden der wichtigsten Empfangs- und Sendeschaltungen. 97 S. Berlin 1927, Julius Springer. RM 4.20.
F. Rawitscher, Die heimische Pflanzenwelt in ihrer Beziehung zu Landschaft, Klima und Boden. 238 S. Freiburg i. B. 1927, Herder & Co. RM 5.30.
R. Süring, Leitfaden der Meteorologie. 412 S. Leipzig 1927, Chr. Herm. Tauchnitz. Geb. RM 18.50.
R. Thebis, Glasarbeiten und Feinmechanik, Herstellung und Instandsetzung wissenschaftlicher Apparate. Praktische Winke für Laboratorium und Werkstatt. 175 S. Leipzig 1927, Dr. Max Jänecke. Geh. RM 4.80.
W. Wangerin-Wünsche-Schorler, Die verbreitetsten Pflanzen Deutschlands. 9. Aufl. 299 S. Leipzig 1927, B. G. Teubner. Geb. RM 4.—.

Naturwissenschaftlicher Unterricht.

A. Dorner, Leitfaden der Physik für Lyzeen und verwandte Anstalten. Nach der „Unterstufe der Physik" von Dr. K. Rosenberg auf Grund der Preußischen Lehrpläne bearbeitet. 1. Heft (Untertertia). 3. Aufl. 119 S. Leipzig 1927, G. Freytag A.-G.
Grimsehl, Lehrbuch der Physik für Realanstalten. I. Teil: Unterstufe. Bearbeitet von J. Kraemer u. O. Wolfram. 7. Aufl. 295 S. Leipzig 1927, B. G. Teubner. Geb. RM 5.—.
Hahn-Koch, Physikalische Schülerübungen. 2. Aufl. 140 S. Leipzig 1927, B. G. Teubner. Kart. RM 3.20.
K. Kraepelin, Leitfaden für den botanischen Unterricht. Bearb. von C. Schaeffer. 11. Aufl. I. Teil: Einführung in die Pflanzenkunde. 90 S. Leipzig 1927, B. G. Teubner. Kart. RM 2.—. II. Teil: Pflanzenkunde in zusammenfassender Darstellung. 219 S. Ebenda 1927. Geb. RM 4.—.

A. Lipp, Lehrbuch der Chemie und Mineralogie. I. Teil: Für die Mittelstufe höherer Lehranstalten. 11. Aufl. von J. Reitinger. 107 S. Leipzig 1927, B. G. Teubner. Kart. *RM* 2.—.

E. Mannheimer, Grundriß der Chemie und Mineralogie. II. Teil: Für die Oberstufe von Knaben- und Mädchenschulen realer Richtung. 328 S. Leipzig 1927, B. G. Teubner. Geb. *RM* 5.60.

B. Tollens, Einfache Versuche für den Unterricht in der Chemie zur Unterweisung von studierenden Landwirten. 5. Aufl. von P. Ehrenberg u. B. Baule. 103 S. Berlin 1927, Paul Parey. Geb. *RM* 6.—.

Philosophie, Pädagogik, Allgemeines.

H. Driesch, Metaphysik der Natur. (Handbuch der Philosophie.) 95 S. München 1927, Oldenbourg. Brosch. *RM* 4.50.

H. Weyl, Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft. (Handbuch der Philosophie.) 162 S. München 1927, Oldenbourg. Brosch. *RM* 7.50.

Lustige Ecke.

58. Genauigkeitsfanatiker. Im Museum erklärt der Führer: „Diese Mumie ist 5007 Jahre alt". „Woher wissen sie das so genau?" „Ja, sehen Sie, als ich hierher kam, da war die Mumie 5000 Jahre alt — und das ist jetzt gerade 7 Jahre her."

59. Astronomische Kenntnisse. Kurz vor der Sonnenfinsternis am 29. Juni 1927 schrieb ein Herr an zahlreiche Zeitungsredaktionen, er sei empört, daß man anscheinend auf Verabredung das Publikum irre zu führen versuche. Er werde auf den Schwindel mit der Sonnenfinsternis am 29. Juni d. J. nicht hineinfallen. Er habe im Kalender nachgesehen. An dem Tage sei gerade Neumond. Und wenn der Mond gar nicht da sei, könne er doch auch nicht die Sonne verdecken! G. K.

60. Eine unendlich große Umdrehungszahl. Der bekannte bergan rollende Doppelkegel rollt auf den Schienen längs einer Schraubenlinie ab, deren Windungen sich an der Kegelspitze häufen. Läßt man also den Kegel so lange rollen, bis er zwischen den divergierenden Schienen durchfällt, so hat er eine unendlich große Umdrehungszahl. N. in K.

Vermischtes. — Sprechsaal.

Anfrage. Es soll Münzen geben, die ebenso wie der von Cicero wieder aufgefundene Grabstein des Archimedes einen Zylinder mit eingeschriebenem Kegel und eingeschriebener Halbkugel zeigen. Sind solche Münzen bekannt? Wo sind sie abgebildet? Antworten an

die Schriftleitung.

Berichtigung. In dem Aufsatz „Zur Mathematik des sportlichen Wurfes", Jahrg. 27, S. 7, muß es unter 8) heißen: Für $v = 20$ sek und $h = 2$ m wird (maximalen Wurfwinkel, also *nicht* $\alpha = 45^0$ vorausgesetzt) für

$$g = 9{,}781 \quad x = 42{,}85 \text{ m};$$
$$g = 9{,}81 \quad x = 42{,}73 \text{ m};$$
$$g = 9{,}832 \quad x = 42{,}64 \text{ m}.$$

Lampe (Elsterwerda).

Für die Schriftleitung verantwortlich: **W. Lietzmann** in Göttingen.

Druck von B. G. Teubner in Leipzig Ausgegeben am 3. September 1927

ZEITSCHRIFT FÜR MATHEMATISCHEN UND NATURWISSENSCHAFTLICHEN UNTERRICHT ALLER SCHULGATTUNGEN

BEGRÜNDET 1869 VON J. C. V. HOFFMANN



HERAUSGEGEBEN VON

H. SCHOTTEN und W. LIETZMANN
in Halle a. S. in Göttingen
unter Mitarbeit von
W. HILLERS
in Hamburg

58. JAHRGANG. 1927 · 8. HEFT



LEIPZIG · B. G. TEUBNER · BERLIN

Inhaltsverzeichnis des 8. Heftes.

Für die Schriftleitung verantwortlich: W. Lietzmann in Göttingen.

QUIS CAELUM POSSIT NISI CAELI MUNERE NOSSE

Wär nicht das Auge sonnenhaft,
Die Sonne könnt es nicht erblicken.
Goethe



Abb. 1. Spiralnebel M64 Comae (nach Mt. Wilson-Aufnahme)

Graff:
Grundriß der Astrophysik

Moulton-Fender:
Einführung in die Himmelsmechanik

LEIPZIG / VERLAG VON B. G. TEUBNER / BERLIN

3302. IX. 27. 157.

Grundriß der Astrophysik

Eine allgemeinverständliche Einführung in den Stand unserer Kenntnisse über die physische Beschaffenheit der Himmelskörper

Von

Prof. Dr. KASIMIR GRAFF

Observator der Hamburger Sternwarte in Bergedorf

Erscheint in drei Lieferungen und in einem Gesamtband:

1. Lieferung: **Die wissenschaftlichen Grundlagen der astrophysikalischen Forschung.** Mit 2 Lichtdrucktafeln und 195 Abb. im Text. [262 S.] gr. 8. 1927. Geh. *RM* 15.—

2. Lieferung: **Die Weltkörper des Sonnensystems.** Mit 2 Lichtdrucktafeln und zahlr. Abb. im Text. [Erscheint November 1927.]

3. Lieferung: **Die Fixsterne, Nebelflecken und Sternhaufen.** Mit 2 Lichtdrucktafeln und zahlr. Abb. im Text. [Erscheint Ende 1927.]

Der Bezug der ersten Lieferung verpflichtet zur Abnahme der zweiten und dritten Lieferung. Dieser werden Gesamttitel, Vorwort und komplettes Inhaltsverzeichnis beigefügt.

VORWORT

Der „Grundriß der Astrophysik" soll künftighin die in gleichem Verlage erschienene „Populäre Astrophysik" von J. SCHEINER ersetzen. Die rasche Entwicklung der Himmelskunde in den letzten Jahrzehnten, die Umstellung ihrer Ziele und Arbeitsmethoden hat bereits bei der vor fünf Jahren erfolgten Herausgabe der letzten (dritten) Auflage eine sehr wesentliche Umarbeitung des SCHEINERschen Werkes notwendig gemacht. Bei der neuerlichen Durchsicht des Buches zum Zwecke eines Neudrucks wurde schließlich der Entschluß gefaßt, die „Populäre Astrophysik" nicht nur in der äußeren Gestalt, sondern auch in den Grundlagen vollständig neu aufzubauen. Auf diese Weise ist der vorliegende „Grundriß" entstanden, der mit seinem Vorgänger nur noch wenige Berührungspunkte zeigt, und für den der Unterzeichnete nunmehr allein die Verantwortung übernimmt.

Dem Kollegen vom Fach brauchen die Schwierigkeiten nicht geschildert zu werden, die heute bei Abfassung eines praktisch gegliederten, alle Gebiete gleichmäßig behandelnden und dabei leicht faßlichen Leitfadens der astrophysikalischen Forschung zu überwinden sind. Die alten, der astrometrischen Schule entlehnten Verfahren, deren Hauptverfechter neben H. C. VOGEL gerade J. SCHEINER war, sind zum großen Teil durch weniger genaue, aber weit großzügigere Arbeitsmethoden abgelöst worden, über deren Bedeutung man wohl zuweilen verschiedener Meinung sein kann, die aber den gegenwärtig lebenden Astronomen den unzweifelhaften Vorteil gebracht haben, daß wir heute weit eher, als es vordem möglich war, die Erfolge der eingeschlagenen Wege noch persönlich erleben und über deren Wert und Unwert ein Urteil ge-

winnen können. Daß bei einer so raschen, dem älteren Zweige der Himmelskunde völlig unbekannten Arbeitsweise nicht alle Einzelheiten der neuzeitlichen Astrophysik Ewigkeitswert besitzen, ist ohne weiteres klar. Ein vollkommen auf die Gegenwart und ihre geistreichen Tagestheorien eingestelltes Buch wird daher weit rascher veralten, als ein anderes, das in erster Linie auf den feststehenden Erfahrungstatsachen aufgebaut ist und in dem nur vorsichtig die alten Pfade verlassen werden. Hier das richtige Maß zu treffen, ist durchaus nicht leicht. Wie der Leser des vorliegenden Grundrisses bald erkennen wird, hat dem Verfasser von Anfang an der zweite Gesichtspunkt als Leitgedanke weit stärker vorgeschwebt als der erste. Dafür liegt aber nunmehr die Hoffnung vor, daß der Benutzer des Buches die sichere Führung durch das Gedankenlabyrinth der neuzeitlichen Forschungsmethoden und Überlegungen von Anfang bis zu Ende nirgends vermissen wird. Dabei ist jeder Abschnitt so abgefaßt worden, daß sein Inhalt auch ohne dauerndes Zurückgreifen auf vorausgegangene Erläuterungen verständlich ist. Wer tiefer in die Materie einzudringen wünscht, findet in den zahlreichen Zifferntabellen und Diagrammen des Textes sowie in den Literaturnachweisen die notwendige Anleitung dazu. Infolge dieser Hilfsmittel wird das Buch sicher auch dem Fachmann aus verwandten Wissensgebieten, dem Physiker, dem Geologen, dem Meteorologen, vor allem aber dem Studierenden der Astronomie von Nutzen sein, zumal die wissenschaftlichen Gesichtspunkte jetzt noch etwas mehr in den Vordergrund gestellt sind, als es bei SCHEINER der Fall war.

Wie weit es geglückt ist, bei Abfassung des Grundrisses den Leitgedanken einer klaren, kritischen und auch für den eingeweihten Leser nirgends seichten Darstellung zu erfüllen, wird die Aufnahme des Buches zeigen. Mit besonderer Sorgfalt ist bei der Durcharbeitung des Textes auf Vollständigkeit des Stoffes und auf Gleichmäßigkeit seiner Behandlung geachtet worden. Die Grundlage aller streng naturwissenschaftlichen Anschauungen, die Beobachtungserfahrung, ist überall besonders betont und hervorgehoben. Aber auch die mathematisch-physikalischen Überlegungen finden sich, sofern dies mit elementaren Hilfsmitteln möglich war, so weit berücksichtigt, daß sie als Ausgang für ein tieferes Eindringen in die Materie dienen können. Jedenfalls wird der Leser darüber nicht im Zweifel bleiben, daß das großzügige Weltbild der Gegenwart der Zusammenarbeit und der ständigen Fühlungnahme zwischen Praxis und wissenschaftlicher Theorie zu verdanken ist.

Für die äußere Form der Darstellung, die Auswahl der zahlreichen neuen Abbildungen und graphischen Darstellungen, waren Erfahrungen maßgebend, die sich bei Gelegenheit von Vorlesungen und Vorträgen, sowie bei der langjährigen Auskunftserteilung für verschiedene astronomische Interessengemeinschaften ergeben haben. Einigen befreundeten Physikern und Astronomen verdanke ich verschiedene wertvolle Ratschläge, Herrn Kollegen DR. LARINK außerdem eine Durchsicht des Manuskriptes und die sehr weitgehende Unterstützung beim Lesen der Korrekturen. Zu den Abbildungen und Tafeln des Buches haben in sehr entgegenkommender Weise das Mt. Wilson- und Einstein-Observatorium, die Heidelberger Sternwarte, das Zeiss- und Bamberg-werk, sowie einige Privatastronomen beigetragen.

K. GRAFF.

Bergedorf, im Juni 1927.

Inhaltsverzeichnis

ERSTE LIEFERUNG

Die wissenschaftlichen Grundlagen der astrophysikalischen Forschung

I. Physikalische Grundbegriffe

1. Strahlung und Bau der Materie.

2. Die Grundlagen der Optik.

II. Die Himmelsphotographie

3. Die photographische Technik und ihre Geschichte.

4. Die photographische Optik. Aufnahme- und Meßinstrumente.

III. Die Spektralanalyse

5. Die spektralanalytischen Theorien.

IV. Die Photometrie

ZWEITE LIEFERUNG

Die Weltkörper des Sonnensystems

V. Die Sonne

VI. Die Planeten, Kometen und Meteore

DRITTE LIEFERUNG

Die Fixsterne, Nebelflecke und Sternhaufen

VII. Die Fixsterne

VIII. Die kosmischen Nebel und Sternhaufen



Aus Abschnitt II: **Die Himmelsphotographie**

Es kann sehr wohl die Frage aufgeworfen werden, ob für die photographischen Aufnahmen überhaupt ein besonderes Führungsrohr notwendig ist. Wäre die Schicht der photographischen Platte durchsichtig, so könnte tatsächlich mit einem hinter derselben angebrachten Okular die unveränderte Lage eines Leitsterns ständig kontrolliert werden. Da aber alle Plattenemulsionen undurchsichtig sind, muß für den Zweck entweder die Schicht auf einem kleinen Fleck ausgespart oder das Okular vor der Platte angebracht werden. Beide Wege sind versucht worden, der letzte in Form von gebrochenen senkrecht zur Achse stehenden Leitokularen. Wegen der damit verbundenen Störung des einheitlichen Plattenbildes durch teilweise Beschattung bringt man gegenwärtig das Leitokular meist dicht neben der Kassette an (Abb. 3). Andere Einrichtungen zur Erleichterung und Vervollkommnung der Nachführung, wie sie z. B. photographische Parallaxenmessungen und andere Aufgaben erforderlich machen, müssen hier übergangen werden, obwohl dabei mancher sinnreiche Gedanke verwirklicht worden ist. So haben z. B. R. König und K. Satori die mit lästigen Diffraktionserscheinungen behaftete Fadenbeleuchtung der Führungsrohre durch Konstruktion eines besonderen Leitokulars zu umgehen versucht, bei dem ein Teil der Lichtstrahlen zu dem normalen umgekehrten, der andere dagegen zu einem aufrechten Bilde vereinigt wird. Werden Haupt- und Nebenbild zu Beginn der Aufnahme subjektiv zur Deckung gebracht, so hat dann der Beobachter lediglich auf diese Koinzidenz zu achten. Da jede Änderung der Blickrichtung, z. B. im Stundenwinkel, das eine Sternbild nach links, das andere nach rechts verschiebt, ist das Verfahren sehr empfindlich.

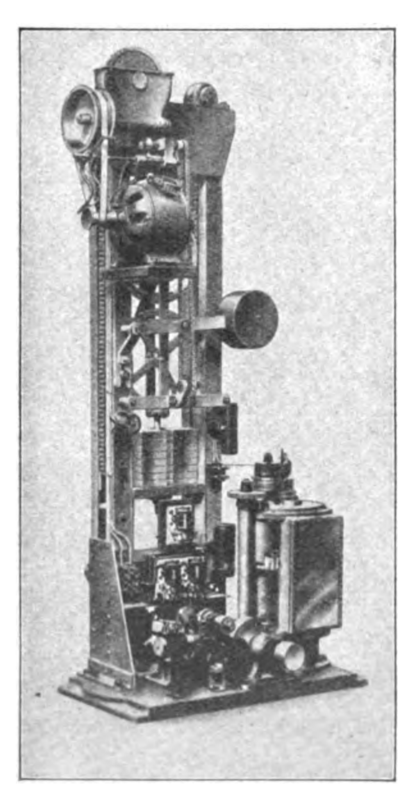


Abb. 2. Antriebsvorrichtung v. C. Zeiss für die Stundenbewegung großer Refraktoren und Reflektoren.

Die Bedienung der Feinbewegungen an großen Instrumenten erfolgt durch Schlüsselübertragung aus freier Hand oder elektrisch durch Tasterauslösung. Das letzte Verfahren ist schon deshalb besonders zu empfehlen, weil es jedes Anstoßen gegen das Instrument verhin-

dert. Bei Expositionen in der Nähe des Horizontes, wie sie bei Kometen zuweilen unvermeidlich sind, ist bei der Nachführung der Einfluß des Refraktionsunterschiedes zwischen den visuellen und den photographischen Strahlen nicht mehr zu vernachlässigen. In solchen Fällen empfiehlt es sich, bei Verwendung genügend heller Sterne ein dunkles Blauglas vor das Okular zu setzen, wodurch der Eindruck für das Auge weit besser dem photographischen Bilde angepaßt wird.

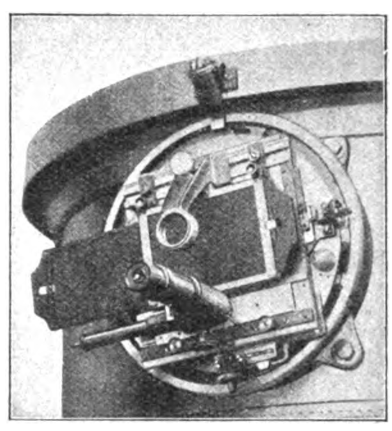


Abb. 3. Doppelschlittenkassette am 72-cm-Reflektor der Heidelberger Sternwarte.

Selbst ein auf das sorgfältigste gebautes und montiertes photographisches Instrument wird mangelhafte Bilder geben, wenn sein Achsensystem nicht genau mit demjenigen der Himmelskugel übereinstimmt. Die Anforderungen in dieser Beziehung sind verhältnismäßig sehr hoch. So darf der Fehler der Achsenrichtung schon bei kleineren Instrumenten keine Bogenminute betragen, wenn eine Bilddrehung auf der Platte vermieden werden soll. Die Orientierung der Achsen muß hier also weit genauer sein als bei den visuellen Instrumenten. Die erforderliche Verbesserung der rohen Aufstellung kann auch ohne Kreisablesungen auf photographischem Wege erfolgen, am besten nach einem sehr einfachen von Scheiner angegebenen Verfahren, das aber hier nicht näher auseinandergesetzt werden kann.[1])

Bei großen Instrumenten ist noch eine häufige Fokussierung der Abbildungsebene unumgänglich notwendig, da infolge der Temperatureinflüsse auf Linsen, Spiegel und Rohre der Brennpunkt sich im Laufe der Zeit um mehrere Millimeter hin und her verschieben kann. Photographisch korrigierte Objektive bereiten dabei einige Mühe, da hier der beste Fokus durch Serienaufnahmen auf einer Platte versuchsweise gefunden werden muß. Bei Spiegeln und bei visueller Optik erfolgt die Kontrolle am besten nach der von L. Foucault angegebenen sog. Messerschneidenmethode. Ein scharfes Messerchen, ein schwarzes Kartenblatt oder dgl. wird nahe dem Brennpunkt in den Strahlengang gebracht. Die Pupille befindet sich hinter dem Brennpunkt und beobachtet ohne Okular das von einem hellen Fixstern voll erleuchtete Objektiv. Wird die Schneide innerhalb des Fokus nach oben vorgeschoben, so erscheint entsprechend Abb. 4 die obere Hälfte, bei Verschiebung außerhalb des Fokus dagegen die untere Hälfte des Objektivs verdunkelt. Im Brennpunkt selbst verschwindet die ganze Objektivbeleuchtung

[1]) J. Scheiner, Photographie der Gestirne, Leipzig 1897.

plötzlich und gleichmäßig, wobei die Beurteilung der Messerstellung so genau ist, daß es nicht schwer fällt, die Lage der Strahlenvereinigung bis auf wenige Hundertstel eines Millimeters zu bestimmen.

Der Achsenaufbau der photographischen Fernrohre muß stets so erfolgen, daß das übliche Umlegen des Instruments beim Übergang vom östlichen zum westlichen Himmel fortfällt. Der ursprüngliche Astrograph der Gebrüder M. und P. Henry der Pariser Sternwarte und seine Kopien im Vatikan, in La Plata usw. haben zu diesem Zweck die sog. englische Fernrohrmontierung erhalten. Das Doppelfernrohr besteht dabei aus einem viereckigen Kasten, der inmitten der geteilten großen Stundenachse sitzt. Diese Anordnung hat insofern einen Nachteil, als sie Aufnahmen in der unmittelbaren Nähe des Himmelspols ausschließt. Der einzige deutsche photographische Refraktor in einer englischen von der beschriebenen allerdings etwas abweichenden Montierung befindet sich auf dem Astrophysikalischen Observatorium in Heidelberg. Das von Miß C. Bruce dem Institut gestiftete Instrument besteht aus zwei gleichen photographischen Refraktoren von 40 cm Objektivöffnung und 2 m Brennweite, die mit dem visuellen Leitrohr seitlich an der $5\frac{1}{2}$ m langen Stundenachse angebracht sind.

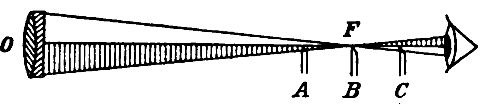
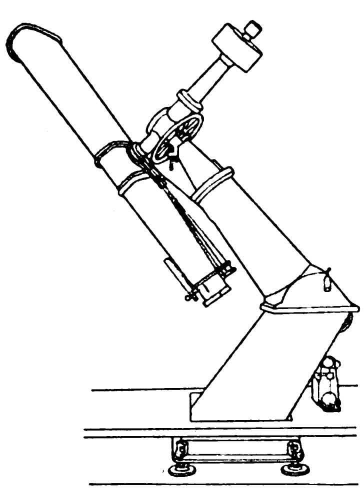


Abb. 4. Prinzip des sog. Messerschneidenverfahrens.

Der Astrograph des Potsdamer Observatoriums (Abb. 5) stellt den Typus eines um 1890 in Deutschland gebauten Doppelrefraktors nach Henryschem Prinzip, aber in einer abweichenden Achsenkonstruktion dar. Das photographische und das visuelle Instrument mit Objektiven von 33 bzw. 23 cm Öffnung sind in einem Rohr von elliptischem Querschnitt vereinigt. Die Brennweite beider beträgt 3.4 m; sie ist, wie bereits früher erwähnt, so gewählt, daß in der Brennebene eine Bogenminute möglichst genau einem Millimeter entspricht. Die eiserne Kassette zur Aufnahme der photographischen Platten im Format 16×16 cm kann durch einen Bajonettverschluß leicht abgenommen und wieder angesetzt werden, ohne daß ihre Justierung dadurch geändert wird. Die von der Werkstätte J. G. Repsold in Hamburg gelieferte Montierung ist eine selbständige Nachbildung einer älteren englischen Aufstellung: Die kurze deutsche Stundenachse ist beibehalten, dafür ist aber die Säule geknickt, so daß der obere Teil derselben in der Fortsetzung der Stundenachse liegt. Damit ist erreicht, daß das


Abb. 5. Geknickte Säule der deutschen Normalastrographen.

Fernrohr ohne Umlegen in jede beliebige Stellung gebracht und auch die Polgegend photographiert werden kann. Ähnliche Instrumente von diesem Typus sind von C. ZEISS in Jena und O. TOEPFER in Potsdam für die Sternwarten in Bergedorf und Babelsberg gebaut worden.

Als Beispiel der neuzeitlichen Montierung eines Spiegelteleskops kann der Reflektor der Bergedorfer Sternwarte dienen. Die kräftige Stundenachse des im vorliegenden Falle sehr kurzbrennweitigen Instrumentes (Öffnung 100 cm, Brennweite 3 m) läuft in eine Art Gabel aus, in der das Spiegelteleskop ruht und in beliebige Deklinationsstellungen gebracht werden kann. Die Durchbiegung der Achsen wird für alle Instrumentlagen durch ein besonderes, von Ingenieur F. MEYER angegebenes Entlastungssystem verhindert. Der Reflektor zeigt im übrigen die Newtonsche Konstruktion; die kleine Kassette mit der Platte befindet sich also im Brennpunkte des Spiegels mitten in der vorderen Tubusöffnung. Die mechanische Nachführung erfolgt durch ein kräftiges, im Nebenraum aufgestelltes Uhrwerk mit Motorantrieb, konstantem Gewichtsaufzug und Sekundenkontrolle (Abb. 2). Zur Überwachung der Bewegung dient ein größeres, mit dem Spiegel fest verbundenes Fernrohr und ein elektrisch betätigtes durch Druckkontakte auslösbares Schlüsselwerk.

Zum Schluß mag in der nebenstehenden Tabelle eine Übersicht über die größten zu wissenschaftlichen Zwecken verwendeten Reflektoren und Refraktoren der Gegenwart gegeben sein. Bei den katoptrischen Systemen sind alle Instrumente über 100 cm, bei den dioptrischen solche über 70 cm Öffnung berücksichtigt.[1])

Verzeichnis
der größten Spiegel und Objektive.

Instrument	Öffnung	Sternwarte
Reflektor	258 cm	Mt. Wilson, Kalifornien
»	184	Victoria, Kanada
»	183	Birr Castle, Irland
»	152	Mt. Wilson, Kalifornien
»	125	Babelsberg, Deutschland
»	122	Melbourne, Australien
»	120	Paris, Frankreich
Refraktor	102 cm	Yerkes-Observ., Nordamerika
»	91	Lick Observ., Nordamerika
»	83	Meudon, Frankreich
»	80	Potsdam, Deutschland
»	77	Nizza, Frankreich
»	76	Pulkowo, Rußland
»	76	Allegheny, Nordamerika
»	71	Greenwich, England

[1]) Ausführliche Liste bis 50 cm Öffnung bei H. P. HOLLIS, Large telescopes, „The Observatory" 1914 (1 Zoll = 2.54 cm, 1 Fuß = 0.305 m).

Aus Abschnitt V: **Die Sonne**

Im Jahre 1892 fand C. A. Young, daß einzelne Eisenlinien in den Fleckenspektren doppelt auftreten. Die Angelegenheit wurde späterhin von verschiedenen Astronomen, insbesondere durch S. A. Mitchell, sorgfältig weiter verfolgt und auch noch bei anderen Linien beobachtet, jedoch ursprünglich für eine normale Umkehr gehalten. Genauere um 1908 angestellte Untersuchungen von G. E. Hale ließen jedoch bald erkennen, daß die Ursache der Aufspaltung hier eine ganz andere sein müsse. Es stellte sich nämlich heraus, daß bei genügender Dispersion die Linien der betreffenden Elemente (*Fe, Va, Cr, Ti* u. a.) innerhalb der Flecke teils doppelt, teils dreifach erschienen, und zwar doppelt in der Mitte der Sonnenscheibe, dreifach an ihrem Rande. Es war naheliegend, hier eine magnetische Erscheinung im Sinne des Zeeman-Effektes zu vermuten. Nimmt man an, daß innerhalb der Sonnenflecke Wirbel von Gasen und Dämpfen auftreten, die elektrisch geladen sind, so ist eine Erklärung der Tatsache und der Form der Aufspaltung ohne weiteres gegeben. Durch die Wirbel von freien Ionen oder Elektronen entsteht in dem Flecktrichter wie in einer stromdurchflossenen Spule ein magnetisches Feld. Die Kraftlinien kann man sich dabei als nahe radial von der Sonnenoberfläche aus verlaufend vorstellen. Im mittleren Teil der Sonne liegen sie somit mehr oder weniger parallel zur Blickrichtung, am Rande senkrecht dazu und dementsprechend erfolgt die Teilung der Linien in Dublets bzw. Triplets. Eine Entscheidung darüber, ob ein Zeeman-Effekt besteht oder nicht, läßt sich nur durch Untersuchung des Polarisationszustandes der Linien treffen. Liegt eine magnetische Aufspaltung vor, so müssen bei Trennung in zwei Linien beide entgegengesetzt zirkular polarisiert sein, bei drei Linien die mittlere senkrecht zur Ebene der äußeren. Da auf direktem Wege nur geradlinie Polarisation untersucht werden kann, ist es notwendig, die zirkularen Schwingungen erst in die geradlinigen Komponenten zu zerlegen. Die Beobachtungen können dann in der Weise erfolgen, daß man vor den Spalt des Spektroskops, auf dem das Sonnenbild entworfen wird, ein drehbares Nikol als Analysator setzt und davor ein Fresnelsches Prisma oder noch besser eine Viertelwellenlängenplatte anbringt. Das Fresnelsche Prisma sowohl wie die Viertelwellenlängenplatte verwandeln das zirkular polarisierte Licht in gradlinig schwingendes, das dann durch Drehung des Nikols in der üblichen Weise untersucht werden kann. Um bei der erforderlichen Spaltlänge die Drehung des zusammenge-

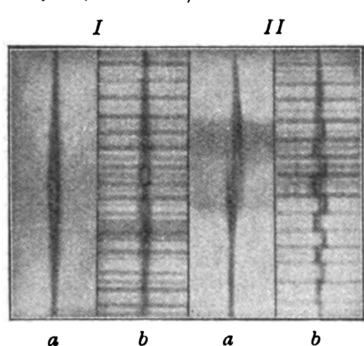


Abb. 6. Anblick der Linie λ 6173 in Sonnenflecken. *I* Rand, *II* Mitte der Photosphäre. *a* direktes, *b* polarisiertes Bild.

setzten Nikols zu vermeiden und den Nachweis der magnetischen Aufspaltung schon in einem einzigen Bilde zu erhalten, wurden schmale Glimmerstreifen von $\frac{1}{4}\lambda$ für die zirkulare und von $\frac{1}{2}\lambda$ für die lineare Polarisation zwischen zwei Deckgläsern so angebracht, daß die optischen Achsen der aufeinander folgenden Blättchen senkrecht zueinander standen und dann vor dem Nikol so orientiert, daß sie den Spalt unter 45° kreuzten. Bei dieser Anordnung läßt das Nikol streifenweise immer nur eine Schwingungsebene durch. Das Spektrum weist dann eine parallele Teilung in der Längsrichtung auf, wobei in den Streifen abwechselnd die rote oder die violette Komponente eines Zeeman-Dublets ausgelöscht oder wenigstens sehr stark geschwächt wird. Denn es ist zu beachten, daß die Blickrichtung nur in Ausnahmefällen genau in die Richtung der Kraftlinien fällt; im allgemeinen wird man also mit mehr oder weniger elliptisch polarisiertem Licht und dadurch mit merklichen Abweichungen von den Idealbedingungen rechnen müssen.

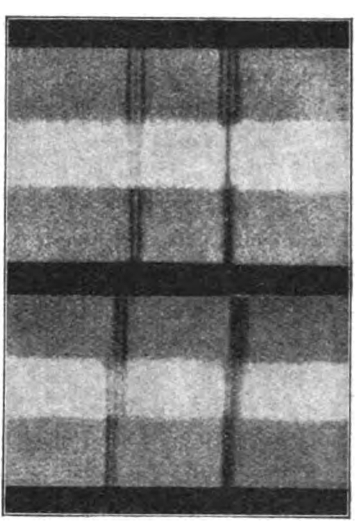


Abb. 7. Magnetische Aufspaltung der D-Linien. Oben senkrecht, unten parallel zum magnetischen Feld.

Den Vorgang selbst veranschaulicht die photographische Aufnahme in Abb. 6, bei der der Spalt einen Fleck am Sonnenrande und ein Fleckpaar im mittleren Teil der Photosphäre kreuzte. Die Bildpaare veranschaulichen den direkten Anblick der gespaltenen Eisenlinie λ 6173 und ihre Untersuchung durch Nikol und ein $\frac{1}{2}\lambda$- bzw. $\frac{1}{4}\lambda$-Plattenpaar. Die aufeinanderfolgenden horizontalen Streifen stellen den Anblick der Linie an den verschiedenen Stellen des Flecks dar. Bei der Polarisation am Sonnenrande, bei der auch die Mittelkomponente auftritt, erhalten auf diese Weise die Linien Ösen-, in der Mitte der Photosphäre Hakenform. Sehr beachtenswert ist das erste direkte Bild des zweiten Paares. Da die beiden eingestellten Nachbarflecke entgegengesetzte Polarität zeigten, ist die Linie in dem einen Falle nach Violett, in dem anderen nach Rot zu aufgespalten.

Zur Bestimmung der Stärke der Fleckenfelder wurde die Trennung einzelner Linien, insbesondere solcher von *Fe*, *Cr* und *Ti* ihrem Betrage nach mit Laboratoriumsergebnissen verglichen. Da wir über die Höhe der Linienabsorptionen, m. a. W. über die Schichtung der Gase über der Photosphäre eine ungefähre Vorstellung besitzen, so lassen sich auf diese Weise Werte der Feldstärke für verschiedene relative Erhebungen ableiten. Die tieferen Schichten ergaben dabei sehr hohe Werte im Betrage bis zu 4500 Gauß bei sehr rascher Abnahme mit der Höhe. Aus 30 Linien verschiedener Schichten wurden bei 250 und 420 km Höhe nur noch Feldstärken von 55 bzw. 10 Gauß erhalten.

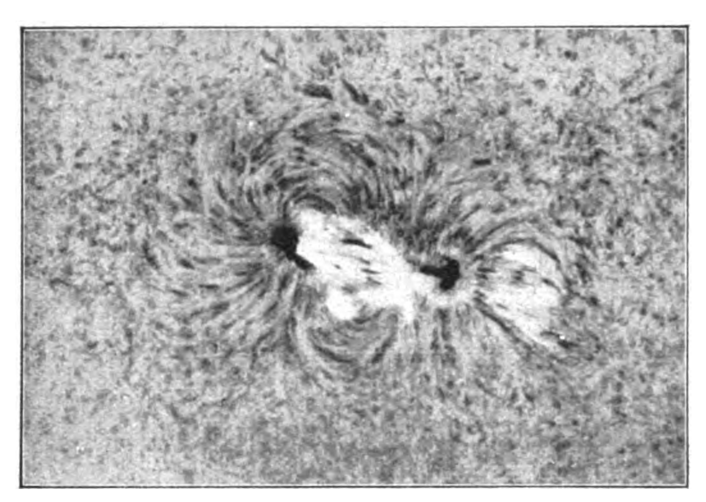


Abb. 8. **Wasserstoffwirbel in einem Fleckenpaar. (Mt. Wilson-Aufnahme.)**

Ein merkliches Herübergreifen dieser Kraftfelder in den Raum oder gar bis zur Erde erscheint danach so gut wie ausgeschlossen.

Die Untersuchung der Polarität bei Fleckengruppen hat gezeigt, daß diese zu 60 % aller Fälle bipolar sind. Der Rest von 40 % entfällt auf unipolare oder komplexe Bildungen. Änderungen des Drehungssinnes bei ein und demselben Fleck kommen nicht vor. Es wurde bereits erwähnt, daß die Sonnenflecke überaus oft als Zwillingsbildungen auftreten. Der magnetische Wirbel im vorangehenden Fleck hat dann fast stets die entgegengesetzte Richtung wie der Wirbel im folgenden. Dieses Verhalten hat HALE auf den Gedanken gebracht, ob es nicht möglich wäre, durch Untersuchung der Umgebung von einzelnen unipolaren Flecken den künftigen Entstehungsherd des Nachbarflecks oder bei einer Gruppenauflösung die letzten Spuren eines solchen über die Sichtbarkeitsperiode hinaus vorwärts bzw. zurück zu verfolgen. Der Versuch, derartige unsichtbare Flecke auf der Sonne festzustellen, ist tatsächlich restlos gelungen. Wenn er auch praktisch von keiner besonders großen Bedeutung ist, so zeigt er doch, mit welcher Folgerichtigkeit HALE die einmal gestellte Aufgabe bis in ihre letzten Konsequenzen hinein klar verfolgt und durchgeführt hat.

Nicht nur für die äußere Erscheinung der Flecke, sondern auch für die Statistik ihrer Periode ist die Verfolgung der magnetischen Polaritäten von Wichtigkeit. Vom ersten Auftreten der Flecke in hohen Breiten beim Beginn eines Zyklus bis zu ihrem Verschwinden in der Nähe des Äquators vergehen, wie wir sahen, etwa 11 bis 12 Jahre. Gegen Ende der Periode treten in der Regel in größeren heliographischen Breiten bereits Flecke des neuen Zyklus auf und es ist dann für alle Untersuchungen und Deutungsversuche wichtig, wenn man die Restflecke der alten Periode von den Vorläufern der neuen scharf zu trennen vermag. In den beiden letzten Minimumepochen 1913 und 1923 hat es sich nun herausgestellt, daß in der vorwiegenden Mehrzahl der

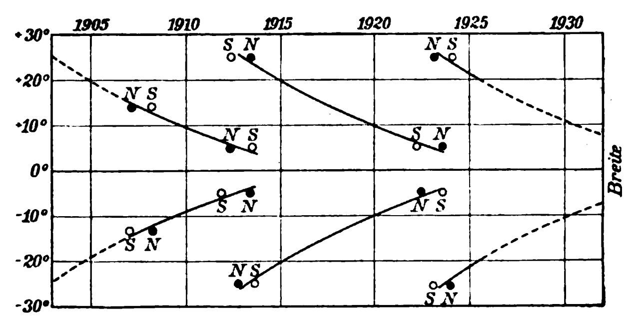
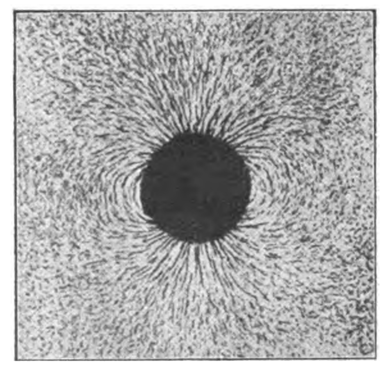


Abb. 9. Gesetzmäßiger Verlauf der Fleckpolarität.

Fälle neben der heliographischen Breite auch der Polarisationssinn der Flecke bei Entscheidung über die Zugehörigkeit einer Gruppe zum vorangehenden oder zum folgenden Zyklus von maßgebender Bedeutung ist. Folgt nämlich auf der Nordhalbkugel einem rechtsdrehenden Wirbel ein linksdrehender, so ist auf der Südhalbkugel mit größter Wahrscheinlichkeit der entgegengesetzte Sinn der Polarität zu erwarten, d. h. es wird hier einem linksdrehenden Wirbel ein rechtsdrehender folgen. Dieser innerhalb eines 11 jährigen Zyklus unveränderliche Zustand erfährt beim Einsetzen der neuen Periode, also nach 11 Jahren, eine Umkehr. Die Neubildungen nehmen dann auf der Nordhalbkugel die bisherigen Eigenschaften der südlichen Flecke an und umgekehrt. Die physikalischen Zustände auf der Sonne, die zu dem Zeeman-Effekt der Flecke Veranlassung geben, haben danach eine doppelt so lange Periode wie die normale Sonnentätigkeit, eine Tatsache, die künftig bei allen Untersuchungen über die Ursache der Sonnenperiode mit berücksichtigt werden muß. In Abb. 9 sind die bisher beobachteten Polaritäten der Fleckenpaare graphisch dargestellt. Sie beruhen auf Messungen an mehreren Tausend Gruppen zwischen 1908 und 1925, von denen nur $2\frac{1}{2}$ % Ausnahmebedingungen zeigten. Die schematischen Fleckdarstellungen entsprechen dem Anblick im nicht umkehrenden Fernrohr, so daß der rechte Fleck als der vorangehende zu betrachten ist.

Schon um 1891 äußerten A. Schuster, Lord Kelvin u. a. die Ansicht, daß jeder rotierende Körper magnetische Eigenschaften zeigen müsse. Schuster und E. Bauer haben daraufhin aus theoretischen Erwägungen heraus die vertikale Intensität des Magnetismus an den Sonnenpolen zu etwa 300 Gauß berechnet. Da ein so großer Betrag die photosphärischen Linien auch außerhalb der Flecke merklich beeinflussen mußte, hat Hale nach einer gründlichen theoretischen Behandlung der Aufgabe durch J. H. Seares auch den Nachweis eines magnetischen Feldes für den Sonnenkörper als solchen zu erbringen versucht. Um Störungen


Abb. 10. Kraftlinien einer gleichförmig magnetisierten Kugel.

durch die Fleckfelder zu vermeiden, sind für derartige Untersuchungen nur die Minima der Sonnentätigkeit verwendbar. Die Aufgabe läuft darauf hinaus, gesetzmäßige Beziehungen zwischen der magnetischen Aufspaltung bzw. Polarisation tiefliegender Absorptionslinien und der heliographischen Lage des eingestellten Photosphärenpunktes festzustellen. Auch diese schwierige Aufgabe ist auf dem Mt. Wilson zu einem glücklichen Ende geführt worden, obwohl die stärksten Verschiebungen der benutzten 26 Linien von fünf Elementen nur etwa $\pm$ 0.002 *AE*, in dem angewendeten Plattenmaßstab des Spektrums III. Ordnung also kaum $\pm$ 0.004 mm betrugen. Die Sonne übt danach tatsächlich nach außen eine Wirkung aus, wie ein rotierender Magnet geringer Feldstärke. Der maximale Betrag an den magnetischen Polen kann zu 50 Gauß, also gleich dem 80fachen Wert des Erdfeldes an den entsprechenden Stellen der Erdoberfläche angenommen werden. Mit der Höhe fällt die Feldstärke, ähnlich wie in den Flecken, außerordentlich stark ab. In 450 km Erhebung über der Photosphäre erlischt sie bereits fast vollständig.

Aus Abschnitt VIII: **Die kosmischen Nebel und Sternhaufen**

Die Grundform der normalen Spiralnebel bilden in der Regel gekrümmte Ströme von Materie, die an zwei gegenüberliegenden Stellen des Kerns ihren Ursprung nehmen und entweder isoliert bleiben, oder sich in mehrere Arme teilen. Mit verschwindenden Ausnahmen umschließen dabei die Windungen Bögen zwischen 90° und 2 · 360° Umfang. Die Gestalt mancher Nebel ist z. T. überraschend regelmäßig. Es braucht nur an so bekannte Fälle erinnert zu werden, wie NGC 628 (M 74) Piscium, NGC 5194 (M 51) Can. ven., NGC. 5457 (M 101) Urs. mai. u. a., deren Ebene nahe senkrecht zur Blickrichtung liegt und einen vollen Einblick in den Verlauf der Windungen gestattet. Auch einige stärker geneigte Spiralen, wie NGC 224 (M 31) Androm. lassen noch Einzelheiten erkennen. In den Spindelnebeln, die, wie erwähnt, als Kantenbilder von Spiralnebeln angesehen werden, verschwindet in der Regel jede Spur einer Struktur. Bei der ungeheuer großen Zahl dieser strichartigen Gebilde erscheint es zunächst unwahrscheinlich, daß sie alle im Aufriß gesehene Spiralen darstellen sollten. Vielleicht ist der Widerspruch aber so zu erklären, daß mit der stärkeren Neigung auch die Lichtstärke dieser Nebel wächst. Da die Strichnebel mit den Spiralen bezüglich

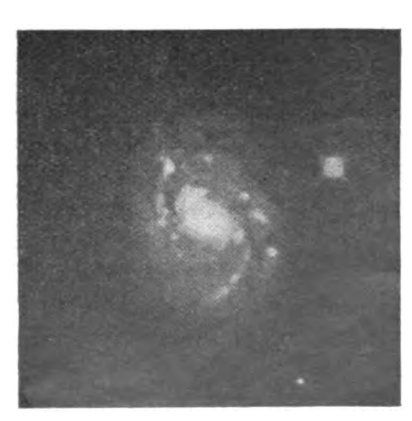


Abb. 11. Spiralförmiger Emissionsnebel NGC 1068 Ceti.

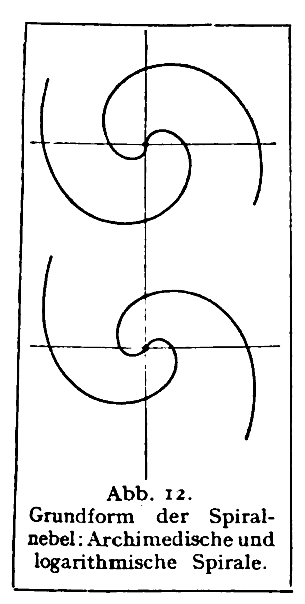


Abb. 12.
Grundform der Spiralnebel: Archimedische und logarithmische Spirale.

ihrer Bewegung, ihrer mittleren Helligkeit usw. vieles gemeinsam haben, liegt zu einer Sonderbehandlung vorläufig kein physikalischer Grund vor. Wie wenig man übrigens berechtigt ist, die Spiralform als eine ausschließliche Eigentümlichkeit der nach ihr benannten Nebel zu betrachten, zeigen die vier oder fünf Fälle, in denen man bei Emissionsnebeln die gleiche Gestalt beobachtet hat. Der hellste derselben ist NGC 1068 Ceti (Abb. 11). Er zeigt im kernnahen Teil, der die Schneckenform des bekannten Planetarischen Nebels im Drachen (NGC 6543) hat, die üblichen Emissionslinien, in der zweifellos spiraligen Hülle ein kontinuierliches Spektrum. In größerer Entfernung ist noch ein lichtschwacher Ring von unbekannten spektralen Eigenschaften erkennbar. Auf der südlichen Halbkugel liegt in der Kleinen Kapwolke ein ausgesprochener Spiralnebel mit Gasspektrum in NGC 346 vor, doch handelt es sich dabei immerhin um Ausnahmen.

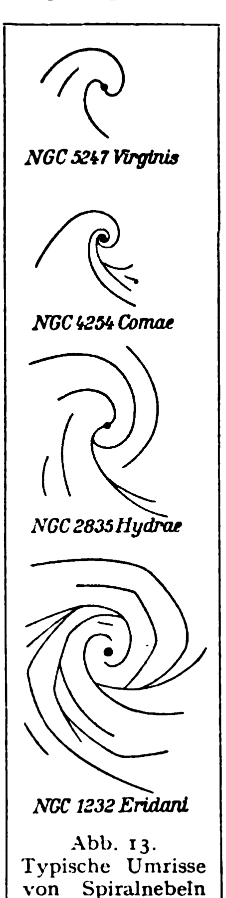


Abb. 13.
Typische Umrisse von Spiralnebeln (n. J. H. Raynolds).

Von einer systematischen Untersuchung der Orientierung der Spiralnebelebenen hat man sich wichtige kosmogonische Aufschlüsse versprochen. Das Ergebnis einer Arbeit von C. C. Gregory, der 362 Spiralen daraufhin untersucht hat, zeigt jedoch keine klaren Gesetzmäßigkeiten. Sicher ist vorläufig nur soviel, daß die Ebenen dieser Nebel, insbesondere der großen, im allgemeinen die parallele Einstellung zur Milchstraße meiden.

Daß die Gestalt der Spiralen wichtige Fingerzeige über die Entstehung dieser Weltkörper zu geben vermag, hat man frühzeitig erkannt. E. v. d. Pahlen und neuerdings H. Groot und J. H. Raynolds haben die Frage genauer untersucht, aber, wie gleich vorausgeschickt werden mag, keine strengeren Gesetzmäßigkeiten gefunden. Für die geneigten Spiralen müssen zum sicheren Erkennen der genaueren geometrischen Form die Bilder erst photographisch auf die Neigung Null umkopiert werden, so daß so gut wie möglich der Eindruck erzeugt wird, als fiele die Blickrichtung senkrecht auf die Spiralebene. Es handelt sich dabei um

eine ähnliche Entzerrung der Projektionsverhältnisse, wie sie z. B. bei topographischen Aufnahmen vom Flugzeug unter Anwendung automatisch arbeitender Apparate ganz allgemein angewendet wird. In Übereinstimmung mit v. d. PAHLEN fand z. B. GROOT, daß sich 17 Arme, die 9 Nebeln angehörten, durch logarithmische Spiralen darstellen lassen. In fünf Fällen könnte ebensogut die archimedische Form vorliegen. Bezeichnet man mit φ den Winkel, den die Richtung nach einem Punkt der Spirale mit der Ab-




Abb. 14. Flockenförmige Spiralnebel NGC 2776 Urs. mai und 4567/68 Virg. (Mt. Wilson-Aufnahme.)

szissenachse bildet, mit r den Mittelpunktsabstand, so werden die beiden Hauptformen der Spiralen durch die Gleichungen

$$r = a\varphi \qquad \text{(Archimedische Spirale)}$$

$$\log r = b - c\varphi \qquad \text{(Logarithmische Spirale)}$$

ausgedrückt, wobei a, b und c konstante Größen sind. Die erste Kurve beschreibt ein Punkt, der sich auf einem um seinen Ursprung gleichmäßig rotierenden Strahl mit gleichförmiger Geschwindigkeit vom Mittelpunkte der Bewegung entfernt; die zweite setzt eine Beschleunigung der Bewegung auf dem Leitstrahl voraus (Abb. 12). Je nach den Annahmen über die Geschwindigkeit der Rotation und der vom Kern aus radial wirkenden Kraft kann man durch den einen oder andern Ausdruck einzelne Windungen der Nebel mathematisch darstellen. Solange über die physische Zusammensetzung der Spiralnebel und ihre Stellung im Raum kein völlig klares Bild vorliegt, hat es freilich wenig Sinn, an die geometrischen, stets nur in roher Näherung zutreffenden Formen irgendwelche weitgehenden Schlußfolgerungen zu knüpfen.

Betrachtet man die Aufnahmen der Spiralnebel etwas genauer, so kann man sogleich zwei Klassen unterscheiden, solche, die auch auf den besten Photographien eine gleichmäßige Nebelform zeigen, und andere, die durch ihre Flockenform Anzeichen einer gewissen Auflösbarkeit verraten. Als Vertreter der ersten Klasse wäre NGC 224 Androm., als Beispiel der zweiten NGC 598 Triang. oder NGC 5457 Urs. mai zu nennen. In NGC 598 konnte G. W. Ritschey 2400, in NGC 5457 über 1000, in NGC 3031 Urs. mai. über 400 helle Knoten zählen, die sich hauptsächlich auf die Außenarme dieser Nebel verteilen. Daß diese Anordnung nicht überall die Regel bildet, ist an NGC4826 Comae (Abb. 1) zu erkennen, wo die Haufenbildung gerade umgekehrt den inneren

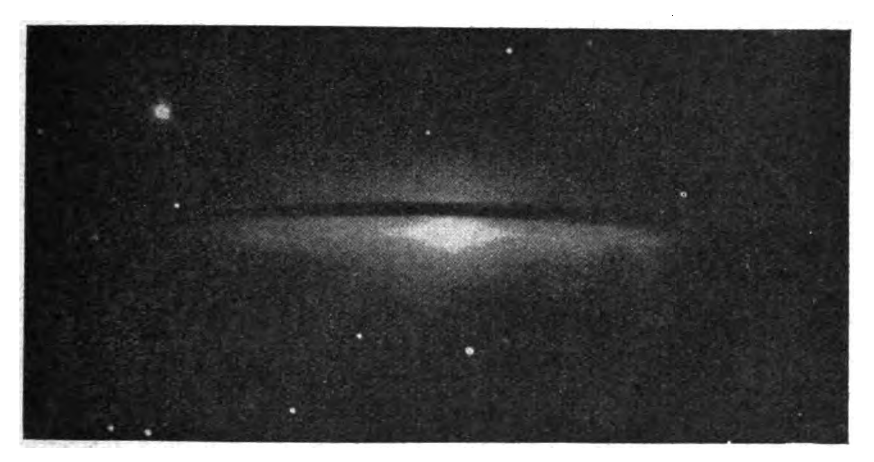


Abb. 15. Spindelnebel mit dunklem Kanal NGC 4594 Virg.

Teil der spiraligen Windungen beherrscht. Die gleichmäßigen Nebel wie die Flockenformen sind gleich oft am Himmel vertreten und anscheinend ohne Beziehung zur Gestalt oder zur Größe der Nebel. In ganz fortgeschrittenen Fällen, womit aber keinesfalls etwa irgendeine wirkliche Entwicklungsphase bezeichnet werden soll, erscheint das ganze Gebilde derart in kleine Nebel zergliedert, daß nur mit Mühe die Spiralform zu erkennen ist (Abb. 14). Bei schräger Lage kommen dann flockige Lanzettformen zustande, die in ihren Umrissen einem Fisch mit glänzenden Schuppen ähnlich sehen, wie das z. B. bei dem ziemlich hellen „Heringsnebel" NGC 4631 Can. ven. der Fall ist. Wegen ihrer seltsamen Form wären noch die stets schwachen Φ-Nebel zu erwähnen; sie zeigen mannigfache Abweichungen in den Umrissen, sind aber zweifellos als echte Spiralen anzusehen.

Eine wichtige schon früher angeschnittene Frage haben noch einzelne Spiralnebel, besonders solche mit stärkerer Neigung aufgerollt. Sie zeigen in der Längsachse dunkle Kanäle, so daß bei strenger Kantenstellung auf den Photographien fast der Eindruck einer Muschel entsteht (Abb. 15). Besonders



auffällige Vertreter dieser Gruppe sind NGC 678, 891, 4282, 4286, 4565, 4594 und 7814. Man hat die dunklen Streifen dieser Nebel früher für einfache Lücken gehalten, ähnlich der Cassini-Spalte beim Saturnring; bei diesem aber erscheinen durch die geometrischen Verhältnisse die Lücken an den Enden der Projektionsellipse am deutlichsten und verschwinden in der Nähe der kleinen Achse, während hier der dunkle Kanal gerade im vorderen durch die Projektion am stärksten verkürzten Teil der Figur liegt. Zweifellos handelt es sich also nicht um Lücken, sondern um nichtleuchtende Nebel- oder Staubwolken, die den äußeren Grenzen der Spiralen vorgelagert sind und eine kräftige Absorptionswirkung hervorrufen. Bei der ungeheuren Zahl der Spiralnebel ließen sich noch mannigfache Eigentümlichkeiten derselben schildern. Die zahlreichen Abbildungen des Textes werden jedoch einen besseren auf eigner Anschauung beruhenden Einblick in die Struktur dieser sonderbaren Weltkörper vermitteln, als dies eine Beschreibung zu tun vermag.

Soweit die bisherigen Untersuchungen reichen, zeigen die Spiralnebel ein kontinuierliches Spektrum mit Absorptionslinien. Danach liegt es nahe, sie als Sternhaufen aufzufassen, bei denen lediglich infolge der gewaltigen Entfernung eine Trennung in einzelne Komponenten unmöglich ist. Daß mit dieser Erklärung alle Schwierigkeiten behoben wären, kann man nicht behaupten. Trotzdem mehren sich von Jahr zu Jahr die Anzeichen, daß die Deutung der typischen Spiralnebel als Sternhaufen zutrifft. Zunächst wäre es natürlich möglich, daß auch die Spiralnebel aus Gasen oder Staubmassen bestünden, die lediglich das Licht von zentralen Sternen reflektieren. Nach J. H. Raynolds würde z. B. der Andromedanebel (NGC 224) einer solchen Annahme entsprechen. Von einer allgemeinen Eigenschaft kann aber keine Rede sein, wie E. P. Hubble nach dem früher geschilderten Verfahren nachgewiesen hat. Die meisten Spiralnebel haben überhaupt keinen Kern, auf den die Beleuchtung zurückgeführt werden könnte. Bei Staub- und Dunstmassen müßten auch unzweideutige Anzeichen ein Polarisation vorliegen, die bisher in keinem einzigen Falle nachzuweisen waren.

Integriertes Spektrum von 33 Spiralnebeln.

NGC	Sp.	NGC	Sp.
221	G 8	3412	F 9
224	G 5	3613	K 6
404	G	3619	K 6
584	G	3623	K 1
936	G	3627	F 1
1023	G	4111	G
1700	G 0	4251	G 4
2681	F 8	4278	F 5
2841	K 0	4494	G 0
2903	F 5	4594	F 5
3031	K 0	4725	G 4
3034	F 2:	4736	G 8
3077	G:	4826	G 5
3368	G	5194	K 3
3377	K 0	5195	G 5
3379	G 8	7331	G:
3384	G 0		

Einführung in die Himmelsmechanik

Von

FOREST RAY MOULTON, PH. D., SC. D.

Professor der Astronomie an der Universität Chicago
Mitglied des Carnegie-Institutes von Washington

Zweite, durchgesehene Auflage

Autorisierte deutsche Ausgabe

von

DR. WALTER FENDER

Mit 62 Fig. im Text. [XIII u. 412 S.] gr. 8. 1927. In Leinen geb. *RM* 20.—

Das durch seine klare und leichtverständliche Darstellung bekannte Werk Moultons bietet eine umfassende Orientierung über das ganze Gebiet der Himmelsmechanik. Der Zweck des Buches machte eine Einführung in das Dreikörperproblem erforderlich. Der Theorie der absoluten Störungen wird ein hervorragender Platz eingeräumt. Ein Kapitel enthält geometrische Betrachtungen über Störungen. Die Grundprinzipien der analytischen Methoden sowie die Methoden von LAPLACE und GAUSS werden mit großer Vollständigkeit erörtert. Die jedem Kapitel angefügte „Geschichtliche Übersicht und Literatur" wird vielen Benutzern sehr willkommen sein.

INHALTSVERZEICHNIS

(Gekürzt)



Aus Kapitel II: Geradlinige Bewegung. (Die Sonnenenergie)

Die Kontraktionstheorie von Helmholtz

Die Arbeit ist proportional zu dem Produkt aus der Kraft und dem Weg, auf welchem sie wirkt. Über die Dauer des Bewegungsvorganges wird nichts ausgesagt; es ist daher ohne Einfluß auf den schließlichen Energiebetrag, ob der Körper den ganzen Weg ohne Unterbrechung fallend zurücklegt oder ob die Zurücklegung mit irgendwelchen Unterbrechungen vor sich geht. Wenn also ein Körper sich zusammenzieht, so läßt sich diese Bewegung für Energiebestimmungen als gleichbedeutend mit einer Aufeinanderfolge aller der Bewegungen betrachten, die die einzelnen Teile des Körpers dabei ausführen, und die darin bestehen, daß alle Teilchen sehr kurze geradlinige Strecken zurücklegen, welche sämtlich nach dem Mittelpunkt des Körpers gerichtet sind. Kennt man daher das Verdichtungsgesetz, so kann man die Wärmemengen berechnen, die bei der Zusammenziehung erzeugt werden.

Bei dem Versuch, die Erhaltung der Sonnenenergie zu erklären, benutzte Helmholtz 1854 diesen Gesichtspunkt zu ihrer Bestimmung. Er nahm dabei an, daß die Zusammenziehung der Sonne in der Weise erfolgt, daß ihre Homogenität erhalten bleibt. Wenn auch diese Annahme sicherlich nicht zutreffend ist, so sind die Ergebnisse dennoch von großem Wert und geben einen recht deutlichen Begriff von den ohne Zweifel tatsächlich vorhandenen Wirkungen der Zusammenziehung. Der mathematische Teil der Theorie findet sich im *Philosophical Magazine* 1856, S. 516.

Wir betrachten eine homogene gasförmige Kugel mit dem Radius R_0 und der Dichte σ. Ihre Masse sei M_0. Ferner sei dM ein Massenelement im Innern oder auf der Oberfläche der Kugel. usw. (folgt math. Entwicklung der Theorie).

Durch Einführung dieser Werte in (53) und Reduktion findet man

$$T = 27\,268\,000^0 \text{ Celsius.}$$

Dieses Resultat besagt also folgendes: *Wenn die Sonne eine Zusammenziehung aus unendlichem Umfang erleidet, wobei ihre homogene Beschaffenheit dauernd erhalten bleibt, so genügt die erzeugte Wärmemenge, um eine Temperaturerhöhung der gleichen Wassermasse von mehr als 27 Millionen Grad Celsius zu bewirken.*

Wenn man annimmt, daß die Zusammenziehung der Sonne nur aus dem Umfange der Bahn des Neptun geschieht, so ergibt Gleichung (52) einen Wert von T, welcher um $\frac{1}{6600}$ kleiner ist. Jedenfalls soll aber nicht gesagt werden, daß ihre Zusammenziehung jemals aus so großen Umfängen in der besonderen angenommenen Weise vor sich ging; die Ergebnisse sind aber trotzdem bedeutsam und werfen sehr viel Licht auf die Frage nach der Entstehung des Sonnensystems aus einem Nebel von unendlicher Ausdehnung. Wenn die Zusammenziehung der Sonne ihre einzige Energiequelle wäre, würden diese Ausführungen zu bestimmteren Anschauungen über die obere Grenze des Alters der Erde führen. Diese Begrenzung ist aber so klein, daß sie sich nicht



mit den Folgerungen verträgt, die sich aus verschiedenen geologischen Gesichtspunkten ergeben; sie widerspricht auch durchaus dem Alter von gewissen Uranium-Erzen, das man aus ihrem Prozentsatz an Blei berechnet hat. Die neuere Entdeckung von gewaltigen subatomaren Energien, welche bei dem Zerfall von Radium und mehreren anderen Substanzen zutage treten, deutet hin auf das Vorhandensein von bisher nicht berücksichtigten Energiequellen; das läßt die Vermutung aufkommen, daß sich der Wärmevorrat der Sonne teilweise oder sogar zum großen Teil aus diesen Quellen ergänzt. Gegenwärtig lassen sich keine bestimmten Grenzen für das Alter der Sonne ansetzen.

Die Beobachtungen von Abbott haben gezeigt, daß, gleiche Sonnenausstrahlung in jeder Richtung vorausgesetzt, durch die jährliche Strahlungswärme die Temperatur einer Wassermasse, die derjenigen der Sonne gleich ist, um 1.44 Grad Celsius erhöht würde. Um daher zu finden, wie groß die Zusammenziehung der Sonne bei ihrem jetzigen Umfang sein muß, damit genügend Wärmemengen erzeugt werden, um die gegenwärtige Ausstrahlung 10000 Jahre zu unterhalten, setze man in (52) den Wert 14400 für T ein und löse nach C auf. Durch Ausführung der Rechnung erhält man

$$C = 1.000528.$$

Dies bedeutet also: ***Die Sonne würde bei der Verkürzung ihres jetzigen Durchmessers um etwa ein Viertausendstel genügend Wärmemengen erzeugen, um ihre gegenwärtige Ausstrahlung 10000 Jahre zu unterhalten.***

Der mittlere scheinbare Sonnendurchmesser beträgt 1924″, also würde eine Verkürzung ihres Durchmessers von 0.000528 eine scheinbare Änderung von nur 1.″0 bewirken; diese Größe ist aber viel zu klein für die jetzigen Beobachtungsmethoden. Benutzt man die üblichen Längeneinheiten, so findet man, daß eine Verkürzung des Sonnenradius um 36.8 Meter jährlich die gegenwärtige Ausstrahlung decken würde.

Die Gleichungen zur Bestimmung von r und ϱ

Wir nehmen das Dreieck mit den Ecken S, E und C. Es bezeichne ψ den Winkel bei E und φ den Winkel bei C. Dann bestehen die Beziehungen

$$(46)\quad \begin{cases} R\cos\psi = X\lambda + Y\mu + Z\nu \\ \varrho = R\dfrac{\sin(\psi+\varphi)}{\sin\varphi}, \\ r = R\dfrac{\sin\psi}{\sin\varphi}. \end{cases}$$

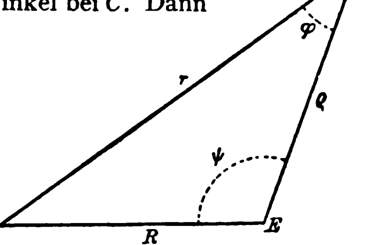


Fig. 32.

Setzt man die Gleichungen (46) in die erste Gleichung (44) ein, so ergibt sich

$$R\sin\psi\cos\varphi + \left[R\cos\psi - \frac{D_1}{D R^3}\right]\sin\varphi = \frac{-D_1}{D R \sin^3\psi}\sin^4\varphi.$$

Zur Vereinfachung setzen wir

$$
(47) \qquad \begin{cases} N \sin m = R \sin \psi \,, \\ N \cos m = R \cos \psi - \dfrac{D_1}{D R^3} \,, \\ \qquad M = \dfrac{- N D R^3 \sin^3 \psi}{D_1} \,, \end{cases}
$$

wo das Vorzeichen von N so zu wählen ist, daß M positiv wird. Mit dieser Festsetzung liefern die ersten beiden Gleichungen eine eindeutige Bestimmung von N und m, und die Gleichung in φ wird einfach

$$
(48) \qquad \sin^4 \varphi = M \sin (\varphi + m) \,,
$$

wo die Größen M und m bekannt sind, und M positiv ist.

Wir betrachten jetzt die Lösung φ der Gleichung (48). Da $\varrho = 0$, $r = R$ eine Lösung des Problems bildet, so folgt aus (46), daß $\varphi = \pi - \psi$ eine Lösung von (48) ist. Diese Lösung bezieht sich jedoch auf den Ort des Beobachters und muß daher ausgeschlossen werden. Derjenige Wert von φ, dem physikalische Bedeutung zukommt, und der existieren muß, wenn die Berechnung auf guten Beobachtungen beruht, genügt, wie aus Figur 32 folgt, der Ungleichung

$$
(49) \qquad \varphi < \pi - \psi .
$$

Die Lösungen von (48) sind gegeben durch die Schnittpunkte der Kurven mit den Gleichungen

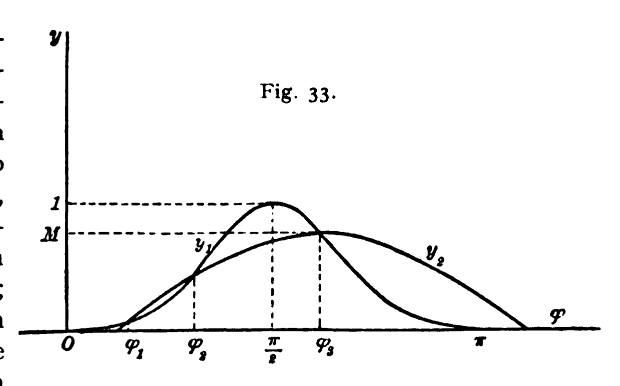
$$
(50) \qquad \begin{cases} y_1 = \sin^4 \varphi \,, \\ y_2 = M \sin (\varphi + m) \,. \end{cases}
$$

Wenn m einen sehr kleinen negativen Wert hat, und M etwas kleiner als eins ist, so besitzen diese Kurven die in Fig. 33 angegebene gegenseitige Lage.

Wir betrachten zunächst den Fall, wo $\frac{D_1}{D}$ positiv ist. Da ϱ und r beide positiv sein müssen, so folgt aus der ersten Gleichung (44), daß in diesem Falle $r > R$ ist. Wegen ψ kleiner als 180^0 ergibt sich aus (47), daß N negativ ist und m dem dritten oder vierten Quadranten angehört.

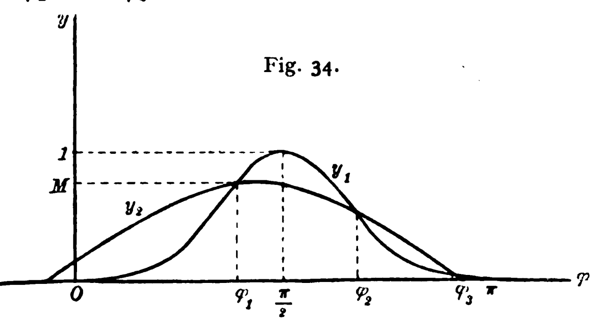
Im Falle m im vierten Quadranten liegt, schneidet der aufsteigende Zweig der Kurve y_2 die φ-Achse beim Übergang in den ersten Quadranten, und man erhält für $M < 1$ die Kurven in der gegenseitigen Lage der Figur 33. Falls m nahezu 360^0 ist, bestehen drei Lösungen φ_1, φ_2 und φ_3, von denen eine gleich $\pi - \psi$ ist und dem Beobachtungsorte entspricht. Im Falle $\varphi_3 = \pi - \psi$ erfüllen φ_1 und φ_2 beide die sämtlichen Bedingungen des Problems, so daß auf Grund der vorliegenden Angaben nicht ent-

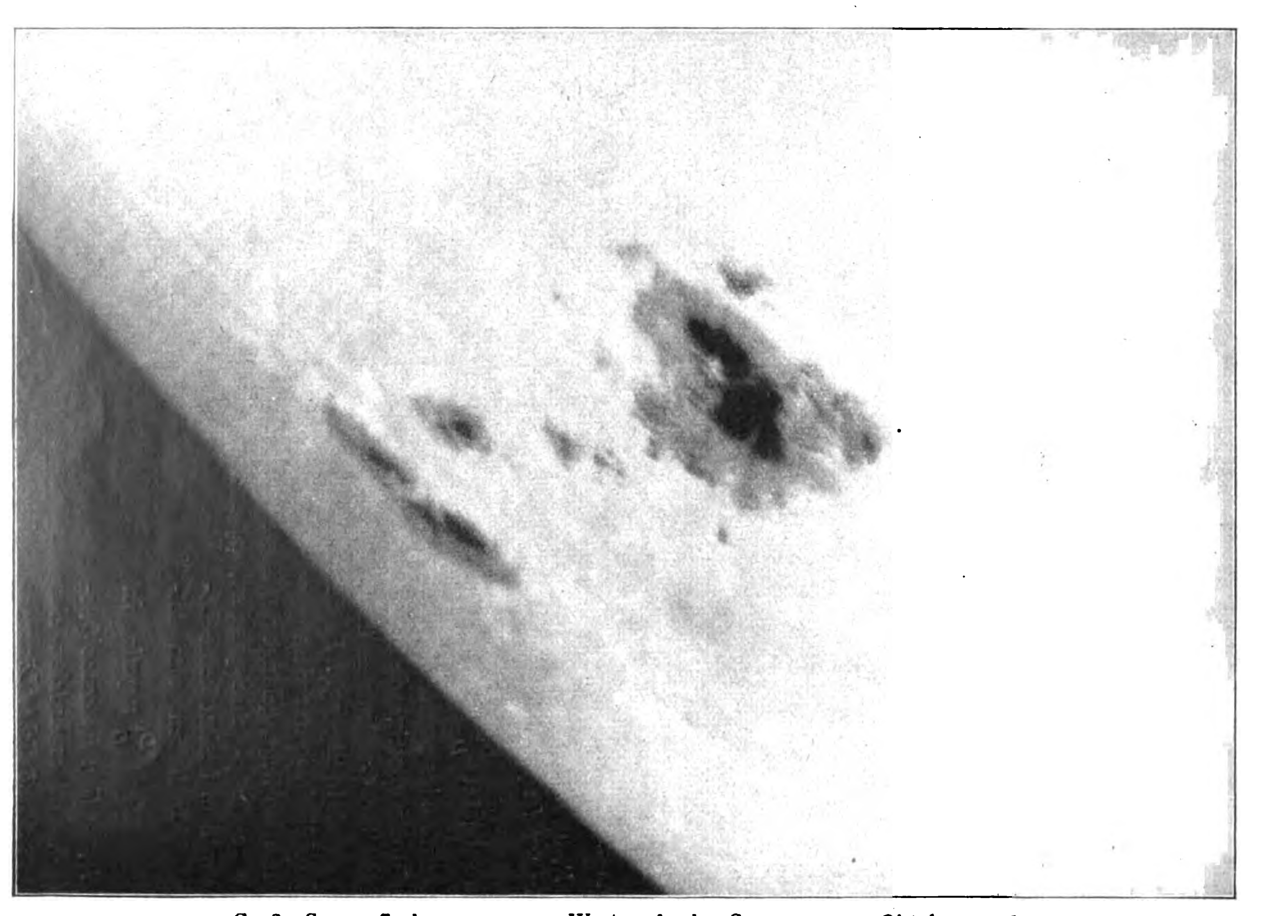
schieden werden kann, welcher Wert sich auf die Bahnkurve des beobachteten Körpers bezieht. Es kann jedoch eintreten, daß man für φ_1 so große Werte r und φ erhält, daß der Körper nach den Erfahrungen der beobachtenden Praxis unsichtbar sein würde; in diesem Falle bestände kein Zweifel darüber, daß der Größe φ_2, welche einen kleineren



Wert r liefern würde, reale Bedeutung zukommt. Für $\varphi_2 = \pi - \psi$ folgt aus (49), daß φ_1 dem Problem angehört. Der Fall $\varphi_1 = \pi - \psi$ kann nicht eintreten, weil dann das physikalische Problem keine Lösung besitzt. Wenn für ein bestimmtes M der aufsteigende Ast der Kurve y_2 nach rechts verläuft, so nähern sich die Wurzeln φ_1 und φ_2 dem Zusammenfallen; geht der aufsteigende Ast weiter nach rechts, so bleibt φ_3 nur noch allein reell. Dieser Fall, welcher dem m im vierten Quadranten weit von 360^0 oder dem m im dritten Quadranten entspricht, würde ebenfalls keine Lösung des physikalischen Problems zulassen. Somit erhalten wir das Resultat: *Wenn* $\frac{D_1}{D}$ *positiv, ist* $r > R$, *m liegt im vierten Quadranten, und es bestehen eine oder zwei mögliche Lösungen des physikalischen Problems, je nachdem* φ_2 *oder* φ_3 *gleich* $\pi - \psi$ *ist.*

Es sei jetzt $\frac{D_1}{D}$ negativ angenommen. In diesem Falle ist $r < R$ und m im ersten oder zweiten Quadranten. Wenn m im ersten Quadranten liegt, so geht der absteigende Zweig der Kurve y_2 beim Schneiden der φ-Achse in den zweiten Quadranten über, und für kleines m und $M < 1$ verlaufen die Kurven wie in Figur 34. In diesem Falle ergeben sich eine oder zwei Lösungen des Problems, je nachdem φ_2 oder φ_3 gleich $\pi - \psi$ ist. Wenn m im zweiten Quadranten liegt, gelangt der absteigende Zweig in den ersten Quadranten, wenn er die φ-Achse passiert, φ_2 und φ_3 sind alsdann nicht reell, und das Problem besitzt keine Lösung. Wir haben also folgendes: *Wenn* $\frac{D_1}{D}$ *negativ, ist* $r < R$, *m liegt im ersten Quadranten, und es bestehen eine oder zwei mögliche Lösungen des physikalischen Problems, je nachdem* φ_2 *oder* φ_3 *gleich* $\pi - \psi$ *ist.*





Große Sonnenfleckengruppe am Westrande der Sonne am 27. Oktober 1926.
(Aufnahme von Dr. Strebel-München.) (Abbildung aus Graff, Grundriß der Astrophysik.)

Druck von B. G. Teubner in Leipzig

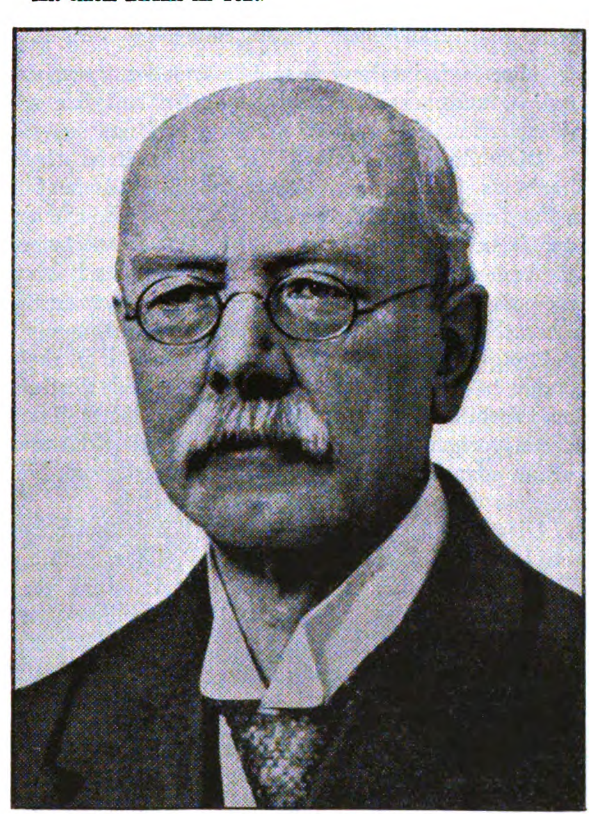
Carl Heinrich Müller zum Gedächtnis.

Zugleich ein Beitrag zur Geschichte des mathematischen Studiums und Unterrichts aus Anlaß der Vierhundertjahrfeier der Universität Marburg.

Von Wilhelm Lorey in Leipzig.

Mit einem Bildnis im Text.

Wenn ich dem am 17. März d. J. verstorbenen Frankfurter Mathematiker Carl Heinrich Müller einen längeren Nachruf widme, so möchte ich diesen zur Ergänzung des schönen Nachrufs, den Herr Flechsenhaar in den Unterrichtsblättern (Jahrgang 1927, Heft 5) veröffentlicht hat, über die persönliche Würdigung hinausgehend als einen kleinen Beitrag zur Geschichte des mathematischen Unterrichts und Studiums angesehen wissen, veranlaßt durch den Heimgang eines trefflichen Fachgenossen, der vielleicht der letzte sachverständige Zeuge einer großen Schultradition war und der seine wissenschaftliche Ausbildung der Universität Marburg verdankt, die im Juli dieses Jahres das vierhundertjährige Bestehen feiert.[1])



Carl Heinrich Müller*)

Geboren am 7. April 1855 in Laurenburg, Kreis Unterlahn, als Sohn eines Volksschullehrers, besuchte Carl Heinrich Müller die Realschule in Dietz

*) Bild entnommen aus dem Stadt-Blatt der Frankfurter Zeitung vom 19. 3. 1927.

1) Biographisches Material für den Nachruf verdanke ich Frau Professor Müller in Frankfurt a. M. sowie dem Provinzialschulkollegium in Kassel, das mir durch liebenswürdige Vermittlung des Herrn Oberschulrat Professor Dr. Zühlke die Personalakten geschickt hat.

und dann von Untersekunda an das Realgymnasium in Wiesbaden, auf dem er im März 1873 mit dem Gesamtprädikat „vorzüglich" die Reifeprüfung bestand.

Es heißt u. a. in dem Zeugnis: „Er zeigt immer bei sehr hohem wissenschaftlichen Interesse rastlos angestrengten Fleiß und wurde daher von der mündlichen Prüfung dispensiert. In der Physik und Mechanik sind seine Kenntnisse in jeder Hinsicht allen Anforderungen der Schule vollkommen entsprechend. In der Analyse einfacher und zusammengesetzter Körper, löslicher sowohl als unlöslicher, hat er sich eine vollkommene Sicherheit angeeignet; auch hat er mehrere quantitative Analysen ausgeführt. Seine Kenntnisse in der theoretischen Chemie sind sehr gut. Er hat sich tüchtige Kenntnisse in der Elementarmathematik sowie in der analytischen Geometrie, in der Differential- und Integralrechnung erworben und besitzt Gewandtheit in der Anwendung dieser Lehren zum Lösen von Aufgaben. In der darstellenden Geometrie ist er bis zur Durchdringung krummer Flächen gelangt; in der linearen Perspektive sowie in der Licht- und Schattenlehre vermag er selbst schwierigere Aufgaben zu lösen. Die Ausführungen der Zeichnung sind vortrefflich."

Aber auch in Deutsch und in fremden Sprachen sind seine Leistungen vorzüglich, und bei der Entlassungsfeier hält der auf den Tag achtzehnjährige Abiturient eine Rede über „Lessing und das deutsche Drama".

Diese Zitate aus seinem Reifezeugnis habe ich hier gebracht, weil sie meines Erachtens über das besondere persönliche Moment hinausgehend einen Einblick in das Lehrziel gewähren, das sich das Wiesbadener Realgymnasium auch unter preußischer Herrschaft bis an das Ende der siebziger Jahre stecken konnte. Das Wiesbadener Realgymnasium, der Stolz des Nassauer Landes, wie es Müller in einem Schreiben vom 24. August 1894 an den Oberpräsidenten der Provinz Hessen-Nassau nannte, „ist geradezu als die Quelle für die erfreulich hohe Entwicklung der darstellenden Geometrie in den rheinischen Provinzen (Hessen-Nassau und Rheinprovinz) anzusehen. Dem vortrefflichen Unterricht, der nach dem Vorbild Traugott Müllers an jener Schule schon seit den vierziger Jahren vorigen Jahrhunderts erteilt wurde, ist es zu danken, daß wir heute sogar an manchen humanistischen Gymnasien der genannten Provinzen die darstellende Geometrie wohlgepflegt finden."[2])

Diesem einstigen Direktor des Wiesbadener Realgymnasiums, Traugott Müller, der über Naumburg und Gotha Anfang der vierziger Jahre nach Wiesbaden gekommen war und jetzt im Juni vor 80 Jahren von der philosophischen Fakultät in Leipzig infolge einer Anregung, die sein dankbarer Schüler August Wiegand Traugott Müllers Studienfreunden, den Leipziger Professoren Fechner und Drobisch gegeben hatte[3]), ehrenhalber zum Doktor

2) Angeführt nach Zühlke, Der Unterricht im Linearzeichnen und in der darstellenden Geometrie an den deutschen Realanstalten. IMUK, III, 3 (1911) S. 12.

3) Vgl. Wiegands für die Geschichte des Schulwesens und der Universität Halle sehr interessanten autobiographischen Skizzen „Wie es mir erging", Halle a. S. 1870, Verlag Louis Neber. Dr. August Wiegand, der nach längerer Schultätigkeit in Naumburg, Halberstadt und Halle Direktor der Lebensversicherungsgesellschaft Iduna geworden ist, hat viele Lehrbücher geschrieben, von denen sein Leitfaden der Planimetrie zu seinen Lebzeiten 17 Auflagen erlebt hat. Die Bücher sind später zum Teil von dem hervorragenden Mathematiklehrer des Hallischen Stadtgymnasiums Dr. h. c. Friedrich Meyer neu herausgegeben worden. Einige Wiegandsche Schriften sind Ergebnisse eines „Arbeits- und Forschungsunterrichts". wie folgende Stelle aus der Autobiographie (S. 200) zeigt: Einige kleinere Schriften verdanken ihre Entstehung meinen Schülern ganz ausschließlich. Die Sache hing so zusammen. Von meinen Stunden in Prima hatte ich eine (es war die zweite Nachmittagsstunde am Dienstag) ganz unbestimmten Zwecken gewidmet. Ich überließ es nämlich den Schülern,

promoviert worden war, hat C. H. Müller eingehende historische Studien gewidmet, von denen u. a. eine in dieser Zeitschrift erschienene Abhandlung (42. Jahrg. 1911, S. 265) zeugt. C. H. Müllers Lehrer in Mathematik war Unverzagt, ein Schüler Traugott Müllers, der in der Geschichte der Quaternionen mit zu nennen ist, der aber auch als Lehrer hervorragend gewesen ist; insbesondere hat er auch die Geschichte der Mathematik im Unterricht berücksichtigt, indem er z. B. mit den Schülern „Éloges" der Pariser Akademie im Urtext oder der Hankelschen Übersetzung las, in dieser Berücksichtigung des Historischen auch Traugott Müller folgend, der in seinen Mathematikbüchern schon vielfach geschichtliche Exkurse gebracht hatte.

Müller bezog die Universität Marburg, wo er bald ein besonderer Schüler des Physikers Melde[4]) wurde. Dadurch entstand schon in seinem zweiten Semester eine „Untersuchung über die Tonhöhen der Transversalschwingungen poröser Gipsstäbe, wenn dieselben mit verschiedenen tropfbaren Flüssigkeiten getränkt sind". Sie erschien 1875 in den Berichten der Marburgischen naturforschenden Gesellschaft und gleichzeitig auch in Band 155 der Annalen der Physik. Die Fortsetzung der akustischen Arbeiten ließ in seinem 7. und 8. Semester eine als Preisschrift von der Marburger philosophischen Fakultät gekrönte Arbeit entstehen „Untersuchungen über einseitige freischwingende Membranen und deren Beziehungen zum menschlichen Stimmorgan" (Schriften der Marburger Gesellschaft Bd. 11).[5])

Das Interesse an akustischen Problemen hat Müller auch im Amt noch zu manchen öffentlichen Vorträgen und Veröffentlichungen geführt. Es handelt sich dabei insbesondere um die sogenannte Doppelstimmigkeit. Mathematik betrieb Müller bei dem von 1841 bis 1884 an der Universität wirkenden Ludwig Stegmann, der nach Müllers und anderer Urteil ein ausgezeichneter Dozent war, wie ich gern bei dieser Gelegenheit zur Ergänzung der Stellen über Marburg in meiner IMUK-Abhandlung erwähne.[6]) Gewiß hat C. H. Müller

---

was wir treiben wollten. Natürlich mußten sie schon vorher nachdenken, damit sie auch etwas Vernünftiges aufs Tapet bringen konnten. Manchmal schlug ich auch selbst etwas vor, doch geschah dies schon seltener. Diese Nachmittagsstunde war diejenige, auf die wir uns am meisten freuten. Gewöhnlich verlangte ich nur, daß irgendein geometrisches Gebilde in Vorschlag gebracht werden sollte, welches dann nach allen Seiten hin möglichst erschöpfend behandelt wurde. Natürlich beschäftigte uns ein einziges Thema oft mehrere Stunden hintereinander. Aus diesen Übungen ist beispielsweise meine Schrift „Die merkwürdigen Punkte des Dreiecks" (2. Aufl. 1848) hervorgegangen. Ein Schüler schlug nämlich vor, dasjenige gleichschenklige Dreieck zu untersuchen, worin die vier merkwürdigen Punkte harmonische Punkte seien. Dieser Gedanke rief eine sechs Bogen starke Schrift hervor, in welcher eine Menge der interessantesten Beziehungen am Dreieck niedergelegt sind. Es entstanden auf gleiche Weise die Schrift „Ein mathematisches Thema aus der Schule", das Programm „Mathematische Kleinigkeiten", die Broschüre „Der allgemeine goldene Schnitt".

4) Seinem Lehrer Melde hat Müller auch einen Nachruf gewidmet. Berichte des freien Deutschen Hochstifts zu Frankfurt a. M. 1901.

5) Die öffentliche Bekanntgabe des Urteils über die Arbeit bei der Kaisergeburtstagsfeier der Universität am 22. März 1878 war für Müller eine ganz besondere Freude, da gleichzeitig auch sein Leibfuchs aus der Burschenschaft Arminia den medizinischen Preis bekam.

6) W. Lorey, Das Studium der Mathematik an deutschen Universitäten seit Anfang des 19. Jahrhunderts. IMUK III, 9, S. 200. — Friedrich Ludwig Stegmann, geb. 1813 (nicht 1808, wie irrtümlich in IMUK a. a. O. steht) in Frankfurt a. M., hat in Mathematik und Medizin promoviert. Er wurde 1837 Lehrer am Gymnasium in

recht, wenn er sagt, daß die Studenten für ihre spätere Tätigkeit als Schulmathematiker von dem damaligen Marburg viel mitbekommen haben; es verdient besonders erwähnt zu werden, daß Stegmann auch darstellende Geometrie las.

Andererseits muß ich aber auch mein Urteil aufrecht erhalten, daß das mathematische Niveau in Marburg ziemlich niedrig war, bis 1884 Heinrich Weber dort seine Tätigkeit begann: Das Niveau, gemessen an der allerdings überspannten Prüfungsordnung von 1866, wonach „für den mathematischen Unterricht in den oberen Klassen nur die Candidaten befähigt zu erachten sind, die sich in der Prüfung als ausgebildete Mathematiker zeigen und in die höhere Geometrie, die höhere Analysis und analytische Mechanik soweit eingedrungen sind, daß sie auf diesen Gebieten eigene Untersuchungen mit Erfolg anstellen können".

Wie verschieden übrigens an den einzelnen Universitäten diese von der Königsberger Tradition geprägte Prüfungsordnung ausgelegt wurde, zeigen die Zeugnisse, die ich aus jener Periode in meiner ersten IMUK-Abhandlung veröffentlicht habe.[7]) Zur Ergänzung sei hier aus dem am 16. November 1877 ausgestellten Zeugnis ersten Grades, durch das C. H. Müller die Lehrbefähigung in Mathematik, Physik und Chemie für alle Klassen sowie philosophische Propädeutik für Prima bekam, das Urteil über Mathematik und Physik angeführt:

In der Mathematik waren die Antworten des Kandidaten auf einige Fragen aus der elementaren Stereometrie genügend, und auf die Fragen aus der analytischen Geometrie des Raumes, aus der Integralrechnung und theoretischen Mechanik fast durchgängig recht gut; in der Physik waren die Antworten auf Fragen aus der Optik, der Elektrizität und Magnetismus durchweg sehr gute, einige Fragen aus der praktischen Astronomie beantwortete der Kandidat vollkommen befriedigend.

Daß Astronomie überhaupt geprüft wurde, erscheint besonders interessant, weil diese aus der Prüfungsordnung von 1866 ganz verschwunden war im Gegensatz zur Preußischen Prüfungsordnung von 1831. Zu einer Beschäftigung mit praktischer Astronomie war Müller schon in seinen letzten beiden Studienjahren veranlaßt worden, da er in dieser Zeit Assistent am mathematisch-physikalischen Institut und an der Sternwarte gewesen war.[8])

Marburg, habilitierte sich dort 1840, bekam 1845 ein Extraordinariat und wurde 1848 Ordinarius. Seine wissenschaftliche Bedeutung dürfte wohl wesentlich in seinem Lehrbuch der Variationsrechnung (Kassel 1854) liegen, das auch von Kneser in dem Artikel „Variationsrechnung", Encyklopädie der Math. Wiss. II 1, 1 S. 577, wegen des im „Grund ausreichenden Beweises für die notwendige Bedingung des Extremums" zitiert wird. (Irrtümlich steht aber a. a. O. Stegemann, während vorher S. 572 im Literaturverzeichnis der Name richtig angegeben ist.) Wie schon in IMUK a. a. O. erwähnt, hat der bekannte englische Physiker Tyndall bei Stegmann gehört und ihn in seinen Erinnerungen an Marburg als einen ganz ausgezeichneten Lehrer gerühmt. Die ausführlichen Ausführungen über Stegmann sind in der Zeitschrift „Hessenland" (5. Jahrg. 1891, S. 179) abgedruckt, worauf mich der jetzige Redakteur des Poggendorffschen Biographisch-Literarischen Handwörterbuches, Paul Weinmeister, Leipzig, aufmerksam gemacht hat. Herr Weinmeister, der bei Stegmann promoviert hat, schildert ihn mir auch als einen sehr geschätzten gründlichen Universitätslehrer, der immer wieder darauf hinarbeitete, daß seine Hörer auch das Vorgetragene wirklich verstanden, was er in den Übungen am Sonnabend feststellte.

7) W. Lorey, Staatsprüfung und praktische Ausbildung der Mathematiker an den höheren Schulen in Preußen und einigen norddeutschen Staaten. IMUK I 3, S. 29—36.

8) Das 1842 errichtete Mathematisch-physikalische Institut, dessen erster Direktor Gerling, ein Schüler von Gauß, es eine „der großartigsten Einrichtungen in

Am 1. Januar 1878 trat Müller sein Probejahr an seinem geliebten Wiesbadener Realgymnasium an, wo er noch als Hilfslehrer bis zum Herbst 1879 blieb. Es waren Jahre schwerer Konflikte an dieser Schule. Handelte es sich doch um die Frage, ob das Wiesbadener Realgymnasium seinen bewährten nassauischen Charakter beibehalten sollte, oder ob das Lehrziel in den mathematischen und naturwissenschaftlichen Fächern entsprechend den Lehraufgaben der anderen preußischen Realgymnasien zu reduzieren sei. Der Provinzialrat, dem die Schule unterstellt war, wollte die Angleichung und wurde darin sehr von dem Mathematiker unterstützt, dem der Unterricht in den höheren Klassen jetzt übertragen war, als Nachfolger Unverzagts, der inzwischen das Direktorat der Wiesbadener Oberrealschule bekommen hatte. „Es war ein ältlicher Gymnasialmathematiker, der in den in Prima zu behandelnden Gebieten nicht sattelfest war und daher versuchte, Schule und Schüler auf den Standpunkt der alten Gymnasialmathematik herunterzuschrauben", wie Müller in seinem sehr interessanten Beitrag zum Jubiläumsband dieser Zeitschrift „Mathematische Wanderungen und Wandlungen in der Provinz Hessen-Nassau" sagt.[9]) Selbstverständlich stellte sich auch der junge Probekandidat auf die Seite der Verteidiger des bewährten alten Systems, seiner einstigen Lehrer in Chemie und Physik: Ferdinand Henrich und August Schmidt[10]), denen er auch in dieser Zeit einen Nachruf gewidmet hat. Zum 1. Oktober 1879 wurde C. H. Müller als wissenschaftlicher Hilfslehrer an das Gymnasium in Hadamar versetzt, wo er am 1. Juli des folgenden Jahres ständig wurde[11]) auf Grund eines sehr günstigen Berichts des Gymnasialdirektors, der sein ungewöhnliches Lehrgeschick und seine volle Sicherheit in der Behandlung des Stoffes hervorhebt.

„In gewinnender Weise verkehrt er mit den Schülern, und in der Handhabung der Disziplin, die ihm gar keine Schwierigkeit bereitet, weiß er mit pädagogischem Takt zu verfahren."

Ganz ähnlich hat auch schon vorher der Wiesbadener Direktor über den Probekandidaten Müller geurteilt. Müllers Lehrtätigkeit in Hadamar erstreckte sich auf die unteren und mittleren Klassen, in denen er auch Lateinisch, Französisch und Geographie zu geben hatte. Der mathematische Unterricht in den oberen Klassen wurde von einem Mann mit sehr kleinen Zielen beherrscht, wie Müller sagt. In den Hadamarer Jahren wurde die mathematische Dissertation vollendet, auf Grund deren Müller im August 1880 in Marburg promovierte. Diese 1880 auch im Jahresbericht des Gymnasiums Hadamar (Progr.

Deutschland" nannte, besaß einen Arbeitsraum für praktische Geometrie, der auch von Studenten benutzt wurde, die sich Apparate zeichnen wollten; ferner einen astronomischen Beobachtungsturm, der aber lediglich als Übungssternwarte benutzt wurde, dadurch aber gerade für die in den höheren Schuldienst übertretenden Studenten der Mathematik natürlich sehr nützlich war. An vielen Universitäten fehlte — und fehlt heute noch — eine derartige Einrichtung. Ein anderer Frankfurter Mathematiker, Israel Holzwart, hat daher schon 1884 Übungssternwarten gefordert, für die 1907 auf Veranlassung von Felix Klein der damalige Göttinger Astronom Karl Schwarzschild eintrat. Vgl. Lorey, IMUK III, 9. S. 200 u. 257.

9) Diese Zeitschrift Bd. 50 (1919) S. 27ff.

10) Diese Zeitschrift Bd. 47 (1916).

11) Als Realgymnasialabiturient hätte er nach den damaligen Bestimmungen nur an Real- oder höheren Bürgerschulen angestellt werden können, eine Einschränkung, die auch ausdrücklich auf seinem Staatsprüfungszeugnis vermerkt ist. Ausnahmsweise hatte der Minister aber die Anstellung genehmigt



Nr. 330) veröffentlichte, 25 Seiten umfassende Arbeit führt den Titel „Über barytrope und tautobaryde Curven, eine historische Studie aus der analytischen Mechanik". Es handelt sich hierbei um ein bei Johann Bernoulli auftretendes Problem der Bewegung eines Punktes, für den der aus Schwerkraft und anderen Kräften hervorgehende Druck ein bestimmtes Gesetz befolgt. Müller gibt zunächst an der Hand der Quellen (Bernoulli, Marquis l'Hospital, Parent, Varignon, Euler) eine auch heute noch lesenswerte historische Darstellung und behandelt dann einige noch nicht erledigte Sonderfälle. Den Namen für die Kurven entnimmt er der Arbeit des Engländers Peirce über dieses Gebiet der Mechanik. Mit Recht sagt Müller, daß dieses Quellenstudium eine Fundgrube merkwürdiger und ergiebiger Aufgaben erschließt, deren Behandlung nicht allzu schwierig erscheint. Den Nutzen des Studiums älterer in Akademieberichten vergrabener mathematischer Veröffentlichungen oder der wissenschaftlichen Korrespondenzen betont übrigens gelegentlich auch Weierstraß in seiner Rektoratsrede von 1870.[12])

In Hadamar gründete Müller auch seinen Hausstand durch die Heirat mit der Tochter Johanna des Prorektors am Gymnasium in Kassel, Professor Dr. Weber.

Ostern 1883 ging sein Wunsch in Erfüllung, an eine Schule zu kommen, wo er mathematischen Unterricht in oberen Klassen geben konnte; er wurde an das Gymnasium zu Fulda versetzt, wo nach nahezu fünfzigjähriger Tätigkeit Professor Gies in den Ruhestand getreten war. Gies hat nicht viel publiziert, aber in seiner langen Lehrtätigkeit, wie Müller rühmend betont, einen hervorragenden Einfluß ausgeübt, und so fand Müller dort eine gute mathematische Tradition vor, auf Grund deren er seine ersten Versuche machen konnte, neue Wege im mathematischen Unterricht am humanistischen Gymnasium einzuschlagen.

Damals entstanden auch seine ersten pädagogischen Veröffentlichungen. In Band XVII dieser Zeitschrift (S. 510) schreibt er über den Unterricht in Mineralogie und Chemie in preußischen Gymnasien. In der wohl längst eingegangenen Zeitschrift „Gymnasium" (Verlag F. Schöningh in Paderborn) VI. Jahrg. 1888 S. 218f. tritt er für die „bildliche Darstellung arithmetischer Größen" ein, insbesondere die graphische Darstellung der Funktion x^2, $\sqrt{x}$, $\log x$, Dinge, die damals in der Schulmathematik noch fast unbekannt waren.

Aus seinem physikalischen Unterricht erwuchs eine Arbeit „Über eine Erweiterung des Archimedischen Prinzips" in der auch nicht mehr bestehenden „Zeitschrift zur Förderung des physikalischen Unterrichts", herausgegeben vom Physikalisch-technischen Institut Lisser und Benecke in Berlin (3. Jahrg. 1886 S. 233—236). Es handelte sich um die richtige Deutung des bekannten hydrostatischen Versuches von der Gewichtsvermehrung, die eine Wage anzeigt, wenn in ein im Gleichgewicht befindliches Gefäß mit Wasser ein Körper, ohne die Wände zu berühren, eingetaucht wird.

Gern erinnert Müller sich der Zeit in Fulda, wo er sich natürlich auch außerhalb der Schule durch naturwissenschaftliche Vorträge im Gewerbeverein betätigte, wie vorher schon in Hadamar. Wenn er sich bemühte, doch bald fortzukommen, so trugen die üblen Gehaltsverhältnisse schuld: der berüchtigte Stellenetat. Freudig griff er daher zu, als ihm für Ostern 1888 die Stelle des

12) Karl Weierstraß, Mathematische Werke Bd. 3. S. 333.

ersten Mathematikers an dem damals eröffneten ersten staatlichen Gymnasium, dem Kaiser-Friedrich-Gymnasium, in Frankfurt a. M. angetragen wurde. Und so schreibt er einige Wochen nach seiner Übersiedlung nach Frankfurt in einem Brief vom 23. Mai 1888 an den ihm stets wohlgesinnten Dezernenten im Provinzialschulkollegium Geheimrat Lahmeyer:

„Nachdem ich nunmehr einige Zeit am hiesigen Kaiser-Friedrich-Gymnasium tätig gewesen bin, drängt es mich, Ew. Hochwohlgeboren meine innigste Dankbarkeit nochmals für die außerordentliche Güte darzubringen, die ich in meiner Versetzung hierher immer mehr erkenne. Ein tüchtiger Direktor, wackere Kollegen, gutartige Schüler, musterhafte Einrichtungen, geistig hervorragender Verkehr in einer großartigen Stadt mit kräftig entwickeltem Schulwesen —, das ist ein Zusammenspiel, welches sich nur zum schönsten Wohlklang vereinigen kann."

In Frankfurt konnte nun Müller bald anfangen, dem mathematischen Unterricht an seinem Gymnasium eine besondere Prägung zu geben, die ihm einen dauernden Platz in der Geschichte des mathematischen Unterrichts sichert. Mit Genehmigung der Behörde führte er die Projektionslehre in Prima ein, worüber er sich in zahlreichen Vorträgen und Veröffentlichungen ausgesprochen hat. Besonders möchte ich hier seine im Jahre 1893 im Jahresbericht erschienene Programmarbeit „Stereometrische Konstruktion" erwähnen wegen ihrer vielen historischen Erinnerungen. Sie ist unmittelbar durch einen Aufsatz des Tübinger Professors der Mathematik A. v. Brill veranlaßt, der am 27. Januar 1891 in der Allgemeinen Zeitung unter dem Titel über „Projektionslehre am Gymnasium, ein Glied des Reformwerkes in Bayern" stand. Zehn Jahre später erschien als selbständiges Buch der Leitfaden der Projektionslehre (Leipzig, B. G. Teubner). Auf dem Titel ist Presber als Mitarbeiter bezeichnet; das Buch ist aber von Müller, wie er in dem von ihm angelegten Verzeichnis seiner Veröffentlichungen bemerkt, von ihm allein geschrieben; Presber hat es nur begutachtet. Müllers Neigung, die Mathematik praktisch anzuwenden, ließ ihn auch einen energischen Vorkämpfer für vierstellige Logarithmen werden, auch hier getreu den Traditionen Traugott Müllers. Ebenso energisch trat er aber auch in Wort und Schrift für den Rechenschieber ein und hat u. a. recht brauchbare Stellenwertsregeln für das Stabrechnen gegeben.[13]) Jahrelang hat er nebenamtlich an der Gewerbeschule zu Frankfurt mathematischen Unterricht erteilt. An dem wissenschaftlichen Leben in Frankfurt a. M., das dort lange vor der Gründung der Universität in hoher Blüte stand, nahm er regen fördernden Anteil. Ihm ist es auch ganz wesentlich zu verdanken, daß die mathematische Literatur in der Frankfurter Stadtbibliothek, die seit über hundert Jahren vollständig vernachlässigt worden war, wieder auf Grund besonderer Bewilligungen angeschafft werden kann. An den vom Physikalischen Verein veranstalteten Fortbildungskursen war Müller auch wiederholt aktiv beteiligt. Im Philologenverein seiner Provinz nahm er eine sehr angesehene Stellung ein. Auch in allgemeinen Sachen seines Standes war er wiederholt literarisch tätig.

Er war ein eifriges Mitglied des großen Presbyteriums der deutschen evangelisch-reformierten Gemeinde zu Frankfurt a. M. und mit unermüdlicher Begeisterung wirkte er als aktiver Sänger und Archivar des altberühmten Cäcilienvereins, eines gemischten Chores, mit. Mit besonderer Liebe hing er an dem Taunusstädtchen Eppstein, das ihm zur Heimat geworden war. Im Eppsteiner

13) Zum Beispiel in dieser Zeitschrift Bd. 38 (1908) S. 526.



Altertumsverein hat er wiederholt Vorträge gehalten. Am 1. April 1921 trat Müller in den Ruhestand auf Grund des Abbaugesetzes. Geistig tätig bis zuletzt trotz mancher Sorgen, die die letzten Jahre besonders ihn bedrückten, hat er noch mancherlei aus dem Gebiet der Musikgeschichte u. ä. veröffentlicht. Ein Verzeichnis seiner mathematisch-physikalischen Arbeiten findet sich in Poggendorff Bd. IV und V.

Die Prophezeiung im amtlichen Bericht über den Wiesbadener Probekandidaten Müller, daß er einst „zu den besseren Lehrern der Mathematik in der Provinz gehören werde", ist gewiß glänzend in Erfüllung gegangen. In der Geschichte des mathematischen Unterrichtes wird der Name Carl Heinrich Müller einen ehrenvollen Platz einnehmen.

Nachtrag bei der Korrektur. Der in Anmerkung 6 erwähnte Redakteur von Poggendorff V Oberstudienrat i. R. Professor Dr. Paul Weinmeister ist am 19. August 1927 in Leipzig im Alter von 71 Jahren plötzlich gestorben. Ein Nachruf erscheint in den Unterrichtsblättern.

Die in der Anmerkung 8 erwähnte Frage der Ausbildung in Astronomie ist, wie ich durch Herrn Dr. h. c. Osten (Leipzig) erfuhr, auf einer Astronomieversammlung in Göttingen im Juli d. J. behandelt worden. Die Erinnerung an frühere Verhandlungen über diese Angelegenheit ist, wie mir Herr Prof. Dr. Kopff (Astronomisches Recheninstitut, Berlin-Dahlem), dem ich darüber schrieb, bestätigt, fast ganz verloren gegangen. Es ist aber gewiß ein ganz wesentlicher Fortschritt, daß die Erkenntnis der Wichtigkeit eines geregelten astronomischen Unterrichts für künftige Mathematiker der höheren Schulen in Astronomenkreisen, wie mir Herr Kopff schreibt, fast ganz allgemein geworden ist.

Beitrag zur arbeitsunterrichtlichen Gestaltung der Proportionenlehre.

Von Fr. Drenckhahn in Bremen.

Mit 17 Figuren im Text.

Im Geometrieunterricht der U III habe ich häufig die Beobachtung gemacht, daß bei der Streckenteilung im Anschluß an die Mittellinie des Trapez einige Schüler zunächst so verfahren, daß sie die gegebene Strecke AB und einen Strahl mit dem Anfangspunkt C beliebig zeichnen, auf letzterem gleiche Strecken abtragen und nun der Meinung sind, daß Parallelen zu der Verbindung der beiden Endpunkte A und C durch die Punkte gleichen Abstandes $D, E, \ldots$ die gegebene Strecke AB in gleiche Abschnitte teilen. Diese Lösungsversuche veranlaßten mich im Unterricht die Lehre von den Parallelen auszubauen und mehr als bisher üblich in den Vordergrund zu rücken, insbesondere das (bei Euklid fehlende) Trapez als besondere Figur zu streichen. Wohl nenne ich den Namen der Figur, lasse aber die Sätze anders formulieren. Diese Art der Darstellung gewährt dann die Möglichkeit, die Kapitel der Streckenteilung, Proportionalität von Strecken, arithmetischen Proportionen und Regeldetri von einem einheitlichen Gesichtspunkte aus zu betrachten und leicht zur Ähnlichkeit der Figuren überzuleiten, sie leistet, wie schon aus der Aufzählung hervorgeht, einer in Richtung der Konzentration gehenden Betrachtungsweise Vorschub, gibt zu vernünftiger Rechentätigkeit und funktionalen Überlegungen Anlaß und läßt eigenen „Forschungsversuchen" der Schüler weitesten Spielraum. In erster Linie sind solche geometrischen Stoffe zu mehr oder minder selbständiger Erarbeitung geeignet, die auf Messungen, Tabellenbildungen und schließlich arith-

metisch faßbare funktionale Abhängigkeiten führen. Es ist eben so, daß die arithmetischen Resultate auf die geometrischen Überlegungen und die geometrischen Veranschaulichungen auf die arithmetischen Entwicklungen befruchtend einwirken. Das selbst von schwächeren Schülern und Schülerinnen gezeigte Interesse, ihr Hervordrängen mit eigenen, weiterführenden Ergebnissen und nicht zum Mindesten der wirkliche positive Erfolg veranlassen mich, meinen Unterrichtsgang kurz zu skizzieren.

Die Sätze werden in der Formulierung und Reihenfolge gegeben, wie sie von den Schülern gefunden wurden. Was die Strenge der Entwicklungen und die Systematik des erarbeiteten Gebietes angeht, so hebe ich ausdrücklich hervor, daß weder die erreichte Strenge noch die Vollständigkeit des Systems ein wissenschaftliches Glaubensbekenntnis für den Lehrer abgeben können, diese vielmehr in direkter Abhängigkeit zur Höhe der Klassenintelligenz stehen und im allgemeinen unterhalb einer bestimmten Grenze sich bewegen müssen, wenn ein gedeihlicher und fruchtbringender Unterricht möglich sein soll. Wenn bei der Behandlung des Trapezes (U III) die Eigenschaften dreier äquidistanter Parallelen herausgearbeitet werden, so ist die für die Streckenteilung und Proportionalität von Strecken (Ende O III oder Anfang U II) nötige Verallgemeinerung auf $(n+1)$ Parallelen nicht schwierig und wird zur Selbstverständlichkeit. — Ich weise darauf hin, daß in einigen modernen Lehrbüchern bereits Ansätze in dieser Richtung sich vorfinden, die aber immer nur solche geblieben sind. — Es empfiehlt sich, für die Zeichnungen Millimeterpapier oder Nestlers Zeichenfünfeck[1]) zu benutzen.

1. *Definition:* Zwei parallele Geraden haben stets denselben Abstand. (D. h. zwei Senkrechte zwischen Parallelen sind gleich. Rechteck.)

2. *Definition:* Zwei Strecken, deren Endpunkte auf zwei Parallelen liegen, bestimmen ein Trapez, Parallelogramm, Dreieck oder überschlagenes Trapez.

3. *Lehrsatz:* Zwei parallele Strecken zwischen Parallelen sind gleich.

Beweis durch Kongruenz der Dreiecke AEB und CDF.

Fig. 1.

4. *Definitionen:* Als Doppel- (Dreifach-, ..., n-fach) Parallele in bezug auf zwei gegebene Parallelen l_0 und l_1 wird die Parallele l_d ($l_{\bar{d}}$, ...) zu diesen bezeichnet, die den doppelten (dreifachen, ..., n-fachen) Abstand beider von l_0 hat.

Als Mittel- (Drittel-, ..., n-tel) Parallele in bezug auf zwei gegebene Parallelen l_0 und l_1 wird die Parallele l_m ($l_{\bar{m}}$ ...) zu diesen bezeichnet, die den halben (drittel, ..., n-tel Abstand) beider von l_0 hat.

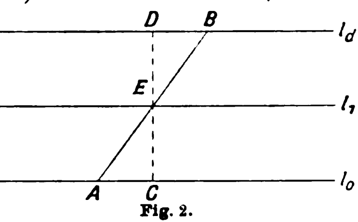


Fig. 2.

Die Konstruktion der n-fach Parallelen ist ohne Schwierigkeit, von den n-tel Parallelen ist zunächst nur die Mittelparallele konstruierbar.

5. *Lehrsatz:* Jede zwischen zwei Par-

1) Albert Nestler A.-G., Lahr i. B.

allelen liegende Strecke wird durch Verlängerung zur Doppelparallele l_d verdoppelt.

Beweis durch Kongruenz der Dreiecke ACE und EBD (oder Symmetriebetrachtung).

Drei Parallelen gleichen Abstandes gestatten die Verdoppelung und damit auch die Halbierung einer beliebigen Strecke, unter der Voraussetzung, daß der Abstand der beiden ersten (äußersten) Parallelen kleiner als die gegebene Strecke ist.

Die Verallgemeinerung für die n-fach Parallele ergibt sich sofort durch mehrfache Anwendung von Satz 5.

6. *Lehrsatz:* Jede zwischen zwei Parallelen liegende Strecke wird durch die Mittelparallele halbiert.

Beweis wie unter 5.

Drei Parallelen gleichen Abstandes gestatten unter der Voraussetzung zu 5 die Halbierung und damit auch die Verdoppelung einer beliebigen Strecke.

Da mit Hilfe der n-fach Parallele eine Strecke in n gleiche Abschnitte geteilt werden kann, so ergibt sich die Konstruktion der n-tel Parallele und auch die Verallgemeinerung von Satz 6 für den allgemeinen Fall.

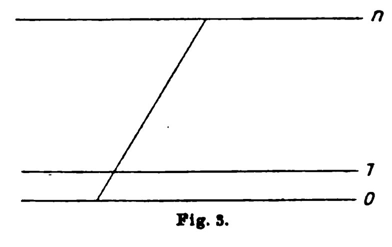


Fig. 3.

Die Sätze 5 und 6 können zusammengefaßt werden:

7. *Lehrsatz:* Liegen die Endpunkte einer Strecke auf den beiden ersten von $(n+1)$ Parallelen gleichen Abstandes, so wird die Strecke durch Verlängerung bis zur $(n+1)$ten Parallele ver-n-facht, liegen sie auf den beiden äußersten, so ist der zwischen den beiden ersten (oder beliebigen zwei aufeinander folgenden) Parallelen liegende Abschnitt $\frac{1}{n}$ der ganzen Strecke.

8. *Aufgaben:* Verfünffache mit Hilfe einer Parallelenschar gleichen Abstandes die Strecke $a = 2$ cm. Teile mittels einer solchen die Strecke $a = 5$ cm in fünf gleiche Teile.

9. *Lehrsatz:* Die $(i+1)$te von $(n+1)$ Parallelen gleichen Abstandes teilt jede zwischen den äußersten Parallelen liegende Strecke in demselben Verhältnis, oder entsprechend liegende Abschnitte zweier oder mehrerer solcher Strecken sind einander proportional (Innere Teilung). Analoges gilt von den zwischen den beiden ersten Parallelen liegenden Strecken. (Äußere Teilung.)

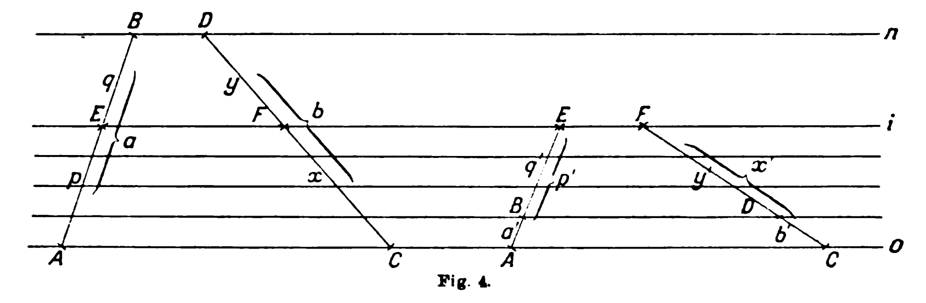


Fig. 4.

$$p = \frac{i}{n} a, \quad x = \frac{i}{n} b \qquad p' = i a', \quad x' = i b'$$

$$q = \frac{n-i}{n} a, \quad y = \frac{n-i}{n} b \qquad q' = (i-1) a', \quad y' = (i-1) b'$$

$$\frac{p}{q} = \frac{i}{n-i}, \quad \frac{x}{y} = \frac{i}{n-i} \qquad \frac{p'}{q'} = \frac{i}{i-1}, \quad \frac{x'}{y'} = \frac{i}{i-1}$$

oder:

$$\frac{p}{x} = \frac{a}{b}, \quad \frac{q}{y} = \frac{a}{b} \qquad \frac{p'}{x'} = \frac{a'}{b'}, \quad \frac{q'}{y'} = \frac{a'}{b'}$$

und:

$$(1) \quad p : q = x : y \qquad p' : q' = x' : y' \quad (1')$$

$$(2) \quad p : x = q : y \qquad p' : x' = q' : y'. \quad (2')$$

Damit ist (für den kommensurabeln Fall) der erste Teil des Strahlensatzes gefunden und kann in der üblichen Form ausgesprochen werden.

Die leicht zu deutenden Proportionalitätsfaktoren ϱ und σ resp. ϱ' und σ' bestimmen sich aus:

$$p = \varrho x \quad \text{und} \quad p = \sigma q \quad \text{resp.} \quad p' = \varrho' x' \quad \text{und} \quad p' = \sigma' q'$$

$$q = \varrho y \qquad x = \sigma y \qquad q' = \varrho' y' \qquad x' = \sigma' y'$$

zu:

$$\varrho = \frac{a}{b} \qquad \varrho' = \frac{a'}{b'}$$

$$\sigma = \frac{i}{n-i} \qquad \sigma' = \frac{i}{i-1}.$$

Die Proportionen (1) und (2), resp. (1') und (2') zeigen das Gesetz von der Vertauschbarkeit der Innenglieder einer Proportion; die Anwendung des Satzes von der korrespondierenden Addition auf die Proportion (1) gibt:

$$\frac{p+q}{q} = \frac{x+y}{y}$$

oder

$$\frac{a}{q} = \frac{b}{y}.$$

Der Zusammenhang beider Figuren ist aufgezeigt. Geht man von Proportion (1') aus, so leistet die korrespondierende Subtraktion ein gleiches.

Beschränkt man sich bei der arithmetischen Behandlung der Verhältnisse und Proportionen auf das Notwendigste und Grundlegendste, in bezug auf die Proportionen beispielsweise auf die Produktengleichung, den Vertauschbarkeitssatz und den Satz von der korrespondierenden Addition und Subtraktion, so können diese mit den geometrischen Betrachtungen gleichzeitig durchgenommen werden und schließlich beide ihren Abschluß in einer Gegenüberstellung der arithmetischen und geometrischen Resultate finden. Die im allgemeinen mit wenig Freude aufgenommene arithmetische Proportionenlehre wird den Schülern bedeutend schmackhafter und verständlicher gemacht. („Vernachlässigte man nicht die geometrische Phantasie, so wäre Gelegenheit genug, nicht bloß den Begriff der Proportion, wie ihn schon das gemeinste Rechnen fordert, weit tiefer einzuprägen, sondern auch die Vorstellung der Funktionen frühzeitig zu wecken". Herbart, Umriß pädagogischer Vorlesungen. Reclam. S. 159.)

10. *Aufgaben:*

a) Teile die Strecke $a = 5$ cm innen und außen im Verhältnis $m : n$. ($m = 3$, $n = 1$.)

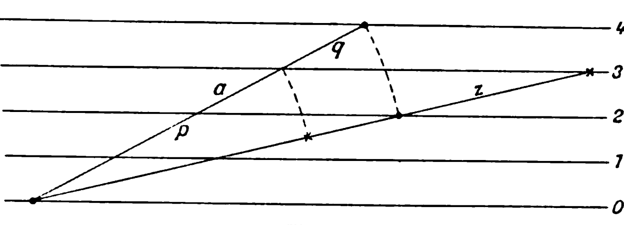


Fig. 5.

Innere Teilung:

$$p : q = m : n \quad [p + q = a]$$

oder:

$$p : (p + q) = m : (m + n)$$

und:

$$p = \frac{m}{m+n} a, \quad q = \frac{n}{m+n} a$$

Äußere Teilung:

$$(a + z) : z = m : n \quad [(a + z) - z = a]$$

oder:

$$(a + z) : a = m : (m - n)$$

und:

$$a + z = \frac{m}{m-n} a, \quad z = \frac{n}{m-n} a.$$

$$\left[a = \frac{m-n}{m}(a + z), \quad z = \frac{n}{m}(a + z)\right]$$

Aufgaben, in denen $m < n$ sollten zur äußeren Teilung nur dann gestellt werden, wenn die Vorzeichenverhältnisse berücksichtigt werden.[2])

b) Konstruiere zu drei gegebenen Strecken a, b, c die vierte Proportionale x. ($a = 4$ cm, $b = 2$ cm, $c = 3$ cm.)

Die Strecken a und b bestimmen das Parallelensystem.

$$a : b = c : x.$$

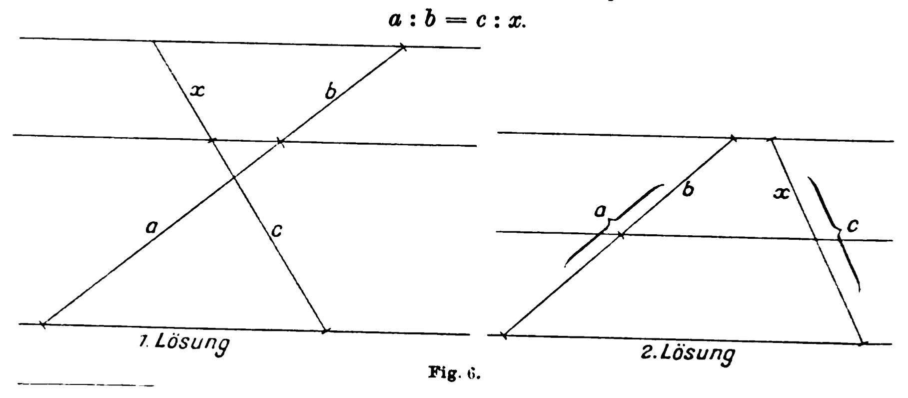


Fig. 6.

---

2) Unter den Voraussetzungen $a > 0$, $m > 0$ und $n > 0$ folgen für:

$$p = \frac{m}{m+n} a, \quad q = \frac{n}{m+n} a, \quad p + q + z = \frac{m}{m-n} a, \quad z = \frac{n}{m-n} a,$$

wenn:

	p	q	$p+q+z$	z
$m > n:$	$p > 0,$	$q > 0,$	$p + q + z > 0,$	$z > 0,$
$m = n:$	$= \frac{a}{2},$	$= \frac{a}{2},$	$= \infty,$	$= \infty,$
$m < n:$	$> 0,$	$> 0,$	$< 0,$	$< 0.$

c) Jemand legt in 3 Stunden 7,8 km zurück, welchen Weg macht er in 5 Stunden?[3])

Lösung: $3:5 = 7,8:x.$

Betrachtet man bei festen a und m die Strecken $p, q, p+q+z$ und z als Funktionen von n, so führen die Transformationen:

$$\mu = m + n \quad \text{resp.} \quad \mu' = m - n$$

zu den Beziehungen:

$$p = \frac{ma}{\mu}, \quad q = a - \frac{ma}{\mu}, \quad p + q + z = \frac{ma}{\mu'}, \quad z = \frac{ma}{\mu'} - a.$$

Fig. 7.

Ohne auf eine Diskussion der Funktionen eingehen zu wollen, sind in vorstehender Figur für $a = 5$, $m = 3$ die Hyperbeln im Maßstab 1 : 3 gezeichnet. In dem Intervalle $0 < n < m$ sind sämtliche Strecken positiv. Beispielsweise erhält man für $n = 1$ folgende Lage der Punkte:

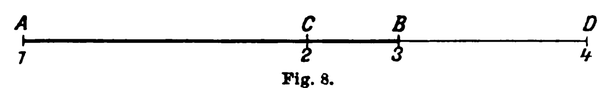


Fig. 8.

d) Zeichne zu einem Dreieck ein anderes, dessen Seiten zu den entsprechenden des gegebenen im Verhältnis $2:3$ stehen usf.

11. *Lehrsatz:* Schneiden zwei Gerade auf zwei Parallelen die Strecken a und c ab, so begrenzen sie 1. auf der Mittelparallele die Strecke $\frac{a+c}{2}$ oder $\frac{a-c}{2}$ oder $\frac{c-a}{2}$, 2. auf der Doppelparallele $2c-a$ oder $a-2c$ oder $a+2c$

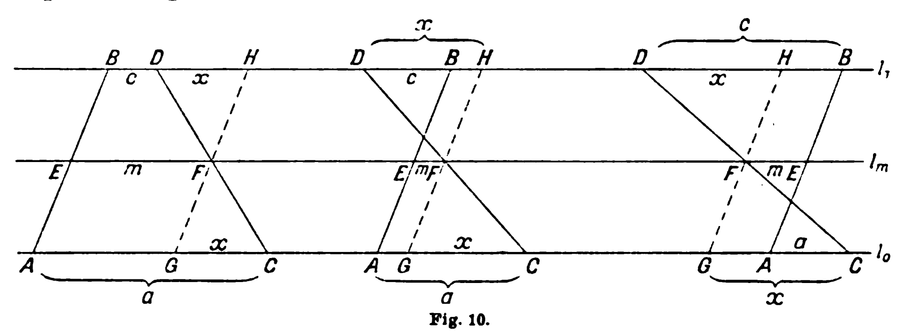


Fig. 10.

Beweis zu 1. Unter Berücksichtigung der Kongruenz der Dreiecke GCF und FHD ist:

Werden die Punkte A, C, B, D ($AB = a$) mit 1, 2, 3, 4 bezeichnet, so ist jede Strecke positiv zu nehmen, wenn die größere Ziffer rechts steht:

$$\overline{12} : \overline{23} = 3:1, \quad \overline{14} : \overline{34} = 3:1.$$

Sind für n alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ zugelassen, so lehrt die graphische Darstellung vier Fälle unterscheiden.

I. $m < n : p > 0, \quad q > 0, \quad p + q + z < 0, \quad z < 0.$

Beispiel: $m:n = 3:6$

II. $0 < n < m : p > 0, \quad q > 0, \quad p + q + z > 0, \quad z > 0.$

Beispiel: $m:n = 3:1.$

III. $-m < n < 0 : p > 0, \quad q < 0, \quad p + q + z > 0, \quad z < 0.$

Beispiel: $m:n = 3:-1.$

IV. $n < -m : p < 0, \quad q > 0, \quad p + q + z > 0, \quad z < 0.$

Beispiel: $m:n = 3:-6.$

4 1 2 3

1 2 3 4

1 4 3 2

2 1 4 3

Fig. 9.

3) Siehe auch: P. Luckey, Rechengeräte für Regeldetri, Proportions- und Mischungsrechnung. Zeitschr. f. math. u. naturw. Unterr. 1926, 57. Jahrg., S. 211.

$$m = EF = AG = \mid a - x \mid a - x \mid x - a \mid$$
$$m = EF = BH = \mid c + x \mid x - c \mid c - x \mid$$
$$2m = \quad \mid a + c \mid a - c \mid c - a \mid$$
$$m = \quad \left| \frac{a+c}{2} \right| \frac{a-c}{2} \left| \frac{c-a}{2} \right|$$

Beweis zu 2. Wird m durch c und c durch d ersetzt, so folgt für den Abschnitt d auf der Doppelparallele:

$$d = \quad \mid 2c - a \mid a - 2c \mid a + 2c \mid .$$

Werden die Strecken a, m und c mit positivem oder negativem Vorzeichen versehen, je nachdem die Punkte C, F, D rechts oder links von A, E, B liegen, so ist stets $m = \frac{a+c}{2}$ und $d = 2c - a$.

Im folgenden sollen gerichtete Strecken (die auch einen Umlaufssinn der Figur $ACDB$ bestimmen) angenommen werden.

12. *Lehrsatz:* Schneiden zwei Gerade auf den äußersten von $(n+1)$ Parallelen gleichen Abstandes die Strecken a und c ab, so begrenzen sie auf der $(i+1)$ten Parallele die Strecke $m_i = \frac{(n-i)a + ic}{n}$.

Beweis für $n = 4$. Da l_2 Mittelparallele zu l_0 und l_4, l_1 zu l_0 und l_2, l_3 zu l_2 und l_4 ist, so führt die schrittweise Anwendung von Satz 11_1. zu den Ergebnissen:

$$m_2 = \frac{a+c}{2};$$
$$m_1 = \frac{a + \frac{a+c}{2}}{2} = \frac{3a+c}{4};$$
$$m_3 = \frac{\frac{a+c}{2} + c}{2} = \frac{a+3c}{4},$$

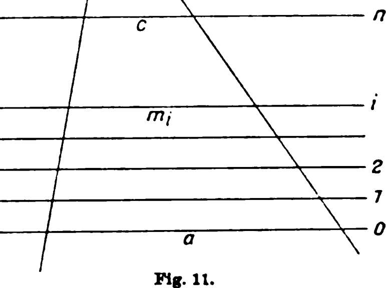


Fig. 11.

die unter Hinzufügung von $m_0 = a$ und $m_4 = c$ in der Anordnung geschrieben werden können:

$$a = m_0 = \frac{4a + 0 \cdot c}{4}$$
$$m_1 = \frac{3a + 1c}{4}$$
$$m_2 = \frac{2a + 2c}{4}$$
$$m_3 = \frac{1a + 3c}{4}$$
$$c = m_4 = \frac{0 \cdot a + 4c}{4}.$$

Diese Überlegung läßt sich für alle n von der Form 2^ν $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$ anstellen.

Beweis für $n = 3$. Die Berechnung von m_1 und m_2 führt auf zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten:

$$\left| \begin{array}{l} m_1 = \frac{a + m_2}{2} \\ m_2 = \frac{m_1 + c}{2} \end{array} \right|$$

mit den Lösungen: $m_1 = \frac{2a + c}{3}$, $m_2 = \frac{a + 2c}{3}$,

die zu dem Schema zusammengefaßt werden:

$$a = m_0 = \frac{3a + 0 \cdot c}{3}$$

$$m_1 = \frac{2a + 1c}{3}$$

$$m_2 = \frac{1a + 2c}{3}$$

$$c = m_3 = \frac{0 \cdot a + 3c}{3}.$$

Diese Methode ist für alle ungeraden n ($n = 3, 5, 7, \ldots$) anwendbar. Für alle geraden n, die nicht von der Form 2^ν ($\nu = 1, 2, 3, \ldots$) sind, führt die Kombination beider Verfahren zur Errechnung der angegebenen Formel.

13. *Lehrsatz:* Schneiden zwei Gerade auf den beiden ersten von $(n + 1)$ Parallelen gleichen Abstandes die Strecken a und c ab, so begrenzen sie auf der $(i + 1)$ten Parallele die Strecke $d_i = ic - (i - 1)a$.

Beweis: Die schrittweise Anwendung von Satz 11_2. ergibt:

$$d_2 = 2c - a$$

$$d_3 = 2(2c - a) - c = 3c - 2a$$

$$d_4 = 2(3c - 2a) - (2c - 1a) = 4c - 3a$$

$$d_5 = 2(4c - 3a) - (3c - 2a) = 5c - 4a$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$d_i = ic - (i - 1)a$$

und: $c = d_1 = 1 \cdot c - 0 \cdot a$

$a = d_0 = 0 \cdot c + 1 \cdot a.$

Fig. 12.

Da mit $d_i = c$, $c = m_1$, $i = n$ die in Satz 12 gefundene Formel:

$$m_1 = \frac{(n - 1)a + c}{n}$$

folgt, erscheint es zur Erleichterung der Beweisführung gerechtfertigt, Satz 13 (11_2.) vor Satz 12 (11_1.) zu stellen.

14. *Untersuchung von* $m_i = f(c)$ *und* $d_i = g(c)$.

Die Abhängigkeit der Abschnitte m_i und d_i bei festem a von c wird gleichzeitig durch Messung an der Zeichnung, tabellarisch mit Hilfe der gewonnenen Formel und mittels der graphischen Darstellung, die in beiden Fällen ein Büschel von $(n + 1)$ Geraden durch den Punkt (a, a) ergibt, untersucht.

Beispiel: $m_i = \frac{(n-i)\,a + ic}{n}$ für $a = 4$, $n = 4$.

a) Zeichnung.

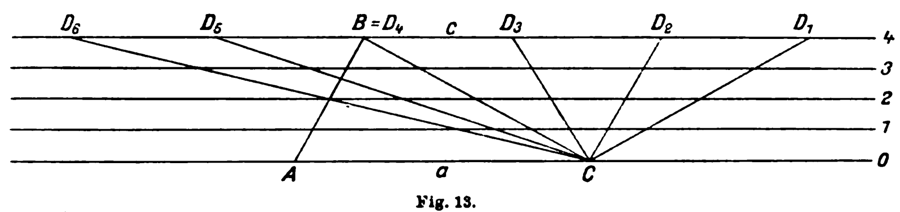


Fig. 13.

b) Tabelle.

c	$m_0 = 4$	$12 + c$	$m_1 = \frac{12 + c}{4}$	$8 + 2c$	$m_2 = \frac{8 + 2c}{4}$	$4 + 3c$	$m_3 = \frac{4 + 3c}{4}$	$m_4 = c$	$ACDB$ ist ein:
6	4	18	4,5	20	5	22	5,5	6	Trapez
4	4	16	4	16	4	16	4	4	Parallelogramm
2	4	14	3,5	12	3	10	2,5	2	Trapez
0	4	12	3	8	2	4	1	0	Dreieck
— 2	4	10	2,5	4	1	—2	— 0,5	— 2	überschlagenes Trapez
— 4	4	8	2	0	0	—8	— 2	— 4	überschlagenes Trapez (symmetrisch)
— 6	4	6	1,5	— 4	— 1	—14	— 3,5	— 6	überschlagenes Trapez

c) Graphische Darstellung.

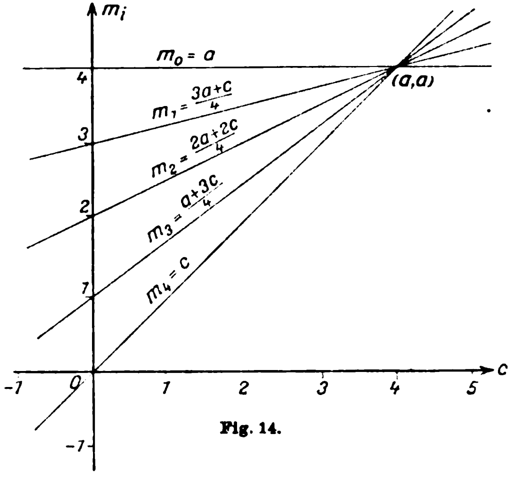


Fig. 14.

15. *Der zweite Teil des Strahlensatzes.* Mit $c = 0$ oder $a = 0$ folgt aus den Sätzen 12 oder 13 der zweite Teil des Strahlensatzes (kommensurabler Fall).

Unter der Voraussetzung $c = 0$ ist:

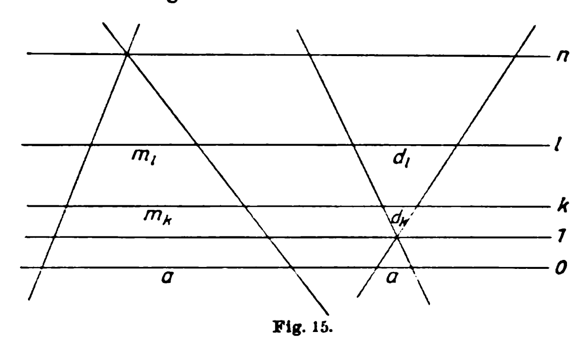


Fig. 15.

$$m_i = \frac{(n-i)a}{n}, \qquad d_i = -(i-1)a,$$

es verhalten sich die Strecken m_k und m_l resp. d_k und d_l:

$$m_k : m_l = (n-k) : (n-l), \quad d_k : d_l = (k-1) : (l-1)$$

und aus: $m_k = \varrho\,(n-k)$, $\quad d_k = \varrho'(k-1)$

$m_l = \varrho\,(n-l)$, $\quad d_l = \varrho'(l-1)$

bestimmen sich die Proportionalitätsfaktoren zu:

$$\varrho = \frac{a}{n}, \qquad \varrho' = -a.$$

Ist $a = 0$, so lauten die entsprechenden Proportionen:

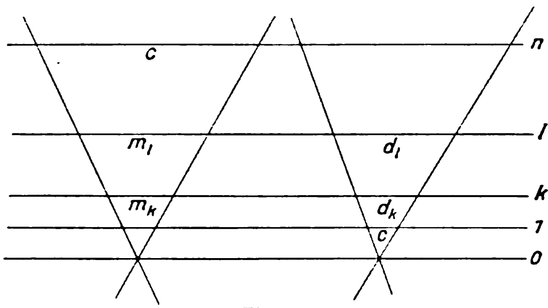


Fig. 16.

$$m_k : m_l = k : l, \qquad d_k : d_l = k : l,$$

und die Proportionalitätsfaktoren sind:

$$\sigma = \frac{c}{n}, \qquad \sigma' = c.$$

Für $m_i = 0$, resp. $d_i = 0$ liefern die Formeln für m_i und d_i:

$$(n-i)a + ic = 0, \qquad ic - (i-1)a = 0$$

oder: $\quad a : (-c) = i : (n-i), \quad a : c = i : (i-1).$

Die erstgenannte Proportion führt zur Betrachtung des Proportionalzirkels und gibt damit zu weiteren Konstruktionen ähnlicher Figuren Anlaß.

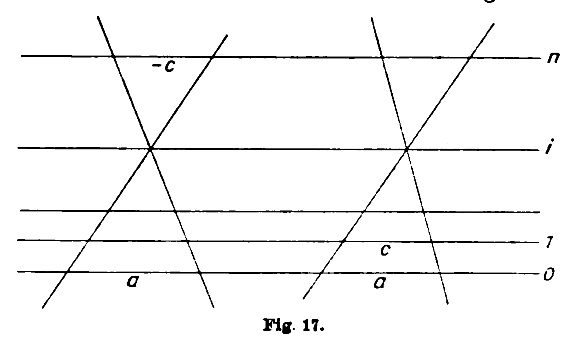


Fig. 17.

Weitere Sätze über das Schnittverhältnis der Schenkel des übergeschlagenen Trapezes, der Mittellinien im Dreieck, über die Abschnitte eines Strahlenbüschels auf Parallelen können hier angeschlossen werden.

Verwendung von elektrischen Schwingungen am Funkeninduktor zur Einführung in das Wesen des geschlossenen Schwingungskreises.

Von Erich Günther in Dresden.

Mit 4 Figuren im Text.

Die experimentelle Behandlung der für die elektrischen Schwingungen grundlegenden Erscheinungen, also vor allem der Vorgänge, die sich in einem geschlossenen Schwingungskreise abspielen, bereitet trotz mannigfaltiger Versuchsanordnungen, die für diesen Zweck ersonnen worden sind, erhebliche Schwierigkeiten. Knüpft man der historischen Entwicklung folgend an die Feddersenschen Versuche an, so gerät man in folgendes Dilemma: Um einen wirkungsvollen Funken zu erhalten, muß man mit hohen Spannungen arbeiten, was wieder besondere Rücksicht auf die Isolation von Kondensatoren und Selbstinduktionsspulen erfordert. Man ist also auf die Verwendung von Leidner Flaschen und von Spulen mit wenigen, weit voneinander abstehenden Windungen verwiesen. Wegen der sehr kleinen Selbstinduktion und Kapazität erhält man sehr rasche Schwingungen und die in den Schulsammlungen vorhandenen rotierenden Spiegel gestatten nicht so hohe Tourenzahlen, wie sie nötig sind, um das charakteristische Funkenband auseinanderzuziehen. Photographische Registrierung scheidet wegen ihrer Umständlichkeit aus und kommt höchstens für das Schülerpraktikum gelegentlich in Frage. Verwendet man dagegen große Kapazitäten und Selbstinduktionen, so erhält man zwar verhältnismäßig langsame Schwingungen, kann aber keinen wirkungsvollen Funken hervorbringen, da man durch hohe Spannungen den Kondensator und die Spulen nicht gefährden darf. Als Ersatz der Funkenstrecke kann dann wohl eine rasch rotierende Geißlersche Röhre oder eine Glimmlampe dienen.

Einen Ausweg aus diesen Schwierigkeiten sollen die folgenden Versuche bieten, die überall da ohne weiteres ausführbar sind, wo ein möglichst großer



Funkeninduktor vorhanden ist, die die unmittelbare Vorführung der elektrischen Schwingungen mit Hilfe der Braunschen Röhre gestatten und die überdies einen wertvollen Einblick in die Vorgänge im Funkeninduktor geben.

Die Primärspule des Induktors und der zur Unterdrückung des Öffnungsfunkens eingebaute, gewöhnlich recht große und gut isolierende Kondensator geben die beiden wesentlichen Bestandteile des geschlossenen Schwingungskreises, die Selbstinduktion und die Kapazität, an die Hand.

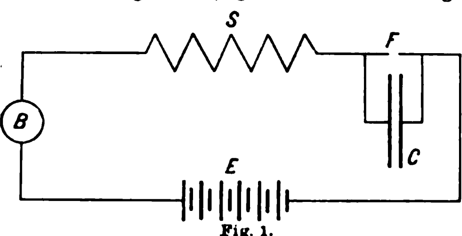


Fig. 1.

In Fig. 1 ist die beim Betrieb des Induktors übliche Schaltung dargestellt. *E* bedeutet die Stromquelle, *S* die Primärspule, *F* den Unterbrecher und *C* den zum Unterbrecher parallel geschalteten Kondensator. Schaltet man nun weiter die Spule *B* der Braunschen Röhre als Stromspule in die Leitung ein, so beobachtet man im rotierenden Spiegel die Kurve der Fig. 2. Bei *I* erfolgt der Stromschluß; die Primärstromstärke steigt zufolge der beträchtlichen Selbstinduktion der Primärspule des Induktors langsam auf ihren vollen Wert an. Bei *II* wird der Strom unterbrochen. Er fällt aber nicht einfach, wie es gewöhnlich dargestellt wird, auf Null, sondern bei genauer Beobachtung zeigen sich deutlich ausgeprägt einige, allerdings sehr stark gedämpfte, Schwingungen. Das erklärt sich folgendermaßen: Die Spule *S* und der Kondensator *C* bilden bei offenem Unterbrecher einen über die Stromquelle *E* geschlossenen Schwingungskreis. Im Augenblick der Unterbrechung strömt die magnetische Energie der Spule in Form des Öffnungsstromes in den Kondensator, der dabei seine Aufgabe der Löschung des Öffnungsfunkens erfüllt. Die nun im Kondensator befindliche elektrische Energie bleibt aber nicht bis zum nächsten Stromschluß im Kondensator stecken, sondern sie schwingt in dem beschriebenen, geschlossenen Schwingungskreis über die Stromquelle stark gedämpft aus.

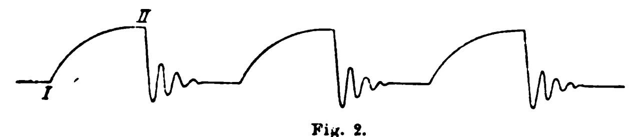


Fig. 2.

Mit der Vorführung dieses Versuches ist somit der Übergang zum geschlossenen Schwingungskreis experimentell hergestellt. Ehe aber hier diese Frage weiterverfolgt wird, sollen einige Punkte erwähnt werden, die sich aus dem Versuch für das Verständnis der Vorgänge im Induktor ergeben.

Über die Wirkungsweise des Kondensators beim Funkeninduktor findet man in den Lehrbüchern zum Teil recht merkwürdige Auffassungen. Richtig wird gewöhnlich die Aufnahme der Selbstinduktionsenergie vom Kondensator zum Zwecke der Unterdrückung des Öffnungsfunkens dargestellt. Dann wird aber häufig die Meinung ausgesprochen, daß diese Energie nun bis zum nächsten Stromschluß im Kondensator bleibt, beim Stromschluß als Schließungsfunke zum Vorschein kommt und die Selbstinduktion der Spule bei der Verlangsamung des Schließungsstromes unterstützt. Davon kann keine Rede sein. Von der aus der Primärspule im Augenblicke der Stromöffnung aufgenommenen Energie ist beim Stromschluß nichts mehr vorhanden; die Energie ist vielmehr in der ge-

schilderten Weise durch gedämpfte Schwingungen vernichtet worden. Wenn der Unterbrecher offen ist, liegt am Kondensator nur die Spannung der Stromquelle, und die dadurch bedingte Energie entlädt sich im Schließungsfunken, und zwar ohne Einfluß auf den Anstieg des Schließungsstromes. Daß die durch die einströmende Selbstinduktionsenergie im Kondensator erzeugte Spannung weit über Batteriespannung liegt, kann man durch eine parallel zum Kondensator gelegte Glimmlampe zeigen. Diese leuchtet im Augenblick der Unterbrechung auf, bleibt aber bei dauernd offenem Unterbrecher dunkel.

Ein völlig klares Bild von der Beschaffenheit des Öffnungsstromes und namentlich von der Geschwindigkeit seines Abfalles erhält man nun dadurch, daß sich dieser als der Anfang einer elektrischen Schwingung erweist, deren Schwingungsdauer durch Kapazität und Selbstinduktion des Schwingungskreises festgelegt ist. Es ergibt sich daraus, daß der Kondensator für den Betrieb des Induktors nicht zu groß gewählt werden darf, da dadurch die Schwingungsdauer vergrößert, der Abfall des Öffnungsstromes verlangsamt und die Spannung in der Sekundärspule des Induktors erniedrigt wird. Die Wirkungsweise des Kondensators zur Funkenlöschung erklärt sich so, daß er im Augenblick der Stromöffnung die Energiedichte am Kontakt des Unterbrechers herabsetzt, wodurch die Zündung eines Lichtbogens unterbleibt.

Recht wichtig ist für den Unterricht natürlich auch die Demonstration der Schließungskurve des Induktors (von *I* bis *II* in Fig. 2). Dadurch wird der Einfluß der Selbstinduktion geklärt, und es wird begreiflich, woher die nachher beim Öffnen frei werdende Energie der elektrischen Schwingungen stammt. Weiter wird es erkennbar, daß es keinen Zweck hat, die Unterbrechungszahl über ein bestimmtes Maß hinaus zu steigern, da bei zu rascher Unterbrechung der Schließungsstrom wegen der Selbstinduktion seinen vollen Wert noch nicht erreicht hat, wenn die Unterbrechung erfolgt.

Kehren wir nun nach dieser Abschweifung zur Behandlung des geschlossenen Schwingungskreises zurück. Man kann die beschriebene Schaltung in der einfachsten Weise derart abändern, daß das nun ins Auge gefaßte Ziel bequem erreicht wird. Man legt den Kondensator nämlich nicht parallel zum Unterbrecher, sondern zur Primärspule des Induktors. Es ergibt sich dann die Schaltung der Fig. 3. Die Stromquelle ist dadurch aus dem Schwingungskreis ausgeschaltet und dieser besteht allein aus seinen charakteristischen Bestandteilen, der Spule *S* und dem Kondensator *C*. In diesem Kreise spielen sich nun die elektrischen Schwingungen ab; sie gehen nicht mehr durch die Stromquelle, und man erhält somit ein klareres Bild der ganzen Erscheinung. Schaltet man nämlich die Zuleitung von der Batterie zur Spule in der in Fig. 3 erkennbaren Weise über die Punkte *M* und *N*, so liegt die Spule *B* der Braunschen Röhre nicht mit im Schließungskreis, sondern nur im Schwingungskreis. Der Schließungsstrom tritt im Kurvenbild nicht mehr auf, und man erhält die Kurve der Fig. 4.

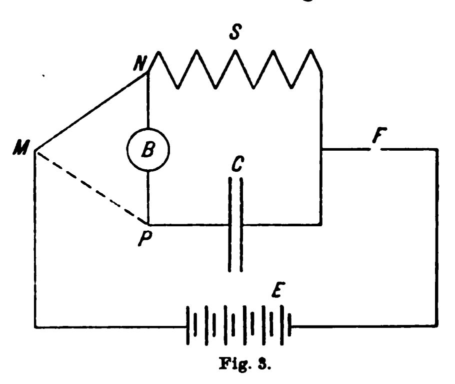


Fig. 3.

Jeder Unterbrechung entspricht eine Gruppe hochfrequenter Schwingungen, die sich als stark gedämpft erweisen. Die Anzahl der Schwingungsgruppen ist natürlich gleich der Anzahl der Unterbrechungen, und man erzielt somit gleichzeitig eine klare Einführung



Fig. 4.

in das Verständnis eines Tonsenders, dessen charakteristische Schwingungskurve hier vorliegt. Schaltet man dagegen die Zuleitung statt von M nach N in der punktiert angedeuteten Weise von M nach P, so liegt die Spule B wieder im Schließungskreis, und man erhält die ursprüngliche Kurve der Fig. 2.

Auch hier kann man parallel zum Kondensator eine Glimmlampe legen und diese an Stelle der Braunschen Röhre als Indikator für die Schwingungen benutzen, indem man sie im rotierenden Spiegel beobachtet. Man bemerkt dann abwechselndes Aufleuchten der beiden Elektroden. Freilich reicht die Spannung gewöhnlich nicht aus, um mehr als die beiden ersten Halbschwingungen einer jeden Gruppe sichtbar zu machen. An Stelle der Glimmlampe kann man auch eine kleine Geißlersche Röhre verwenden, wobei es unter Umständen erforderlich ist, die Spannung durch einen Transformator zu erhöhen.

Für die Versuche wurde ein großer Induktor älterer Konstruktion von etwa 30 cm Funkenlänge benutzt. Betrieben wurde er mit etwa 30 Volt Spannung, während er für 110 Volt Betriebsspannung gebaut ist. Die Herabsetzung der Spannung ist ratsam, um eine Gefährdung der Sekundärspule zu vermeiden, da dieser bei den Versuchen Energie nicht entnommen wird. Das Kurvenbild änderte sich übrigens nicht merklich, wenn an der Sekundärspule Funken übergingen. Der Kondensator ist bei den Versuchen keiner Gefahr ausgesetzt, da er nur solche Spannungen aufzunehmen hat, für die er seiner Bestimmung nach gebaut ist. Der Unterbrecher wurde durch den Wagnerschen Hammer eines zweiten kleineren Induktors gebildet, der einfach in die Leitung mit eingeschaltet wurde.

Bei Erhöhung der Selbstinduktion durch Zuschalten weiterer Spulen zeigte sich deutlich eine Vergrößerung der Schwingungsdauer, so daß hier ein Weg vorliegt, der Thomsonschen Formel auch quantitativ nahezukommen.

Durch die Versuche können also die Verhältnisse in einem geschlossenen Schwingungskreis weitgehend geklärt werden, und sie können so recht gut zur Einführung in das Gebiet der elektrischen Schwingungen dienen. Sie lassen sich mit den in einer gut eingerichteten Schulsammlung vorhandenen Apparaten anstellen, ohne daß es nötig wäre, irgendwelche Nebenapparate anzuschaffen oder herzustellen.

Interessant ist es vielleicht noch zu bemerken, daß der hier beschriebene Versuch, was die Schwingungserzeugung anlangt, gleichsam das Gegenbild zum ursprünglichen Feddersenschen Versuch darstellt. Während nach Feddersen im Schwingungskreis mit Funkenstrecke zunächst elektrische Energie im Kondensator aufgespeichert wird, ist im hier vorliegenden Falle zunächst magnetische Energie in der Spule vorhanden, und die Schwingungen werden durch Unterbrechen des Spulenstromes eingeleitet. Zieht man das Pendel zum Vergleich heran, so wird nach der Feddersenschen Methode zuerst potentielle, bei dem hier beschriebenen Verfahren zunächst kinetische Energie

zugeführt. Wesentlich ist es, daß hier ein Schwingungskreis ohne Funkenstrecke vorliegt, der in eigenartiger Weise zur Schwingung angestoßen wird. Die einfache Form des Schwingungskreises hat didaktisch vielleicht besondere Vorzüge. Eine Folge wird auch eine Verminderung der Dämpfung sein; freilich muß man in der hier beschriebenen Form des Versuches die starke Dämpfung durch den Eisenkern der Primärspule in Kauf nehmen. Jedoch ist das schließlich nur eine Frage der weiteren Ausgestaltung der Versuchsanordnung.

Aufgaben-Repertorium.

Redigiert von Studienrat M. Brettar in Viersen (Burgstr. 2c).

(Alle das Aufgaben-Repertorium betreffenden Zusendungen und Anfragen sind an die Adresse dieses Herrn zu richten.)

A. Auflösungen.

907. Eine arithmetische Reihe 1. Ordnung stimmt mit einer geometrischen Reihe im ersten, zweiten und n-ten Gliede überein. Wie lauten die Reihen, wenn das Anfangsglied gleich 1 ist? ($n = 6$.) (Heft 3, 1926, Michnik-Beuthen.)

Lösung. Es sei d die Differenz der arithmetischen und q der Quotient der geometrischen Reihe. Dann ist $1 + d = q$, $1 + (n-1)d = q^{n-1}$. Hieraus folgt mit $m = n - 1$ die Beziehung $\frac{q^m - 1}{q - 1} = m$, d. h.: die Summe der $(n-1)$ ersten Glieder der geometrischen Reihe ist gleich ihrer Anzahl. Zur Bestimmung von q oder d hat man die Gleichungen

$$q^{m-2} + 2q^{m-3} + 3q^{m-4} + \cdots (m-2)q + (m-1) = 0,$$

oder
$$d^{m-2} + m \cdot d^{m-3} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} d^{m-4} + \cdots \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} = 0.$$

Für den Fall $n = 6$ ist
$$q^3 + 2q^2 + 3q + 4 = 0$$
$$d^3 + 5d^2 + 10d + 10 = 0,$$

woraus sich die reellen Wurzeln

$$q = -\tfrac{1}{3}(2 + A - B) = -1{,}6506292$$
$$d = -\tfrac{1}{3}(5 + A - B) = -2{,}6506292$$

ergeben, wenn $A = \sqrt[3]{15\sqrt{6} + 35}$, $B = \sqrt[3]{15\sqrt{6} - 35}$ ist.

Das $n = 6^{\text{te}}$ Glied in beiden Reihen ist

$$z_6 = -\tfrac{1}{3}(22 + 5A - 5B) = -12{,}253146.$$

Die Reihen lauten (auf zwei Stellen abgerundet)

$$1; \quad -1{,}65; \quad -4{,}30; \quad -6{,}95; \quad -9{,}60; \quad -12{,}25;$$
$$1; \quad -1{,}65; \quad +2{,}72; \quad -4{,}50; \quad +7{,}42; \quad -12{,}25.$$

Wieviel reelle Werte erhält man für $n = 7$?

Behner. Brehm. Bücking. Conrad. Dies. Fix. Hoffmann. Jacob. Janssen. Kasper. Lohnes. Mahrenholz. Mertens. Michnik. Münst. Niebel. Peters. Rall. Ruff. Sohn. Sós. Stiegler.

908. (Schüleraufgabe). Die wievielte Variation zur 8. Klasse ohne Wiederholung von Vindobona ist anno divo? (Heft 5, 1926, Ruff-Wien.)

Lösung. Das Wort werde geschrieben: $vin_1do_1bo_2n_2a$, die gesuchte Variation $x: an_1n_2o_1divo_2$. Die Anzahl der Variationen der 9 Buchstaben zur 8. Klasse ist $V_8(9) = 9!$ $V_8(9) = 362880$. Dem Komplex x gehen voran alle mit den Buchstaben v bis n_2 beginnenden Komplexe, deren Anzahl $8 \cdot V_7(8) = 8 \cdot 8! = 322560$ ist. Von den mit a beginnenden Gruppen gehen dem gesuchten Komplex voran die mit v und i an zweiter Stelle; ihre Anzahl ist $2 \cdot V_6(7) = 2 \cdot 7! = 10080$. Von den mit an_1 beginnenden gehen dem x voraus die mit $vido_1bo_2$ an dritter Stelle, also $6 \cdot V_5(6) = 6 \cdot 6! = 4320$. Von den mit an_1n_2 anfangenden gehen dem x voraus die mit vid an vierter Stelle, mithin $3 \cdot V_4(5) = 3 \cdot 5! = 360$. Mit $an_1n_2o_1$ und vi an fünfter Stelle sind es noch $2 \cdot V_3(4) = 2 \cdot 4! = 48$, mit $an_1n_2o_1d$ und v an sechster Stelle noch $V_1(3) = 3! = 6$. Von den mit $an_1n_2o_1di$ beginnenden Komplexen ist x der zweite. Die gesuchte Variation ist demnach die 337376ste.

Bücking. Conrad. Hoffmann.

909. Verbindet man einen Scheitel S einer gleichseitigen Hyperbel $x^2 - y^2 = a^2$ mit einem Hyperbelpunkte P und konstruiert man ein gleichschenkliges Dreieck PQR, dessen Basis PR auf SP liegt und dessen einer Schenkel die zu P gehörige Ordinate PQ ist, so berührt der andere Schenkel den Scheitelkreis in R. (Heft 5, 1926, Hörting-Zeitz.)

Lösung. a) Ist O der Mittelpunkt der Hyperbel, so ist $a^2 = \overline{OQ}^2 - \overline{PA}^2 = \overline{OQ}^2 - \overline{QR}^2$. a ist daher Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks mit der Hypotenuse QO und der zweiten Kathete QR.

b) Aus der Gleichung der Hyperbel folgt der Satz: Die Kreistangente und die Hyperbelordinate, die von einem Punkt der Hauptachse ausgehen, sind gleich lang (Salmon-Fiedler, Kegelschnitte I, S. 329, 7. Aufl.). Hat das Dreieck PQR den Basiswinkel α, so ist $(R - \alpha)$ der Basiswinkel des Dreiecks SOR, d. h. SRP ist eine Gerade.

Auch projektive Behandlung führt zu einfachen Lösungen.

Brehm. Bücking. Conrad. Dies. Friedrich. Groner. Hoffmann. Hörting. Janzen. Kasper. Lohnes. Mahrenholz. Mertens. Münst. Rall. Scharffetter. Schick. Schultheiss. Stiegler.

910. Gegeben ist ein Kreis M und innerhalb desselben ein Punkt P. Man konstruiere a) ein Sehnenviereck, dessen Seiten den Kreis *berühren* und dessen Diagonalen durch P gehen, b) *in* den Kreis ein Sehnenviereck, das zugleich die Eigenschaften eines Tangentenvierecks besitzt und dessen Diagonalen durch P gehen. (Heft 5, 1926, Schumacher-München.)

Lösung. a) Gegeben ist der Kreis M_1 und der Punkt P. Man ziehe durch P zwei zueinander senkrechte Sehnen R_1R_2 und S_1S_2 und konstruiere in den Endpunkten R_1, S_1, R_2, S_2 die Tangenten an den Kreis, die sich in A, B, C, D, Q_1 und Q_2 schneiden. $ABCD$ ist das verlangte Sehnenviereck (M_2). $\sphericalangle BAD + \sphericalangle BCD = 2R$ folgt nämlich aus $S_1S_2 \perp R_1R_2$ und dem Satz über den Winkel zwischen zwei sich schneidenden Sehnen eines Kreises oder durch Heranziehung polarer Eigenschaften. (Q_1Q_2 ist die Polare für die Kreise M_1 und M_2 hinsichtlich des Punktes P.)

b) Gegeben ist der Kreis M_2 und P. Die Polare von P bezüglich M_2 ist dieselbe wie für den zu suchenden Kreis M_1. Der Pol von AC ist P_2, der von BD ist P_1. P_1P und P_2P sind die Diagonalen von $ABCD$. —

Gibt es **ein** *bizentrisches* Viereck, so existieren für dieselben zwei Kreise unendlich viele. Die Diagonalen schneiden sich mit den Verbindungsgeraden der Berührungspunkte der Gegenseiten in *einem* Punkt (P) nach dem Satze von Brianchon. Das Tangenten*vier*eck ist ein ausgeartetes Tangenten*sechs*eck. Sonderfälle bilden das gleichschenklige Trapez und das Deltoid. —

Wann lassen zwei gegebene Kreise ein bizentrisches Viereck zu?

Lit. Schlömilch, Höhere Analysis, Bd. II. Holzmüller, Elementarmathematik III, S. 15. Durège, Elliptische Funktionen. Spieker, Ebene Geometrie, Abschnitt XVII. Schumacher, Archiv für Mathematik, Jahrgang 1884/85 u. a. m.

CONRAD. DIEZ. HOFFMANN. MAHRENHOLZ. MÜNST. RALL. SCHARFFETTER. SCHUMACHER.

B. Neue Aufgaben.

968. Über $AB = 2m$ ist der Halbkreis nach einer Seite, über $BC = 2m$ und $AC = 4m$ sind die Halbkreise nach entgegengesetzter Seite geschlagen. Der entstehenden Figur ist ein Dreieck einbeschrieben, dessen eine Ecke A ist und dessen andere Ecken D und E auf den Halbkreisen über AB bzw. AC liegen, und zwar derart, daß die Seite DE den Halbkreis über BC berührt. Unter welchen Bedingungen wird ADE gleichschenklig, bzw. bei A rechtwinklig?

JANZEN-Treptow a. R.

969. Ist c die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, so gilt die Beziehung: $\overline{O_3C}^2 - \overline{OC}^2 = 2a(b+c)$.

RUFF-Wien.

970. Ist $DABC$ ein Kreisviereck mit den Diagonalpunkten $DA \times BC \equiv P$, $DB \times CA \equiv Q$, $DC \times AB \equiv R$, so ist: $\frac{PD}{PA} + \frac{QD}{QB} + \frac{RD}{RC} = 1$.

BÖGER-Hamburg.

971. Man soll den geometrischen Ort der Punkte bestimmen, die von zwei festen Punkten A und B einer Vertikalen durch Geschosse von gegebener Anfangsgeschwindigkeit c in gleicher Zeit getroffen werden können.

MICHNIK-Beuthen.

Briefkasten zum Aufgaben-Repertorium.

An Auflösungen gingen ein bis zum 1. Oktober: Bungers-Halle 947. Conrad-Moers 936. 938—942. 944—953. Diethelm-Schwyz 959. Ehrlich-Berlin 958. 959. 961. Ernst-Wien 946—951. Jacob-Erfurt 955. 961—963. Klobasa-Troppau 953. 959. 961. König-Madrid 956. Mahrenholz-Kottbus 954. 956—961. Michnik-Beuthen 955. 958 bis 960. Münst-Ebingen 958. 959. 961—964. 966. 967. Peters-Köln 945—947. 950. Rall-Margentheim 946. 948. 951. 962. 965. 966. Ruff-Wien 948. 959. 961. 962. 966. Sohnius-Wetter/Ruhr 938. 939. 941. 944. 947—950. 956. 959. 961. Sós-Budapest 954. 959. Stiegler-Madrid 915—917 (zu spät) 942. 943. 955—958. 961. Wiedemann-Döbeln 966

Neue Aufgaben sandten ein: a) mit Lösung: Ernst-Wien (1), Hoffmann-Ravensburg (1), Jacob-Erfurt (1), Jonas-Tecklenburg (1), Klobasa-Troppau (1), König-Madrid (4). Michnik-Beuthen (8), Münst-Ebingen (4), Nix-Höchst/Main (1); b) ohne Lösung: Jonas-Tecklenburg (1).

Von *ungenanntem* Einsender (Poststempel Kassel) sind Aufgaben aus der projektiven Geometrie eingegangen. Ich bitte um Namensangabe.

Berichte.

Organisation, Verfügungen.

Der mathematische Lehrplan der Marinefachschulen. Im September 1926 habe ich auf Einladung der Inspektion des Bildungswesens der Marine im Rahmen eines Ausbildungskurses in Kiel für die Lehrer an Marinefachschulen Vorträge über mathematische Didaktik gehalten. Einige Vorbesprechungen mit den mit der Leitung betrauten Persönlichkeiten, namentlich aber die an die Vorträge anschließenden Erörterungen im Kreise der aus ganz Deutschland vollzählig einberufenen, aus Akademikern, Seminarikern und Ingenieuren sich zusammensetzenden Lehrerschaft ließen mich einen Einblick tun in ein Gebiet des Fachschulwesens, das weiten Kreisen gänzlich unbekannt sein dürfte. Da auch der mathematische Unterricht sehr wesentlich an diesem recht umfangreichen Schulbetriebe beteiligt ist, gebe ich hier einen kurzen Bericht über die Schulen[1]) und ihren mathematischen Lehrplan.

Wie im Heere muß sich auch in der Marine jeder Eintretende auf 12 Jahre verpflichten. Die Marinefachschulen dienen nun nicht etwa militärischen Zwecken, sondern der Vorbildung auf einen nach dieser Zeit zu wählenden Beruf. Sie setzen mit dem dritten oder vierten Dienstjahre ein und umfassen 12 Klassen. Es ist zunächst ein dreiklassiger Unterbau vorhanden (Klasse 12—10), der in der Fachschule für Verwaltung und Wirtschaft gegeben ist. Dann bleibt der Schüler entweder in dieser Schule oder geht, wenn er mehr technische Interessen hat, in die Fachschule für Gewerbe und Technik über. Die Klasse 5 bildet einen ersten Einschnitt. Es wird hier eine Abschlußprüfung (wenn der Schüler noch auf der Schule bleibt, eine Zwischenprüfung) abgelegt, die gewisse Berechtigungen gibt. Man ist bestrebt, alle Angehörigen der Marine bis zu diesem Abschluß zu bringen, gegebenenfalls durch Sonderlehrgänge.

Die Oberstufe, die die Klassen 4—1 umfaßt, wird gleichfalls durch eine Prüfung abgeschlossen, der etwa die Primareife entsprechen soll (mindestens eine Fremdsprache). Diese Abschlußprüfung II eröffnet den Eintritt in die gehobene mittlere Beamtenlaufbahn.

Marinefachschulen gibt es in Kiel, Mürwitz, Stralsund, Swinemünde, Pillau, Wilhelmshaven, Cuxhaven, Emden und Borkum.

Bei der Organisation des Unterrichts hat man zu unterscheiden zwischen „laufendem Unterricht" und „lehrgangmäßigem Unterricht". Der letztere kommt für diejenigen in Betracht, die im allgemeinen an Bord, nur für kürzere, dann voll zum Unterricht ausgenützte Zeit an Land sind. Übrigens wird auch an Bord durch Bildung von Arbeitsgemeinschaften u. dgl. für die Weiterarbeit gesorgt. In der folgenden Tabelle sind in der ersten Reihe die im allgemeinen anzunehmenden Dienstjahre angegeben, in der zweiten Reihe die Klassen, in der dritten die gesamten Wochenstundenzahlen für laufenden Unterricht, in der vierten der Anteil, den daran das Fach „Rechnen und Formenlehre" hat, in der fünften

1) Ich verweise dabei auf die kurze Darlegung von J. **Neuberg**, Das deutsche Marinefachschulwesen. Vakanzenzeitung **56** (1926), Nr. 47.

und sechsten Reihe ist dann das gleiche für den lehrgangmäßigen Unterricht geschehen.[1])

1	3	4	5	6	7		8		9	10	11	12	
	Hauptstufe								Oberstufe				
2	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1a	1b
3	9	9	9	9	12	12	12	12	10	10	10	10	32
4	3	3	3	3	2	2	2	2	2	2	2	2	6[2])
5	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	32
6	8	8	8	8	5	5	5	5	6[2])	6[2])	6[2])	6[2])	6[2])

Ziel: Sicherheit und Gewandheit im selbständigen Lösen von Aufgaben durch Rechnung und Zeichnung unter Anwendung von Rechenvorteilen, Proben, Überschlagsrechnungen und kaufmännischem Verfahren. Algebra im Rahmen der praktischen Bedürfnisse. Erziehung zu richtigem, scharfem Gedankenausdruck. Anleitung zu folgerichtiger Schlußweise, insbesondere zu funktionalem Denken. Ausbildung des räumlichen Anschauungsvermögens und der geometrischen Vorstellungskraft. Kräftigung des Zahlengedächtnisses.

Klasse 12: Erweiterung der vier Grundrechnungsarten mit ganzen Zahlen und Dezimalzahlen, Münzen, Maße, Gewichte, Zeitrechnung. Teilbarkeit der Zahlen. Anschauliche Gewinnung gemeiner Brüche als besondere Arten benannter Zahlen. Größtes gemeinschaftliches Maß und kleinstes gemeinschaftliches Vielfache.

Klasse 11: Gemeine Brüche und Dezimalbrüche. Abgekürztes Rechnen mit Dezimalzahlen an einfachen Beispielen unter Hinweis auf die notwendige und hinreichende Genauigkeit.

Klasse 10: Einfache und zusammengesetzte Schlußrechnung mit geradem und umgekehrtem Verhältnis. Prozent- und Promillerechnung mit Anwendung auf Gewinn und Verlust, Brutto und Netto mit den heutigen wirtschaftlichen Verhältnissen entsprechenden Zahlen. Geometrischer Vorbereitungskurs: Betrachtung einfacher Körper und ebener Figuren. Ableitung der Begriffe Richtung, Winkel, Abstand, Parallelität, Symmetrie. Übungen im Gebrauch von Lineal, Winkeldreieck, Zirkel, Winkelmesser. Einfachste Flächenberechnungen. Quadrat, Rechteck, Parallelogramm, Dreieck.

Klasse 9: Zinsrechnung, auch mit Zinszahlen und Zinsdivisor. Teilungs-, Mischungs-, Gesellschaftsrechnung. Flächenberechnung: Trapez, Kreis. Vorbereitung des arithmetischen Unterrichts an geeigneten einfachen Beispielen durch Verwendung von Buchstaben statt bestimmter Zahlen. Auswertung von Buchstabenausdrücken durch Einsetzung bestimmter Zahlen.

Klasse 8: Effekten-, Wechsel-, Rabatt-, Diskontrechnung. Algebra wie in Klasse 9. Grundaufgaben des Dreiecks, einfache Dreieckskonstruktionen, Sätze über Parallelogramm, Rechteck, Trapez.

Klasse 7: Versicherungs- und Steuerrechnen. Grundrechnungen mit allgemeinen Zahlen. Einführung in die Kreislehre bis zur Tangente einschließlich. Die einfachsten Körper und ihre Berechnung: Würfel, Quader, Prisma, Pyramide, Zylinder, Kegel, Kugel.

Klasse 6: Zinseszinsrechnen, kaufmännisches Rechnen. Einführung in positive und negative Zahlen. Zahlenlinie. Abschluß der Kreislehre. Wiederholung der Körperberechnung.

Klasse 5: Wiederholung der bürgerlichen Rechnungsarten. Vertiefung des algebraischen Unterrichts einschließlich Brüche und Verhältnisse. Flächengleichheit. Berechnung geradlinig begrenzter Figuren.

---

1) Diese Zahlen und die Lehrpläne sind entnommen der Druckschrift: Verwaltung und Wirtschaft. Lehrplan für den Unterricht in der Marinefachschule für Verwaltung und Wirtschaft nebst Prüfungsordnung. Berlin 1925, Reichsdruckerei.

2) In dem Stundenplan der Abteilung für nichtbeamtete Berufe werden statt 6 nur 4 Stunden gegeben.



Klasse 4: Kaufmännisches Rechnen. Kontokorrent- und Effektenrechnung. Graphische Darstellung der Funktionen $y = ax + b$, $y = x^2$. Graphische Fahrpläne. Wiederholung aus der Geometrie.

Klasse 3: Kaufmännisches Rechnen. Devisenrechnung und Kalkulation. Gleichungen ersten Grades mit einer Unbekannten mit Anwendung dieser Gleichungen auf Aufgaben aus dem bürgerlichen Leben. Pythagoreischer Lehrsatz. Verwandlung, Teilung, Vervielfältigung von ebenen Figuren:

Klasse 2: Kaufmännisches Rechnen. Vertiefung und Übung in der Zins- und Terminrechnung. Gleichungen ersten Grades mit mehreren Unbekannten. Graphische Lösungen. Verhältnisgleichheit von Strecken. Ähnlichkeit der Figuren.

Klasse 1a: Kaufmännisches Rechnen. Vertiefung und Übung in der Warenberechnung und Wechselrechnung. Anwendung der Gleichungen ersten Grades mit mehreren Unbekannten. Proportionalität am rechtwinkligen Dreieck und am Kreis.

Klasse 1b: Wiederholung des gesamten Stoffes. Vertiefung des kaufmännischen Rechnens. Arbitrage. Potenzen mit ganzen positiven Exponenten, Lehre von den Quadratwurzeln. Quadratische Gleichungen mit einer Unbekannten. Eventuell Erklärung der vier Funktionen Sinus, Kosinus, Tangens, Kotangens für spitze Winkel; graphische Darstellung ihres Verlaufs, Anwendung auf das rechtwinklige Dreieck. Bearbeitung von Aufgaben in Form von Prüfungsaufgaben.

Einige wenige Bemerkungen zu diesem Pensenplan! Vielleicht könnte dem Hinweis auf die Bedeutung der graphischen Verfahren in der Zielangabe auch in der Pensenfolge manchmal noch stärker Ausdruck gegeben werden. Also graphische Veranschaulichungen von Größenreihen schon beim einfachen Rechnen, starke Heranziehung empirischer Funktionen, gleicherweise wegen ihrer praktischen Bedeutung wie als Vorbereitung auf die linearen, quadratischen und trigonometrischen Funktionen! Die linearen Gleichungen würde ich schon früher heranziehen und im bürgerlichen Rechnen verwenden. Wenn man den pythagoreischen Lehrsatz auch rechnerisch ausnutzen will, muß man irgendein Verfahren zur Bestimmung von Quadratwurzeln zur Hand haben. Wenn man schon Trigonometrie treibt, würde ich mich nicht mit den Funktionen spitzer Winkel begnügen, sondern auch die stumpfen hinzunehmen. Von der Trigonometrie des allgemeinen Dreiecks genügen dann durchaus Sinus- und Kosinussatz. Selbstverständlich kann man ganz gut ohne Logarithmen auskommen, wenn, wie es geschieht, das abgekürzte Rechnen stark betrieben wird. Ich gebe aber doch zu erwägen, ob man nicht wegen seiner praktischen Bedeutung wenigstens in 1b den Rechenschieber benutzt. Eine Einführung in den praktischen Gebrauch ist schließlich auch ohne Logarithmen möglich.

Göttingen. W. Lietzmann.

Die angewandte Mathematik im Schulunterricht. Ein aus den Herren Feigl, Willers, Zabel bestehender Unterausschuß des mathematischen Reichsverbandes hat die nachfolgenden Richtlinien für die Geltendmachung der angewandten Mathematik im Schulunterricht aufgestellt.

I. Lehrkräfte: 1. Die Lehrer der Mathematik sollen während ihres Studiums, auch wenn sie die Lehrbefähigung für angewandte Mathematik nicht erwerben wollen, die wichtigsten Vorlesungen aus der angewandten Mathematik (besonders praktische Analysis) gehört und mindestens ein mathematisches Praktikum absolviert haben.

2. Der Rechen- und Mathematikunterricht der Unterstufe, der Mathematik- und Physikunterricht der Mittel- und Oberstufe, ebenso wie der an anderer Stelle bereits ausführlich behandelte Unterricht in der darstellenden Geometrie hat in der Hand desselben Lehrers zu liegen.

II. Ziel und Einstellung des Unterrichts. Das Ziel der angewandten Mathematik im Schulunterricht ist, dem Schüler eine Vorstellung von der Wichtigkeit der Mathematik und von ihrem Geltungsbereich in der Wirklichkeit zu geben und ihm zu zeigen, wie das mathematische Problem gefaßt werden kann und mit welcher Annäherung die Vorgänge mathematisch dargestellt werden können. Dazu muß der Schüler lernen, den mathematischen Ansatz einer Aufgabe (unter Anleitung, aber doch mit dem Ziel der Selbständigkeit) zu finden, alles Nichtmathematische der Aufgabe abzustreifen und ihren mathematischen Kern herauszuarbeiten.

Dieses Ziel kann im Schulunterricht sehr wohl ohne Vermehrung des Pensums erreicht werden, wenn die angewandte Mathematik von Anfang an Einstellung, Führung und Stoffauswahl des Unterrichts beeinflußt.

Aus den Methoden der angewandten Mathematik ist im Unterricht aller Stufen besonders folgendes zu berücksichtigen:

1. Auf die Sicherheit und Gewandtheit im numerischen Rechnen ist der größte Wert zu legen. Dem Schüler muß bewußt werden, daß er für die Richtigkeit seiner Resultate einzustehen hat; daher ist er daran zu gewöhnen, nach Möglichkeit durch rechnerische und zeichnerische Proben die Richtigkeit seiner Resultate nachzuprüfen.

2. Der Schüler ist zu sauberer Ausführung und übersichtlicher Anordnung der Zeichnungen und Rechnungen anzuhalten und darin in geeigneten Fällen (z. B. bei Gleichungen mit mehreren Unbekannten, logarithmischen und trigonometrischen Rechnungen) durch Angabe eines Rechenschemas zu unterstützen, dessen gedankenlose und mechanische Anwendung aber sorgfältig zu vermeiden ist.

3. Vor Ausführung der eigentlichen Rechnung soll der Schüler — und zwar schon von der untersten Klasse ab — sich durch eine Überschlagsrechnung über die zu erwartende Größenordnung des Resultats klar werden.

4. Der Schüler ist auf den Unterschied zwischen genauer und angenäherter Angabe einer Größe eindringlichst hinzuweisen; insbesondere darf das Rechnen mit den genauen Werten nicht durch das häufig gedankenlose Rechnen mit dezimalgeschriebenen Näherungswerten verdrängt werden.

5. Der Schüler soll den Gang der Rechnung stets so einrichten, daß der Fehler des Endresultats möglichst klein wird. Die Genauigkeit der Rechnung und der Rechenhilfsmittel ist der Genauigkeit der Daten anzupassen; das Resultat darf keine Genauigkeit vortäuschen, die in den Daten nicht enthalten ist.

6. Die graphische Darstellung ist von Anfang an im Unterricht ausgiebig zu benutzen; bei der graphischen Darstellung empirisch gegebener Funktionen ist zu beachten, daß die Genauigkeit der Darstellung etwa der Genauigkeit der Messung entspricht.

7. Bei der Auflösung von Gleichungen, sowohl von algebraischen als auch von transzendenten, bei Berechnung von Flächen- und Rauminhalten usw. sind die graphischen und rechnerischen Näherungsmethoden zu berücksichtigen. Dabei hat man nach Möglichkeit durch Berechnung einer oberen und unteren Schranke die erreichte Näherung zu bestimmen.

III. Aufgaben aus den Anwendungsgebieten. Die Beispiele aus den Anwendungsgebieten dürfen nicht wirklichkeitsfremd am Schreibtisch konstruiert werden; sie sind vielmehr der Wirklichkeit zu entnehmen und den realen Ver-



hältnissen möglichst anzupassen. *Entscheidend für die Auswahl der Aufgaben aus den Anwendungen ist und bleibt jedoch ihr mathematischer Gehalt; die Aufgaben sind daher so auszuwählen, daß die stoffliche Belehrung den Schüler nicht zu sehr ablenkt und daß die dafür aufzuwendende Zeit in einem vernünftigen Verhältnis zum mathematischen Gewinn bleibt.* Das wird in erster Linie bei den im parallel laufenden Unterricht behandelten Abschnitten der Mechanik und Physik und bei den dabei besprochenen technischen Anwendungen der Fall sein.

Berlin. Der Mathematische Reichsverband
HAMEL.

Aus der Forschung.

Die „Kenelly-Heaviside" Schicht der Atmosphäre; neue Beobachtungen und Theorien über die Ausbreitung elektrischer Wellen. (Mit 3 Figuren im Text.) — **1. Das Echo kurzwelliger Zeichen vom Gegenpol der Erde.** E. Quäck[1]), der Direktor der Transradio AG., gab sehr auffallende Beobachtungen über die Ausbreitung kurzer Wellen bekannt. Seit Oktober 1926 betreibt die Radio Corporation of America einen Kurzwellensender mit der Wellenlänge $\lambda = 16{,}175$ m. Er vermittelt den Verkehr mit Deutschland an den Tagesstunden, in denen die Übertragungsstrecke im vollen Tageslichte liegt. Dabei wird die Sendegeschwindigkeit auf 80 Wörter in der Minute und mehr gesteigert. Ähnlich arbeitet der Nauener Sender im Verkehr mit Buenos Aires auf einer Wellenlänge von $\lambda = 15$ m. Überraschenderweise verbraucht der Amerikasender dabei nur eine Antennenleistung von 12 Kilowatt, der Nauener Sender gar nur von 8 Kilowatt.[2]) An der Empfangsstelle in Geltow (30 km von Nauen) machten sich nun im Schnellverkehr sonderbare Störungen bemerkbar; die telegraphischen Zeichen verwirrten sich; es schien, als wenn die amerikanischen Sendestöße nicht nur einmal, sondern kurz danach noch ein zweites Mal einträfen und damit in spätere andere, erstmalig ankommende Zeichen hineinfielen. Das führte zu systematischen Untersuchungen: Mit einem Siemens-Oszillographen sehr hoher Eigenschwingungszahl wurden die eintreffenden Wellenzüge photographisch registriert. Damit ergab sich nun einwandfrei, daß ein von Rocky Point nach Geltow gesandtes Zeichen 0,0957 sec nach dem ersten Eintreffen noch einmal, und zwar mit fast gleicher Intensität zur Registrierung kam. — Überraschenderweise bewährt sich für diese auffällige Beobachtung folgende Deutung: Die von Rocky Point ausgehende elektromagnetische Welle verbreitet sich sehr wenig geschwächt um die ganze Erde herum; es trifft daher von ihr zum ersten Male in Geltow ein Anteil ein, der den kürzeren Bogen des größten Kreises von Geltow und Rocky Point durchlaufen hat, ein zweiter Anteil erreicht Geltow längs des größeren Bogens dieses Kreises. Aber es macht sich dabei noch ein eigenartiger Umstand bemerklich. Die kürzeste Entfernung Geltow-Rocky Point ist 6330 km, der größere Bogen somit $40000 - 6330 = 33670$ km. Die Wanderungsgeschwindigkeit der Welle ist mit $c = 300000$ km anzusetzen. Das Zeichen hätte also zum ersten Male nach $6330 : 300000$ sec,

---

1) E. Quäck, Neues über die Ausbreitung von kurzen Wellen. Jahrb. d. drahtl. Telegraphie 28, 177, 1926. Elektrische Nachrichten-Technik 4, S. 74, 1926.

2) Man vergleiche damit den Arbeitsaufwand von 500 Kilowatt einer Hochfrequenzmaschine der Gesellschaft für drahtlose Telegraphie und gar von 1100 P. S., die Marconi zur Verfügung stehen.

zum zweiten Male nach 33670 : 300000 sec eintreffen, der Zeitunterschied der Registrierungen somit (33670 — 6330) : 300000 sec = 27340 : 300000 = 0,0911 sec betragen müssen. Das stimmt einigermaßen zu den gemessenen 0,0957 sec. Doch ist diese Messung zu sicher, als daß der Unterschied 0,0957—0,0911 sec auf einem Beobachtungsfehler beruhen könnte. Es bleibt für die Erklärung dieser Unstimmigkeit nur ein Ausweg übrig: **Der Wellenzug hat seine Ausbreitung nicht unmittelbar an der Erdoberfläche genommen, sondern in einem bestimmten Abstande h von ihr.** Es ist in die Rechnung als Länge des durchlaufenen größten Kreises nicht der Erdumfang

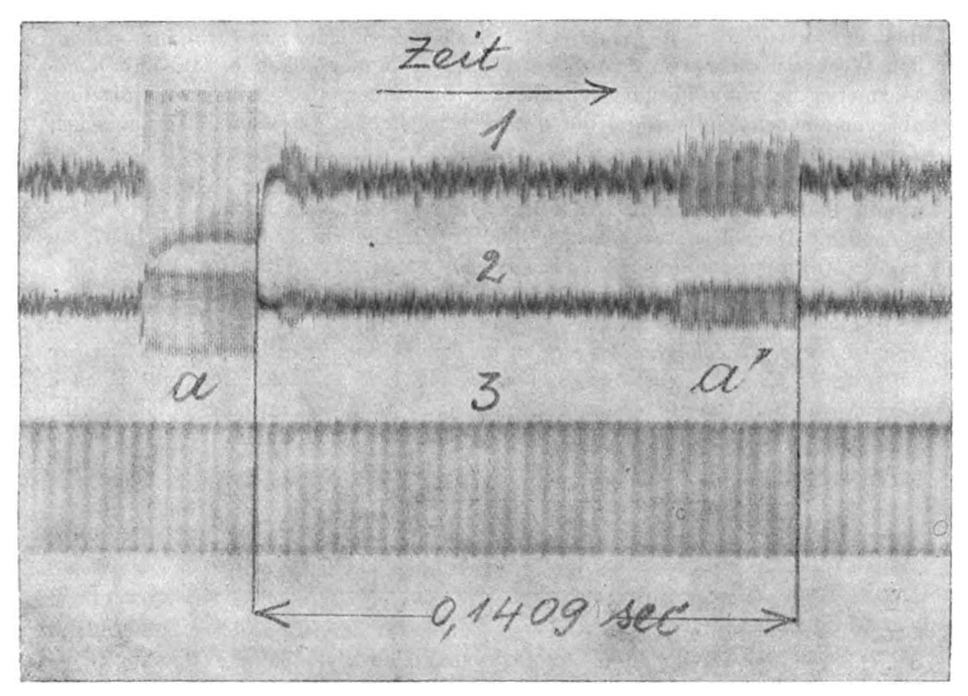


Fig. 1.

mit $2\pi R = 40000$ km einzusetzen, sondern ein Kreis $2\pi(R+h) = 2\pi R + 2\pi h = 40000 \text{ km} + 2\pi h$. Dann muß die Laufzeit sich gegenüber der berechneten im Verhältnis $(40000 + 2\pi h) : 40000$ vergrößern; es gilt also $(40000 + 2\pi h) : 40000 = 0{,}0957 : 0{,}0911$. Daraus berechnet sich $h = 321$ km. — Eine andere Messung gleicher Art bei einer Wellenlänge von $\lambda = 22$ m ergab Ähnliches: $t = 0{,}0945$ sec statt 0,0911 sec. Es berechnet sich für diesen Fall $h = 238$ km.

Anschließend an diese Erfahrungen führte Prof. Karl Willy Wagner[1]), der Präsident des Telegraphentechnischen Reichsamtes, am 13. November 1926

1) Karl Willy Wagner, Die Ausbreitung kurzer Wellen rund um die Erde. Sitzungsber. d. Preuß. Akad. d. Wissensch. 16, XII, 1926. Elektr. Nachrichten-Technik 4, S. 74, 1927.

den großartigen Versuch durch, von Nauen aus ein Zeichen rund um die Erde zu senden und sowohl das ausgehende Zeichen sowie sein vom Gegenpol der Erde zurückkehrendes „Echo" in Geltow zu registrieren. Das gelang mit der für Buenos Aires bestimmten Sendeanordnung vollkommen. Die beistehende Wiedergabe des Aufnahmefilms (Fig. 1) läßt das höchst eindrucksvoll erkennen. Auf dem Photogramm (Fig. 1) finden sich drei Zeilen folgender Bedeutung: Die oberste von ihnen ist die Aufnahme des von Nauen ausgehenden Zeichens mit einem Oszillographen von 1000 Eigenschwingungen in der Sekunde, die zweite eine gleiche mit einer weniger empfindlichen Oszillographenschleife von 10000 Eigenschwingungen, und das untere breite Band ist die zur Auswertung dienende gleichzeitige Aufnahme der Schwingungen eines zur Verfügung stehenden Wechselstromes von 1884 Schwingungen in der Sekunde. Die mit a bezeichneten Schwingungskurven sind die von Nauen ausgehenden, unmittelbar aufgenommenen Wellenzüge, die mit a' bezeichneten dieselben telegraphischen Zeichen, nachdem sie den Erdball umlaufen haben. Bemerkenswerterweise erscheinen sie noch mit etwa der halben Stärke registriert im Vergleich zu der der unmittelbar ankommenden. Der Zeitunterschied wurde im Mittel zu 0,1407 sec gemessen. Danach berechnet sich die Laufstrecke zu $300000 \times 0{,}1407$ sec $= 42210$ km und die Höhe h, in welcher diese Kurzwellen der Wellenlänge $\lambda = 15$ m gewandert sind, zu $(42210 - 40000) : 2\pi = 350$ km.

Diese Beobachtungen lehren fast handgreiflich, daß die kurzen elektrischen Wellen für große Signalweiten sich in großen Höhen der Atmosphäre, und zwar ohne starke Energieverluste ausbreiten, als ob sich dort eine sehr gut leitende Schicht befände. Die Höhe dieser Schicht muß nach den mitgeteilten Beobachtungen bei etwa 300 km liegen. Ein Vergleich der noch einmal in einer kleinen Tabelle zusammengestellten Ergebnisse

λ	22 m	16,175 m	15 m
h	238 km	321 km	350 km

läßt vermuten, daß eine sehr große Abhängigkeit der Höhe dieser „führenden" Schicht von der Wellenlänge besteht, wenngleich vielleicht die Messungen — als Differenzwerte — doch nicht genau genug sind, diesem Schluß ein zu großes Gewicht zu verleihen.

2. Das Problem der Ausbreitung elektrischer Wellen ohne Berücksichtigung der Atmosphäre; die Austinsche Gleichung. Schon die ersten Erfahrungen über die Ausbreitung von Signalen vermittels elektrischer Wellen über lange Strecken widersprachen völlig den Erwartungen. Sie trafen in großer Entfernung vom Sender mit viel größerer Intensität ein, als man nach theoretischen Vorstellungen annehmen konnte. Dazu kamen andere Rätsel. Deshalb ist der Gegenstand in einer sehr großen Anzahl von Arbeiten, teils theoretischer, teils praktischer Natur behandelt worden. In einem zusammenfassenden Bericht vermag A. Sacklowski[2]) nicht weniger als 474 hierher gehörige Veröffentlichungen aufzuführen. Trotzdem kann die Frage nach den physikalischen Gründen der beobachtbaren Aus-

2) A. Sacklowski, Die Ausbreitung der elektromagnetischen Wellen. Elektr. Nachrichten-Technik 4, S. 31—74, 1927.

breitung elektrischer Wellen noch keineswegs als gelöst gelten. Aber wir dürfen wohl sagen, daß in den letztvergangenen Jahren die theoretischen Anschauungen insbesondere im Anschluß an eine scharfsinnige Bemerkung von Larmor so weit gesichert sind, uns einen guten Einblick in den Mechanismus der Ausbreitung der Welle zu verschaffen und uns in naher Zukunft eine völlige Aufklärung zu verheißen. — In dem Bewußtsein, daß elektrische Wellen und Licht wesensgleich sind, mußte von den Kindertagen der Wellentelegraphie an immer wieder die Frage aufgeworfen werden: Warum verlassen die elektrischen Wellen vom Sender aus nicht die Erde tangential und strahlen in den Weltenraum hinaus, wie Licht es tut, sondern folgen auf weite Strecken der Krümmung der Erdoberfläche? Von einer wesentlichen Beeinflussung der Ausbreitung durch die Erdatmosphäre glaubte man dabei zunächst wie beim Licht absehen zu dürfen. — Wie eine einfache Überlegung lehrt, darf man sich keinesfalls als Antwort auf jene Frage mit dem Hinweise zufrieden geben, daß im Gegensatz zu den Lichtquellen die millionenmal längeren Strahlen der drahtlosen Telegraphie um die Erde herum eine starke Beugung erfahren, die sie auch auf weite Entfernungen unterhalb des Horizonts beobachtbar machen, wie etwa die langwelligen Schallwellen nach unserer täglichen Erfahrung ohne scharfen Schallschatten um Hindernisse herumgehen. Wir fassen dazu den angeführten Versuch von K. W. Wagner ins Auge. Läge in dem Umkreisen des Erdkörpers durch die 15-m-Welle nur ein wellentheoretisches Beugungsphänomen vor, so müßte auch Strahlung von 30 Millionen mal so kleiner Wellenlänge, das wäre sichtbares Licht, mit entsprechenden Energieanteilen um eine 30 Millionen mal so kleine Kugel als die Erde, das wäre eine solche von 42 cm Durchmesser, herumgebeugt werden. Das widerspricht aber der allereinfachsten täglichen Erfahrung; eine solche Kugel wirft in sichtbarem Licht vielmehr einen recht scharfen Schatten. — Daher wurde schon früh eine andere Auffassung maßgebend. In der bekannten Lecherschen Versuchsanordnung[1]) laufen elektrische Wellen an zwei parallelen Metalldrähten entlang; sie werden ohne wesentlichen Energieverlust „geführt“. Mit längs leitenden Drähten geführten elektromagnetischen Wellen hat man heute sogar mit vollem technischen Erfolge eine Hochfrequenztelephonie auf weite Entfernungen durchführen können[2]); hierbei tritt der Erdkörper an die Stelle des einen Lecherschen Drahtes. In ähnlicher Weise denkt man sich seit fast einem Menschenalter die Wellen der drahtlosen Telegraphenstationen von der elektrisch gut leitenden Erde, allerdings nur einseitig, geführt. Besonders Lecher hat seinerzeit diese Vorstellungen herausgearbeitet. Er beschrieb den Vorgang der Ausbreitung anschaulich in folgender Weise: Lädt sich in einer Schwingungsphase die Sendeantenne — die in der Grundschwingung erregt sein möge, also am Ende eine Bauchstelle der Spannung, an ihrer Erdung eine Knotenstelle besitzt — oben positiv auf, so geht die entsprechende negative Ladung in die Erde bzw. auf die Erdoberfläche. Die von der positiven Antennenladung ausgehenden Feldlinien (Fig. 2) haben in dieser negativen Ladung ihr Ende. Diese Ladung breitet sich nun (fast) mit Lichtgeschwindigkeit längs der Erdoberfläche (in der äußersten Erdschicht) von der Antenne fort aus. Nach Umkehr der Schwingungsphase gleitet von der Antenne

1) s. z. B. Grimsehl, Lehrb. d. Physik II. Bd., V. Aufl., S. 624.
2) a. a. O. S. 657.

her längs der Erdoberfläche eine entsprechende positive Ladung, die nun die Anfänge der in der vorhereilenden negativen Ladung endenden, von der Antenne abgeschnürten Kraftlinien enthält. So läuft ein elektrisches Wechselfeld — das ist die Welle — durch Ladung an die leitende Erde gefesselt, von der Antenne aus fort. — Diese Auffassung ist bis heute maßgebend geblieben.

Die in der Welle enthaltene Energie verteilt sich beim Fortschreiten auf einen immer größeren Raum; daher muß die (energetisch gemessene) Intensität der Welle und mit ihr die deren Quadratwurzel proportionale Feldstärke mit der Entfernung abnehmen. Alle theoretischen Behandlungen, deren Ziel war, die Abhängigkeit der Feldstärke $\mathfrak{E}$ mit der Entfernung d von der Antenne auf

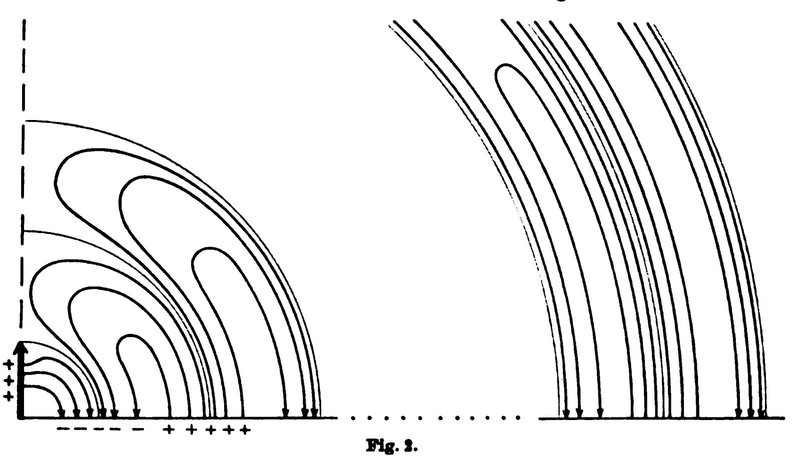


Fig. 2.

Grund dieser Vorstellungen zu berechnen, haben nun insofern versagt, als praktische Versuche regelmäßig weit größere Feldstärken erkennen ließen, als theoretisch zu begründen war. L. W. Austin insbesondere hat mit Unterstützung der amerikanischen Kriegsmarine und des Bureau of standarts langjährige und sorgfältige Beobachtungen zusammengetragen, welche die Abhängigkeit der Feldstärke $\mathfrak{E}$ $\left(\text{in } \frac{\text{Mikrovolt}}{\text{m}}\right)$ einer Wellenstrahlung von der Entfernung d (in km) und der Wellenlänge λ (in km) zum Ziele hatten. Er konnte seine Ergebnisse durch die Formel

$$\mathfrak{E} = \frac{120\pi h \cdot J}{\lambda \cdot d} \sqrt{\frac{\vartheta}{\sin\vartheta}} \cdot e^{-\frac{0{,}0014\,d}{\lambda^{0{,}6}}} \; \frac{\text{Mikrovolt}}{\text{m}}$$

zusammenfassen und darstellen. In ihr bedeutet noch h die Antennenhöhe der Sendeantenne (in m), J die maximale Stromstärke (in Ampere) in der Antenne und ϑ der kürzeste Bogen auf der Erde zwischen Antenne und Beobachtungsort in Bogenmaß. Für lange Wellen (5—17 km) hat sich die empirische Gleichung gut bewährt, d. h. beobachtet man über eine längere Zeit zwischen denselben beiden Stationen, so gehorchen die *Maximalwerte* der Beobachtung (bei vollkommener Dunkelheit der Sendestrecke) dieser Gleichung, während die Einzelbeobachtungen über mehrere 100% hin- und herschwankende Werte für die Feldstärke ergeben können.

3. Verzerrung der Welle durch Energieabsorption an der Erdoberfläche; Bodenwelle und Raumwelle. Der exponentielle Faktor der Austinschen Gleichung trägt einem Energieverlust der Welle Rechnung. Zu einem Teile wird dieser durch die Leitfähigkeit der Luft, zum andern durch den Leitungswiderstand der nicht vollkommen leitenden Erde veranlaßt.[1] Die Leitfähigkeit der Luft (über deren Mechanismus siehe unten 6a) hat einen teilweisen Potentialausgleich innerhalb des fortschreitenden Wellenfeldes im Gefolge und damit Energieverlust und Schwächung des Feldes. Da die Welle bis zu einem gewissen Betrage von oben her in die Erde eindringt[2] und daher die fortschreitenden Ladungen unmittelbar elektrischen Strömen in der Erdrinde entsprechen, die Joulesche Wärme entwickeln, ist dieser Energieverlust im Erdkörper noch verständlicher.

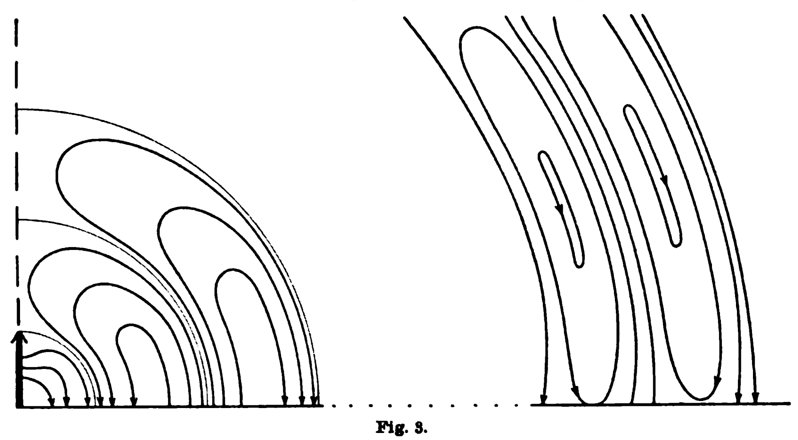


Fig. 3.

Sehen wir zunächst einmal von der weit geringeren Leitfähigkeit der Luft ab, so muß die in der äußersten Erdrinde entwickelte Joulesche Wärme aus der Energie des Wellenfeldes gedeckt werden. Das kommt so zustande: Innerhalb der äußersten Erdrinde wandert die Welle bzw. die von ihr induzierte Ladung wegen der endlichen Leitfähigkeit etwas weniger schnell (s. dazu Gleichung 12 unter 6c für $N_2 = 0$) wie die Welle im unmittelbar benachbarten Luftraume. Das hat die Folge, daß die Feldlinien der Welle auf der Erdoberfläche nicht genau senkrecht stehen, wie sie es bei einem vollkommenen Leiter, in den sie *nicht* hineindringen, tun würden, sondern im Sinne des Vorwärtsschreitens ein wenig nach vorn geneigt sind. (Fig. 3 rechts; die Neigung ist stark übertrieben.) Da aber nach dem Poyntingschen Satze die Energiewanderung stets senkrecht

1) Hierzu kommt noch eine „Energiezerstreuung", indem zu der Energieausbreitung längs der Erdoberfläche noch eine Energiestrahlung von der Erdoberfläche in den Raum hinaus stattfindet. Theoretisch würde diese Energiezerstreuung auch bei unendlich großem Leitvermögen der Erde und einer homogenen, vollständig isolierenden Atmosphäre einen Zerstreuungsfaktor $e^{-\frac{0{,}0019\,d}{\sqrt[3]{\lambda}}}$ bedingen. S. Zenneck-Rukopp, Lehrbuch der drahtlosen Telegraphie. S. 305 u. S. 307. Stuttgart 1925.

2) Nach Zenneck-Rukopp a. a. O., S. 297, beträgt die Amplitude einer Welle, die in gut leitendes Seewasser eindringt, bei $\lambda = 700$ m in 1 m Wassertiefe noch ungefähr den 10. Teil des Wertes an der Oberfläche.

zur Feldrichtung geschieht, ist dadurch die Vorbedingung geschaffen, daß die Erde aus der Welle Energie zugestrahlt erhält.

Mit fortschreitender Welle verschwindet also aus dem unteren Teile des Wellenfeldes Feldenergie, d. h. das Feld wird unmittelbar an der Erdoberfläche mehr und mehr geschwächt. Die Dichte der Feldlinien nimmt ab, während sie weiter oben keine Schwächung durch Energieverlust erfährt. Dadurch verschlingen sich aber die Enden der Feldlinien an der Erdoberfläche (Fig. 3 rechts). Das bringt eine grundsätzliche Änderung der Form des Wellenfeldes: Während bei einer vollkommen leitenden (und zunächst „eben" gedachten) Erde — in welche die Welle nicht eindringt — die Feldlinien immer senkrecht zur Erdoberfläche bleiben und erst durch einen an der Erdoberfläche „gespiegelten", zu ihrem vollkommen symmetrisch liegenden Feldanteil geschlossen zu denken sind[1]), besteht wegen der nicht vollkommenen Leitfähigkeit der Erde tatsächlich die Welle immer aus zwei wohl unterscheidbaren Anteilen, nämlich aus einem Feldanteile, dessen Feldlinien noch in der Erdoberfläche enden und auf ihr senkrecht stehen, der „Bodenwelle", und einem Anteile, dessen Feldlinien sich nach unten hin geschlossen haben, einer „Raumwelle".[2]) Dieser letztere Anteil wird nun von der Erde nicht mehr „geführt", er hat das Streben, die gekrümmte Erdoberfläche tangential zu verlassen. Eine in der Nähe der Sendeantenne fortschreitende Welle ist noch fast ungeändert „Bodenwelle" (Fig. 3 links). Sie ändert durch die Energieabsorption in der Erdrinde aber mit wachsender Entfernung vom Sender ihren Charakter; ihr Anteil, der sich wie eine „Bodenwelle" verhält, wird geringer und geringer und ist in einem bestimmten Abstande vom Sender praktisch vernichtet, während der andere Anteil als nicht mehr vom Erdboden geführte „Raumwelle" seinen Weg fortsetzt. Je kleiner die Wellenlänge ist, desto leichter löst sich der „Raumwellenanteil" von der Führung durch die Erde (Lichtwellen!) los; lange Wellen (von 5—20 km) werden wohl immer als „Bodenwellen" beobachtet (s. dazu unten 7a); nur auf sie bezieht sich die Austinsche Formel (s. o. 2).

4. Die Sonderheit der Ausbreitung kurzer Wellen. Eine Überraschung brachten die neueren Versuche mit kurzen Wellen (10 m bis 100 m) insofern, als sie im Gegensatz zu den langwelligen Sendern Strecken im Tageslicht verhältnismäßig besser überbrückten als solche auf der Nachtseite der Erde. Doch liegt eine sehr starke Abhängigkeit von der Wellenlänge hierbei vor. Sie ge-

1) s. z. B. Grimsehl, a. a. O. S. 638, Fig. 556.

2) Die Unterscheidung einer stets miteinander gekoppelten „Oberflächenwelle" und einer „Raumwelle" rührt von A. Sommerfeld her; er definiert als erstere jenen sich aus der Integration der Wellengleichung ergebenden Anteil der (längs einer Ebene) fortschreitenden Welle, deren Feldstärke proportional mit der Quadratwurzel aus der Entfernung d abnimmt $\left(\mathfrak{E} \sim \frac{1}{\sqrt{d}}\right)$, als diese den Anteil, dessen Feldstärke mit der Entfernung abnimmt $\left(\mathfrak{E} \sim \frac{1}{d}\right)$ wie nach der Austinschen Formel. — Die in diesem Referate gebrauchten Begriffe „Bodenwelle" und „Raumwelle" haben einen anderen physikalischen Sinn, sind also mit den Sommerfeldschen formalen Begriffen nicht identisch; denn in unserer „Bodenwelle" nimmt (längs einer Ebene) die Feldstärke keineswegs mit $\sqrt{d}$, eher mit d ab.

horchen aber der Austinschen Formel ganz und gar nicht mehr. Bemerkenswert ist ein ausgesprochenes Minimum der Empfangsstärke, das z. B. für $\lambda = 44$ m in etwa 200 km Entfernung liegt.[1]) Es ist in dieser Entfernung die „Bodenwelle" abgeklungen; in größerer Entfernung wird Energie von der „Raumwelle" von oben her nachgeliefert. Daß die „Bodenwelle" für den Empfang auf kleine Entfernungen (50 km) maßgebend ist, zeigt die starke Abhängigkeit der Intensität von der Bodenbeschaffenheit der überbrückten Strecke. Von $\lambda = 33$ m an verwandelt sich dieses Minimum sogar in eine „Zone des Schweigens" zwischen etwa 80 km bis 250 km. Mit größerer Entfernung wächst die Empfangsstärke wieder. Die „Sprungentfernung" des Wiedereinsetzens des Empfangs ist desto größer, je kleiner die Wellenlänge ist; bei kleineren Wellenlängen als 10 m gibt es eine zweite Zone des Empfangs nicht mehr, nachdem die Sprungentfernung bei 15 m Wellenlänge auf etwa 2000 km hinausgerückt ist. Im übrigen zeigt sich die Ausbreitung dieser kurzen Wellen als äußerst abhängig von der Tageszeit.

5. Die leitende Schicht von Kenelly und Heaviside. Zur Erklärung des Widerspruchs zwischen der Erfahrung beim Empfang drahtloser Zeichen über große Entfernungen und den theoretischen Überlegungen aller namhaften Forscher, hat man schon frühzeitig angenommen, daß der vom Sender aufwärts gestrahlte Teil der Wellen aus den Höhen der Atmosphäre zurückkehrt, etwa von einer in großer Höhe befindlichen leitenden Schicht zurückgeworfen wird. Fast gleichzeitig machten A. E. Kenelly (15. III. 1902) in Amerika und Heaviside in England (XII. 1902) diesen Vorschlag. Nur zögernd haben sich die Physiker mit einer solchen Vorstellung befreundet. In der Tat wissen wir über die physikalische Beschaffenheit der Höhen unserer Atmosphäre über 30 km hinaus äußerst wenig. Nur soviel können wir mit Bestimmtheit sagen, daß z. B. in 100 km Höhe der Druck auf einige Tausendstel mm heruntergegangen sein muß, daß aber trotzdem diese Dichte genügt, Sternschnuppen zum Aufleuchten zu bringen und das Nordlicht entstehen zu lassen. Es muß aber als ausgeschlossen gelten, einer solchen Atmosphäre etwa metallische Leitfähigkeit, woran man bei dem Begriff der Reflexion elektrischer Wellen vielleicht zunächst denkt, zuschreiben zu wollen. Wir vermögen ferner keinen Grund einzusehen, warum eine solche Schicht eine verhältnismäßig scharfe reflektierende Grenze haben sollte, nach der man oft gesucht hat und die man wiederholt in der Gegend von etwa 80 km vermeinte festgestellt zu haben.[2])

Daß die Atmosphäre für die Ausbreitung der Wellen eine bedeutende Rolle spielt, lehren zunächst die bekannten Erfahrungen, daß (langwellige) drahtlose Signale auf der Nachtseite der Erde viel weniger absorbiert werden als auf der Tagseite. Die Leitfähigkeit der Schichten, in welchen die elektrischen Wellen wandern und absorbiert werden, muß also tagsüber größer sein als in der Nacht. Seit langer Zeit ist nun die Leitfähigkeit der tieferen Atmosphäre ein besonderer Beobachtungsgegenstand vieler Geophysiker geworden.[3]) Die auf-

---

1) Hessing, Schelling u. Southworth, Some measurements of short wave transmission. Proc. J. R. E. 14, 613, 1926.

2) E. V. Appleton u. M. A. F. Barnett, Proc. Roy. Soc. (London) A. 109, 621, 1925.

3) Siehe die schöne Zusammenstellung von Victor F. Heß, Die elektrische Leitfähigkeit der Atmosphäre und ihre Ursachen. Sammlung Vieweg Heft 84/85. Braunschweig 1926.

fälligste Erfahrung besteht darin, daß die Leitfähigkeit mit der Erhebung über den Erdboden äußerst stark zunimmt; im beschleunigten Anstieg erreicht sie in 9 km Höhe, also noch in der Troposphäre, schon den 27fachen Wert von dem am Erdboden gültigen. Mancherlei Ursachen kann man dafür anführen, die aber auch in größeren Höhen, in der Stratosphäre, bis 400 km hinauf ionisierend auf die Luftmoleküle wirken. Vor allem muß das äußerste Ultraviolett der Sonnenstrahlung, das schon in unerreichbaren Höhen vollständig absorbiert wird, in diesem Sinne wirken, daneben vielleicht die von Heß entdeckte, als „Höhenstrahlung" bekannte Ultra-γ-Strahlung[1]) und jene Korpuskularstrahlungen, welche nach allgemeiner Ansicht die Nordlichter hervorrufen. In großer Höhe der Stratosphäre dürfen somit Schichten mit vielleicht mehr als millionenfach so großer Leitfähigkeit wie die der Luft unmittelbar an der Erdoberfläche als gesichert gelten; diese Schichten werden am Tage eine größere Leitfähigkeit besitzen und weiter herabreichen als nachts. — Und noch in einer besonderen Eigenheit wird sich die Leitfähigkeit dieser Schichten von jener unmittelbar an der Erdoberfläche unterscheiden. Jeder Vorgang einer Gasionisierung besteht zunächst darin, daß aus den Gasmolekülen Elektronen abgespalten werden.[2]) In den tiefsten Luftschichten werden diese schnell beweglichen Elektronen rasch von gröberen Staub- und Dunstteilchen (Langevin-Ionen), aber auch den in großer Dichte vorhandenen Gasmolekülen adsorbiert; freie Elektronen sind daher hier kaum anzutreffen, die Leitfähigkeit der Luft beruht auf dem Vorhandensein von positiven und negativen Ionen. Anders in den hohen Schichten der Stratosphäre. Staub- und Dunstteilchen fehlen vollständig; da der Gasdruck millionenfach und mehr so klein wie in der Tiefe ist, bietet sich den Elektronen auch nur eine entsprechend kleine Wahrscheinlichkeit, von Luftmolekülen adsorbiert zu werden. Wir dürfen daher annehmen, daß die Leitfähigkeit in größter Höhe (obere Stratosphäre) unmittelbar auf dem Vorhandensein großer Mengen freier, schnell beweglicher Elektronen beruht. — Verschiedentlich hat man versucht, die Dichte der Elektronen in den leitenden Schichten der Stratosphäre abzuschätzen, und ist dabei zu dem Ergebnis gelangt, daß sie sehr wohl $N = 10^5$ und mehr im cm^3 zu betragen vermag, gegenüber etwa 1000 Ionen im cm^3 in den tiefsten Luftschichten.[3]) Bedenken wir dabei, daß auch noch bei einem Druck von ein Millionstel Atmosphäre immer noch $27 \cdot 10^{12}$ Luftmoleküle sich im cm^3 aufhalten, also bei 10^5 freien Elektronen im cm^3 erst ein einziges Elektron auf 270 Millionen Gasmoleküle kommt, so erscheint dieser Wert für die Elektronendichte nicht so erstaunlich groß. Jedenfalls ist für die elektrisch so gut leitenden Metalle die Dichte der freien Elektronen sicherlich über billionenmal so groß anzusetzen; die Leitfähigkeit auch der bestleitenden Stratosphärenschichten ist mit metallischer Leitfähigkeit auch nicht annähernd zu vergleichen.

6. Die Larmorsche Theorie der Strahlenkrümmung. Eine Klärung über den Begriff der Kenelly-Heaviside-Schicht brachte nun eine grundlegende Arbeit von Sir Joseph Larmor.[4]) Er zeigte in einer neuartigen Betrachtungsweise, daß ein Gehalt von Elektronen (und Ionen) eines Gases dann auf die

1) Siehe z. B. Grimsehl, a. a. O. S. 592. 2) a. a. O. S. 571, Fig. 506.

3) Victor F. Heß, Die elektrische Leitfähigkeit der Atmosphäre und ihre Ursachen. Braunschweig 1926. S. 40 u. 51 u. S. 157.

4) Phil. Mag. (6) 48, 1025, 1924.

Fortschreitungsgeschwindigkeit, also auch auf die Brechbarkeit, elektromagnetischer Wellen einen außerordentlichen Einfluß ausüben muß, wenn jenen genügend große „freie Weglängen" zur Verfügung stehen. Es ist nicht schwierig, den Gedankengang seiner Überlegung zu skizzieren:

a) Der Leitungsstrom in einem Gase. In einem Gase mögen sich durch einen wirksamen Ionisierungsvorgang freie Elektronen befinden; von den sehr viel schwerer beweglichen Ionen sei abgesehen. Ein konstantes, von außen im Gasraume aufrecht erhaltenes elektrisches Feld beschleunigt dann die Elektronen entgegen der Feldrichtung. Dadurch wird ihnen kinetische Energie erteilt; diese wird dem Felde entzogen, denn das wachsende magnetische Feld um die beschleunigten Elektronen herum induziert nach dem bekannten Gesetz der Magnetinduktion ein dem vorhandenen entgegengesetztes elektrisches Feld. Bei den Zusammenstößen mit den Gasmolekülen nach Durchlaufen einer mittleren Weglänge $\bar{l}$ wird die gewonnene kinetische Energie an die Gasmoleküle abgegeben und erscheint nun als ungeordnete Wärmeenergie im Gase. Nach jedem Zusammenstoße wiederholt sich der Vorgang von neuem, so daß die Elektronen sich mit einer mittleren konstanten, dem jeweiligen Felde $\mathfrak{E}$ proportionalen Geschwindigkeit der Feldrichtung entgegen bewegen. Das Feld ruft somit einen Transport von elektrischer Ladung hervor, das ist einen *„elektrischen Leitungsstrom"* unter gleichzeitiger Entwicklung von Wärme im Gase auf Kosten der Feldenergie. — Daran ändert sich nichts, wenn wir es mit einem Wechselfelde zu tun haben und dabei die Frequenz so gering ist, daß innerhalb einer einmaligen Schwingung des Feldes im Mittel alle Elektronen vielmalige Zusammenstöße erleiden. Das Wechselfeld wird absorbiert unter Entwicklung von Wärme (Absorption langer Wellen in der leitenden Atmosphäre). — In einer Überschlagsrechnung sei untersucht, wie groß die Geschwindigkeiten und Verrückungen innerhalb einer Periode sind.

An einer Stelle des Gasraumes ($x = 0$) sei das in der Z-Richtung schwingende Wechselfeld dargestellt durch

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0 \sin 2\pi\nu t. \tag{1}$$

Das Elektron der Masse m und der Ladung $-e$ erfährt dann die Beschleunigung

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = \ddot{z} = -\frac{\mathfrak{E}\cdot e}{m}. \tag{2}$$

Sehen wir einmal von den Zusammenstößen ab und nehmen an, daß das Elektron der Kraft ungehindert folgen könnte, so ergibt die Integration mit der Randbedingung, daß zur Zeit $t = 0$, $z = 0$ und die Geschwindigkeit $\frac{dz}{dt} = \dot{z} = U_z$ sein soll,

$$\dot{z} = U_z - \frac{e\mathfrak{E}_0}{2\pi\nu m}(1 - \cos 2\pi\nu t) \tag{3}$$

und

$$z = U_z t - \frac{e\mathfrak{E}_0}{4\pi^2\nu^2 m}(2\pi\nu t - \sin 2\pi\nu t). \tag{4}$$

Nach einer vollen Periode $t = T = \frac{1}{\nu}$ hätte danach das Elektron seine Zusatzgeschwindigkeit zu U_z wieder vollständig verloren und den Weg

$$z_T = U_z T - \frac{e\mathfrak{E}_0}{2\pi\nu^2 m} \tag{5}$$

zurückgelegt.

Über die mittlere Geschwindigkeit U_s des Elektrons in der Z-Richtung, die es ohne elektrisches Feld haben wird, kann man nichts aussagen; jedenfalls werden ihm die zu seiner Entbindung führenden Ionisierungsvorgänge eine sehr große Geschwindigkeit erteilt haben. Dürfen wir auf das Elektron die Gesetze der kinetischen Gastheorie anwenden und nehmen in Ermanglung genauerer Kenntnis der Temperatur in den hohen Stratosphärenschichten diese zu 0° C an (wie etwa neuerdings gefordert wird), so ist seine „Wärmegeschwindigkeit" allein schon mindestens 60mal so groß wie die eines Wasserstoffmoleküls also etwa $120000 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}} = 12 \cdot 10^6 \frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{sec}}$. Für eine Wellenlänge von 1 km ist $\nu = 3 \cdot 10^5$. Erteilen wir noch $\mathfrak{E}_0$ den hohen Wert von $10^{-3} \frac{\mathrm{Volt}}{\mathrm{m}} = \frac{10^{-3}}{300 \cdot 100} \frac{\mathrm{e \cdot st \cdot E}}{\mathrm{cm}}$, so ergibt sich mit $\frac{e}{m} = 5{,}3 \cdot 10^{17} \frac{\mathrm{e \cdot st \cdot E}}{\mathrm{g}}$ der größte Wert der Zusatzgeschwindigkeit nach einer Halbperiode zu

$$\frac{2e \cdot \mathfrak{E}_0}{2\pi \nu m} = \frac{5{,}3 \cdot 10^{17} \cdot 10^{-8}}{\pi \cdot 3 \cdot 10^5 \cdot 3 \cdot 10^4} \sim 2 \cdot 10^4 \frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{sec}}.$$

Jedenfalls lehrt die Schätzung, daß die durch das Feld erworbene Geschwindigkeit des Elektrons hinter der mittleren Geschwindigkeit, die es ohne Feld besitzen würde, ganz zurücktritt. Die mittlere Geschwindigkeit U_s sowie die mittlere Weglänge $\bar{l}$ zwischen zwei aufeinanderfolgenden Zusammenstößen bleiben also durch das Feld praktisch ungeändert.

Den Begriff des „Leitungsstromes" können wir damit schärfer charakterisieren: Von einem solchen kann nur dann die Rede sein, wenn innerhalb einer Schwingungsperiode viele Zusammenstöße stattfinden, d. h. wenn

$$\bar{l} \ll z_T$$

oder nach (5) mit Vernachlässigung der Zusatzverrückung, wenn

$$\bar{l} \ll U_s T \quad \text{oder wenn} \quad \frac{l \cdot \nu}{U_s} \ll 1. \tag{6}$$

b) **Der Larmorsche „Verschiebungsstrom" bei großer mittlerer Weglänge.** Die voranstehenden Betrachtungen sind nicht neu; bisher hat man nur immer angenommen, daß die am Schlusse stehende Ungleichung (6) stets erfüllt sein müsse. Nun wird die mittlere Weglänge $\bar{l}$ offenbar desto größer, je geringer die Gasdichte ist, d. h. je höher wir die Stratosphärenschicht wählen. Es muß also einmal der Fall eintreten, daß die Ungleichung (6) nicht erfüllt ist. Larmor untersuchte nun als erster die elektrischen Besonderheiten dieser Vorbedingung mit einem sehr überraschenden Ergebnis.

Findet nämlich in der zweiten Halbperiode der elektrischen Schwingung noch kein Zusammenstoß mit Gasmolekülen statt, so verzögert nunmehr das Feld, das sein Vorzeichen umgekehrt hat, die vorher erzeugte Bewegung des Elektrons. Dieses verliert die in der ersten Halbperiode gewonnene kinetische Energie.[1]) Die in der ersten Halbperiode aus dem Felde absorbierte Energie

1) Bei genauerer Betrachtungsweise ist nunmehr zu berücksichtigen, daß das elektrische Wechselfeld der Welle stets mit einem magnetischen Wechselfelde ver-

wird also in der zweiten Halbperiode dem Felde zurückerstattet; nach Ablauf der Periode ist keine Feldenergie verzehrt worden. *Ist somit die freie Weglänge $\bar{l}$ der Elektronen so groß, daß die Ungleichung*

$$\frac{\bar{l} \cdot v}{U_z} \gg 1 \tag{7}$$

gilt, so findet Absorption einer die leitende Schicht durcheilenden elektrischen Welle nicht mehr statt. — Das ist die erste bedeutungsvolle Erkenntnis von Larmor.

c) Brechung der Wellen bei großer mittlerer Weglänge der Elektronen. Eine zweite noch bedeutungsvollere Erkenntnis fließt aus der Untersuchung dieses Falles, wenn wir vielleicht in einfachster Weise einmal die Maxwellschen Gleichungen

$$\frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} + \frac{4\pi j}{c} = \operatorname{curl} \mathfrak{H} \quad \text{und} \quad \frac{\mu}{c} \cdot \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = -\operatorname{curl} \mathfrak{E}$$

auf diese Vorbedingungen anwenden. In ihnen dürfen wir zunächst die Dielektrizitätskonstante $\varepsilon = 1$ und ebenso die Permeabilität $\mu = 1$ setzen. Ferner sei nur ein Feld $\mathfrak{E}$ in der Z-Richtung vorhanden, das für alle Punkte der Y-Richtung denselben Wert hat. Dann kann zugleich ein magnetisches Feld $\mathfrak{H}$ nur in der Y-Richtung und eine Stromdichte j nur in der Z-Richtung existieren. Damit nehmen die Gleichungen die einfachere Form an:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} + \frac{4\pi j}{c} = \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial x}, \quad \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial x}. \tag{8}$$

Von den Elektronen möge ein gewisser kleiner Bruchteil N_1 der in der Volumeneinheit vorhandenen N Elektronen innerhalb einer Periode Zusammenstöße erfahren, — denn die Weglänge hat in Wirklichkeit ja alle möglichen Werte, von denen $\bar{l}$ nur den Mittelwert darstellt —, während der andere Anteil N_2 keine Zusammenstöße erleidet. Dann setzt sich die Stromdichte j aus zwei Anteilen zusammen, einem „Leitungsstrom" $j_1 = \mathfrak{S}_0 N_1 \cdot \mathfrak{E}$, worin $\mathfrak{S}_0 N_1$ die im Sinne des Ohmschen Gesetzes gemessene Leitfähigkeit ist, und einem „Verschiebungsstrom" der Stärke $j_2 = -\dot{z} \cdot N_2 \cdot e$; also ist

$$j = \mathfrak{S}_0 \cdot N_1 \cdot \mathfrak{E} - \dot{z} N_2 \cdot e. \tag{9}$$

Differenzieren wir in bekannter Weise die erste der Gleichungen (8) nach t, ebenso Gleichung (9), die zweite der Gleichungen (8) nach x und eliminieren dann $\mathfrak{H}$ und j, so ergibt sich

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{E}}{\partial t^2} + \frac{4\pi \mathfrak{S}_0 N_1}{c^2} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} - \frac{4\pi \ddot{z} N_2 \cdot e}{c^2} = \frac{\partial^2 \mathfrak{E}}{\partial x^2}.$$

knüpft ist. Die erzwungene periodische Bewegung der Elektronen hat in der Geschwindigkeit eine Phasenverzögerung gegen das elektrische Feld, deshalb ist in der einen Halbperiode das magnetische Feld des durch die Elektronenbewegung dargestellten elektrischen Stromes dem magnetischen Felde des gegebenen Wellenfeldes entgegengesetzt gerichtet, in der darauffolgenden Halbperiode gleichgerichtet. Die kinetische Energie der Elektronen wird also dem magnetischen Anteile der elektromagnetischen Welle in der einen Halbperiode entzogen, in der nächsten zurückgegeben.

Hierbei setzen wir noch den Wert für $\ddot{z}$ aus (2) ein und erhalten

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathfrak{E}}{\partial t^2} + \frac{4\pi \mathfrak{S}_0 N_1}{c^2}\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} + \frac{4\pi N_2 e^2 \mathfrak{E}}{c^2 m} = \frac{\partial^2 \mathfrak{E}}{\partial x^2} \tag{10}$$

als Differentialgleichung (erweiterte „Telegraphengleichung") einer in dem ionisierten Mittel fortschreitenden elektrischen Welle. Mit der Randbedingung (1) für $x = 0$ ergibt sich als ein Integral die ebene Welle

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0 \cdot e^{-\frac{2\pi \mathfrak{S}_0 N_1 v}{c^2} x} \cdot \sin 2\pi\nu\left(t - \frac{x}{v}\right), \tag{11}$$

worin noch v bestimmt ist durch

$$\frac{c^2}{v^2} = +\sqrt{\frac{1}{4}\left(1 - \frac{N_2 e^2}{\pi m \nu^2}\right)^2 + \frac{\mathfrak{S}_0^2 N_1^2}{\nu^2}} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{N_2 e^2}{\pi m \nu^2}\right). \tag{12}$$

Gleichung (11) stellt eine gedämpfte Welle dar, die mit der Phasengeschwindigkeit v fortschreitet. Gleichung (12) lehrt, das $\frac{c^2}{v^2}$ niemals negativ werden kann, wie groß auch N_2 und wie klein auch N_1 genommen werden mag. — Spielt der Leitungsstrom nun keine Rolle — und das sollte ja der kennzeichnende Zug dieser Betrachtung sein —, so darf man N_1 vernachlässigen und für N_2 die Elektronendichte N einsetzen. Dann gilt

$$n^2 = \frac{c^2}{v^2} = 1 - \frac{Ne^2}{\pi m \nu^2}. \tag{13}$$

Das ist die charakteristische Larmorsche Gleichung. In ihr ist n das *Brechungsverhältnis,* welches die Schicht der Elektronendichte N gegenüber dem leeren Raum zeigt. Die Gleichung lehrt, daß n kleiner als 1 ist, die Schicht sich gegenüber dem leeren Raume (und einer Atmosphäre ohne Elektronen großer Weglänge) also als optisch dünner erweist.[1]) Ein schräg von der Erdoberfläche aus nach oben fortschreitender Wellenstrahl wird durch die Schicht demnach so gebrochen, daß seine Neigung gegen die Erdoberfläche geringer wird. *Nimmt die Elektronendichte N mit der Höhe stetig zu, so wird der schräg aufsteigende Wellenstrahl gekrümmt, und zwar kehrt er seine hohle Seite der Erde zu; er kann also zur Erde zurückgebogen werden.*

Wir haben danach ganz ähnliche Verhältnisse vor uns wie bei den Erscheinungen, wo ein Lichtstrahl ein Folge von Schichten verschiedener stetig veränderlicher Brechbarkeit durchläuft und dadurch eine Krümmung erfährt. In den oft behandelten „Luftspiegelungen" wird dabei die Krümmung so stark, daß der Lichtstrahl in die vorher schon einmal durchwanderten Schichten zurücktritt und so scheinbar eine „Spiegelung" erfährt. Die Larmorsche Betrachtung gibt daher über das sonderbare Verhalten kurzer Wellen, die jenseits einer „Zone des Schweigens" zur Erde zurückkehren, eine physikalisch recht ansprechende Aufklärung: Ihr Anteil, den wir als „Raumwelle" bezeichneten, kehrt, nachdem die Bodenwelle schon längst durch Absorption in der Erdoberfläche (und in den unteren Luftschichten mit zu kleiner freien Weglänge der Elektronen) abgestorben ist, auf einem gekrümmten Wege aus den oberen

1) Bei der Brechung von Lichtwellen in dünnen Metallschichten ist seit langem ein ähnliches Verhalten bekannt.



Stratosphärenschichten, die sich als optisch dünneres Mittel starker Veränderlichkeit des Brechungsverhältnisses mit der Höhe erwiesen, zurück, ohne merkliche Absorption erlitten zu haben. — Larmor zeigt noch, daß erstaunlicherweise schon eine Zunahme der Elektronendichte N um drei Elektronen im cm^3 auf 10 km Höhenunterschied genügen muß, einen Wellenstrahl bestimmter Wellenlänge so zu krümmen, daß er parallel zur Erdoberfläche verläuft. Größere Gradienten der Elektronendichte krümmen den Strahl somit zur Erde zurück.

7. Zusammenfassung und Ausblick. Von „einer" Kenelly-Heaviside-Schicht zu reden, an der elektrische Wellen in großen Höhen wie an einem metallischen Schirm zur Erde zurückreflektiert würden, hat nach dieser Aufklärung keinen Sinn mehr. Es sind bezüglich des Verhaltens der Wellen im wesentlichen drei Fälle zu unterscheiden:

a) Lange Wellen (1—40 km) mit langsam schwingenden Feldern und kleinem ν finden offenbar erst in sehr großer Höhe Schichten mit so großer freien Weglänge $\bar{l}$, daß die Ungleichung (7) erfüllt werden könnte. Bei genügender Elektronendichte N kann dann n rasch einen sehr kleinen Wert annehmen, d. h. schon die unter sehr kleinen Einfallswinkeln auftreffenden Strahlen können an diesen Schichten eine Art Totalreflexion erleiden. Die so aus der Höhe in allen Winkelbereichen zurückgestrahlte Energie verstärkt die bei diesen Wellen sich weiter ansdehnende „geführte" Bodenwelle.

b) Kurze Wellen (60—15 m) mit großem ν erfahren Strahlenkrümmung. Zu jeder Wellenlänge gehört eine ganz bestimmte Mindesthöhe, von der ab die Ungleichung (7) als erfüllt gelten kann; diese liegt desto tiefer, je kürzer die Welle ist. Andrerseits hängt aber das Ausmaß der Strahlenkrümmung nach Gleichung (13) einmal von der Höhe der Schicht ab, denn nach ihr richtet sich die Elektronendichte, ein andermal von der Frequenz. Solange wir uns in dem Teil der Stratosphäre befinden, in welchem die Elektronendichte mit der Höhe noch zunimmt, wird mit wachsender Höhe die Krümmung zunehmen, mit wachsender Frequenz abnehmen. Um eine vorgegebene Krümmung — die Erdkrümmung — zu erfahren, müssen kürzere Wellen somit in höheren Schichten verlaufen (siehe dazu die Tabelle unter 1.). — Die Anteile der elektrischen Signale, welche in den eingangs geschilderten Versuchen die Erde umlaufen haben, sind demnach als jene zu betrachten, deren Strahlenrichtung vom Sender aus gerade so beschaffen war, daß ihre erzielte minimale Krümmung gleich der Erdkrümmung wurde. Wellenanteile schwächer geneigter Strahlenrichtungen sind schon vor Umlauf um die Erde zurückgebogen worden und haben diese in der „Sprungentfernung" erreicht.

c) Kürzeste Wellen mit sehr großem ν werden nach Gleichung (13) nicht mehr gebrochen; in der Tat hat man niemals an den Lichtstrahlen, welche die Erdatmosphäre durchdringen, einen ähnlichen Einfluß der höchsten Stratosphärenschichten beobachten können. Schon für etwa $\lambda = 10$ m scheint die Grenze erreicht zu sein, die der für Telegraphierzwecke wirksamen Krümmbarkeit der Strahlen gesetzt ist.

Berücksichtigt man noch in den Schichten mit genügend großer Weglänge der Elektronen das magnetische Feld der Erde, so ergeben sich interessante Konsequenzen. Die durch das schwingende elektrische Feld in geordnete Bewegung versetzten Elektronen erfahren durch das magnetische Feld Ablenkungen aus der Bewegungsrichtung. So kommt es, daß nach einer Vollperiode die Be-

wegung des Elektrons nicht wieder abgebremst ist, da die vom Felde hervorgerufene Elektronenbewegung der Richtung nach nur im Anfang mit der Feldrichtung zusammenfiel. Je nach der Frequenz und Richtung der Welle sowie der magnetischen Feldstärke beschreiben die Elektronen daher während der elektrischen Schwingungen mehr oder weniger weit geöffnete Ellipsen. Für den Fall nun, daß diese Ellipsen zu Kreisen werden, tritt niemals Rücklieferung der aus dem Felde gezogenen Energie ein. Vielmehr „schaukelt" sich in diesem „Resonanzfalle" die Bewegung immer mehr „auf"; der Radius des Kreises wird immer größer, bis schließlich nun doch ein Zusammenstoß mit einem Gasmoleküle eintritt und damit die aus dem Felde gezogene kinetische Energie als Wärme verloren geht. Man kann durch einfache Rechnungen zeigen, daß das für elektromagnetische Wellen von mittlerer Wellenlänge um $\lambda = 200$ m herum eintreten muß. Darin hat man eine Erklärung dafür finden wollen, daß die Reichweite der Radiostationen für den Unterhaltungsfunk, welche sich meist der Wellenlängen dieser Größenlage bedienen, sich als überraschend gering erweist.

Es erscheint als höchst wahrscheinlich, daß nach diesen Aufklärungen die drahtlosen Wellen geeigneter Wellenlängen nun umgekehrt berufen erscheinen, uns in Zukunft durch systematische Beobachtungen über ihre Ausbreitung Einblicke in den physikalischen Zustand der höchsten Atmosphärenschichten zu verschaffen, die uns bisher weitgehend versagt waren.

Hamburg. W. Hillers.

Bücherbesprechungen.

Die Preise der besprochenen Bücher sind nach den Mitteilungen der Verlagsanstalten im Erscheinungsmonat angegeben. Da die Buchhandlungen sich Änderungen vorbehalten, kann keine Sicherheit dafür geboten werden, daß die angegebenen Preise auch heute noch gelten.

F. Klein, Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert. Teil I, bearbeit. von R. Courant und O. Neugebauer. (Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Bd. XXIV, 385 S.) Berlin 1926, Springer. Geh. RM 21.—.

In dem großen Gesamtwerk „Die Kultur der Gegenwart" sollte an der Spitze der den Naturwissenschaften und der Technik gewidmeten Abteilungen, deren Plan schon längere Zeit vor dem Kriege bis in alle Einzelheiten durchberaten war, ein Band „Mathematik" stehen, dessen Herausgabe Klein übernommen hatte. Die Mehrzahl der hier vorgesehenen Berichte, diejenigen von Voss, Timerding, Zeuthen, erschienen sehr bald. Trotzdem blieb das Werk bis heute ein Torso; Staeckel starb, ehe sein Bericht über die Mathematik im 16., 17. und 18 Jahrhundert zur Ablieferung kam — ich weiß nicht, ob sich in seinem Nachlaß Vorarbeiten gefunden haben — und ebenso blieb ein Artikel über die Mathematik im 19. Jahrhundert, dessen Verfasser in den Ankündigungen mit N. N. bezeichnet war, unveröffentlicht. Es war allen Eingeweihten bekannt, daß sich hinter diesem N. N. Klein selbst verbarg. Er war keineswegs müßig gewesen. In Vorlesungen im kleineren Kreise, zumeist in seinem Arbeitszimmer, sammelte er mehrere Semester hindurch „Material" zu dem Bericht. Diese Vorlesungen wurden ausgearbeitet und sind in Maschinenschrift vielfach verbreitet worden. Ihren ersten Teil haben wir jetzt vor uns; der zweite Teil, haupsächlich Invariantentheorie und Relativitätstheorie umfassend, wird hoffentlich bald folgen.

Es ist ein Werk von eigenartigem Reiz, das der Leser in der Hand hält, eine Darstellung, die ihn in lebhaftester, manchmal geradezu dramatischer Entwicklung (so beim Ansatz der Kleinschen Arbeiten über nichteuklidische Geometrie an die Cayleysche Maßbestimmung oder beim Wettkampf zwischen Klein und Poincaré bei der Bewältigung der automorphen Funktionen) von Gauß bis etwa zur Wende

des 19. Jahrhunderts führt. Die Persönlichkeiten, oft schlaglichtartig durch eine Anekdote, ein einziges treffendes Wort gekennzeichnet, heben sich ebenso deutlich heraus wie die schöpferischen mathematischen Gedanken, wobei neben der reinen Mathematik auch die Mechanik, die theoretische Physik, ja gelegentlich, wo dies zweckmäßig, auch experimentelle Wissenschaften berücksichtigt werden, wie denn überhaupt die Mathematik und die Mathematiker nicht isoliert, sondern mitten in den Fluß der allgemeinen Kulturentwicklung hineingestellt werden.

Dem Bild, das so entsteht, fehlt allerdings die systematische Vollständigkeit. Manche Gebiete treten stark zurück, z. B. die Zahlentheorie (so wird z. B. die ζ-Funktion nur eben erwähnt), die Axiomatik, insbesondere die Mengenlehre (Klein stand diesen Gebieten zeitlebens etwas ablehnend gegenüber). Ein geplantes Schlußkapitel über Poincaré und Lie blieb (leider!) ungeschrieben. Vielfach fehlt die historische Rückverfolgung der Ideen, so werden z. B. bei der projektiven Geometrie Poncelets die „Ideenbildungen älterer Autoren" ganz beiseite gelassen. Das Anschauliche ist aufs stärkste betont gegenüber krasser „Arithmetisierung", wie sie doch rein historisch nun einmal in der zweiten Hälfte des Jahrhunderts überwog. So ist das Ganze bewußt subjektiv gefärbte, nicht objektive Geschichte (K. spricht einmal von einer Entwicklung, „wie ich sie historisch auffasse"), aber es ist nicht gesehen von irgendeinem beliebigen, an sich gleichgültigen Jemand, sondern von einem den mathematischen Forschern, die zu Worte kommen, kongenialen, an den entscheidensten Stellen selbst an der Entwicklung produktiv beteiligten Temperament.

Dem Werke, das von Klein selbst in dieser Form ja eigentlich nur als Material für die endgültige Fassung gedacht war, haben die Herausgeber seine Eigenart treu bewahrt. Vielleicht hätten sie doch noch manche der schwierigen Stellen, die von anderen, sehr elementar gehaltenen stark abstechen, durch geeignete Bemerkungen etwas erleichtern können, wenn auch nur z. B. dadurch, daß sie die nicht selten als selbstverständlich vorausgesetzte Bezeichnungsweise in den Formeln erklärten. Die Drucklegung ist sehr sorgfältig erfolgt; von den wenigen Druckfehlern, die mir aufgefallen sind, ist mir nur einer im Gedächtnis geblieben, wo der Setzer aus Lord Kelvins Vortextheorie eine Vortexttheorie gemacht hat.

Die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert ist das letzte große Werk aus Kleins Hand. Es ist weit mehr als eine historische Darstellung, es ist eine Art Selbstbiographie im höchsten wissenschaftlichen Sinn, es ist ein Glaubensbekenntnis, ein mathematisches Testament und als solches wert, daß jeder Mathematiker in ihm lese und von ihm lerne.

Z. Zt. Fulpmes, Tirol. W. Lietzmann.

Zeitschriftenschau.

Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. — 36. Bd., 5.—8. Heft. — E. Fischer, Über die Cayleysche Eliminationsmethode. — E. Kamke, Zur Definition der affinen Abbildung — F. Lindemann, Olaus Henrici. — H. Wieleitner, Karl Schoy. — Th. Schmid, Karl Zsigmondy. — F. Schur, Nachruf auf Martin Disteli. — H. Liebmann, Zur Erinnerung an Carl Neumann. — A. Ostrowski, Mathematische Miszellen IX. — H. Beck, Erwiderung auf Herrn Study. — H. Böhmel, Über eine Erweiterung des Steinerschen Strahlenbüschels. — K. Reinhardt, Analytische Flächen und Minimalflächen. — Th. Estermann, Zwei neue Beweise eines Satzes von Blaschke und Rademacher. — D. Hilbert, Über das Unendliche. — M. Fekete, Über die Wurzelverteilung analytischer Funktionen, deren Wert an zwei Stellen gegeben ist. — M. Jacob, Beitrag zur Divergenz der Fourierschen Reihe. — W. Fr. Meyer, Über ein Eliminationsproblem.

Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik. — 7. Bd., 3. Heft. — W. Riedel, Beiträge zur Lösung des ebenen Problems eines elastischen Körpers mittels der Airyschen Spannungsfunktion. — Th. Pöschl, Zur Theorie der zylindrischen Schalen und Bogenträger. — R. Grammel, Die Kipperscheinungen bei elastischen Ringen. — A. Fischer, Über ein neues allgemeines Verfahren zum Entwerfen von graphischen Rechentafeln (Nomogrammen), insbesondere von Fluchtlinientafeln I. — W. Adrian, Tagung über Schwingungsfragen in Braunschweig.

Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften. — 33. Jahrg., Nr. 7. — C. Weihe, Der Wert der Naturwissenschaften für Leben und Wirtschaft. — Kruse, Ein Hilfsmittel für den physikalischen Arbeitsunterricht auf der Unterstufe. — H. Hermann, Materialien zur Gravitationslehre. — L. Fröbel, Der Häufungspunkt.

33. Jahrg., Nr. 8. — H. Reuter, Schülerübungen mit der Wage. — E. Bodewig, Philosophieunterricht und Mathematik. — W. Dahmen, Fortschritte der physikalischen Chemie.

The American Mathematical Monthly. — Vol. 34, Nr. 6. — Ch. A. Noble, The teaching of mathematics in German secondary schools. — H. Hancock, The The mystic numeral 7. — J. F. Reily, Interpolation formulas dependent upon the underlying function. — H. A. Simmons, Note on the upper limit to the value of a determinant. — L. E. Ward, Some functions analogous to trigonometric functions. — M. Foster, Ruled surfaces refeerd to the trihedral of a directrix. — S. Gandz, Did the Arabs know the abacus?

Bijvoegsel van het nieuw tijdschrift voor wiskunde. — 3. Jahrg., Nr. 6. — H. C. Schamhardt, Een wiskunde-boek uit het laatst der 17. e eeuw. — D. van Dantzig, Over de maatschappelijke waarde van onderwijs in wiskunde. — P. Wijdenes, Over het onderwijs in rekenen in de tweede klas van de H. B. S.

Annalen der Physik. — IV. Folge, 83. Bd., 3. Heft. — J. Malsch u. M. Wien, Über eine Nullmethode zur Messung von Widerständen mit kurzen Stromstößen. — M. Wien, Über eine Abweichung vom Ohmschen Gesetze bei Elektrolyten. — H. Pelzer, Zur Frage des Vorhandenseins von festem Stickstoff in der Erdatmosphäre. — M. Knudsen, Das Hitzdrahtmanometer. — W. Kast, Dielektrische Untersuchungen an der anisotropen Schmelze des para-Azoxyanisols. — W. Kast, Röntgenuntersuchungen an festem kristallinischem und anisotropflüssigem para-Azoxyanisol. — R. Pechhold, Untersuchung einiger wäßriger Elektrolytlösungen nach der Fürthschen Ellipsoidmethode.

83. Bd., 4. Heft. — M. Trautz, Kritik der elektrischen Differentialmethode zur Messung der spezifischen Wärme C_v an Gasen. — M. Katalinić, Stehende Wellen des zirkular und elliptisch polarisierten Lichtes. — F. Kirchner, Über die Richtungsverteilung der von polarisierten Röntgenstrahlen ausgelösten Elektronen. — R. Seeliger und M. Reger, Über die Stromdichte des normalen Kathodenfalles. — Fr. Klingelfuß, Entwicklung einer Exponentialgleichung zur Darstellung des Funkenpotentials nach experimentellen Unterlagen, unter Berücksichtigung einer Elektrodenfunktion. — C. Hummel, Über die durch einen Prismensatz erzeugten Interferenzstreifen.

Physikalische Zeitschrift. — 28. Jahrg., Nr. 13. — O. Flachsbart, Neue Untersuchungen über den Luftwiderstand von Kugeln. — M. N. Saha, Über ein neues Schema für den Atomaufbau. — K. Lichtenecker, Bemerkung, den Zusammenhang zwischen Schmelzwärme und spezifischer Wärme betreffend. — N. v. Kolossowsky, Thermodynamische Notwendigkeit der Gasentartung. — K. Strehl, Mittelfehler und Wellenoptik. — N. Seljakow und M. Korsunski, Über den Nachweis der Ekamangane. — R. Mecke und M. Guillery, Bandenspektra II.

Zeitschrift für Physik. — 43. Bd., 9./10. Heft. — W. Pauli jr., Zur Quantenmechanik des magnetischen Elektrons. — E. Wigner, Einige Folgerungen aus der Schrödingerschen Theorie für die Termstrukturen. — E. Guth, Über eine Anwendung der Wellenmechanik auf die Quantelung der Hohlraumstrahlung. — G. Beck, Über einige Folgerungen aus dem Satz von der Analogie zwischen Lichtquant und Elektron. — K. F. Niessen, Die Energieberechnung in einem sehr vereinfachten Vierkörperproblem. — K. F. Niessen, Über die Ionisierungsspannung und das Viellinienspektrum von Wasserstoff. — M. J. Druyvesteyn, Das Röntgenspektrum zweiter Art. — E. Fues, Lebensdauern aus Resonanzerscheinungen. — S. Konobejewski, Zur Frage nach dem Gleiten in Kristalliten beim Walzen. — M. Herzberger, Über die Durchrechnung von Strahlen durch optische Systeme. — G. I. Pokrowski, Beobachtungsergebnisse über die Lichtzerstreuung im Wassernebel. II. — Gr. Landsberg, Molekulare Lichtzerstreuung in festen Körpern. I. Lichtzerstreuung im kristallinischen Quarz und ihre Temperaturabhängigkeit.

43. Bd., 11./12. Heft. — G. Wentzel, Zur Theorie des Comptoneffekts. II. — F. Hund, Symmetriecharaktere von Termen bei Systemen mit gleichen Partikeln in der Quantenmechanik. — F. Hund, Zur Deutung der Molekelspektren. III. — R.

Glocker, Über das Grundgesetz der physikalischen Wirkungen von Röntgenstrahlen verschiedener Wellenlänge. — L. S. Ornstein und H. P. Bouwman, Verlauf der Intensität im Heliumspektrum bei kondensierter Entladung. — A. Jönsson, Zur Kenntnis der Intensitäten weicher Röntgenspektrallinien in ihrer Abhängigkeit von der Spannung. — D. M. Bose, Die Rolle des Kreiselektrons bei paramagnetischen Erscheinungen. — J. Koenigsberger, Über die Umladung von Kanalstrahlen und den Einfluß von nahen Metallwänden hierauf. — G. Piccardi, Elektronenaffinität einiger stabiler Moleküle bei höherer Temperatur. — G. Kurdjumow, Eine Verfeinerung der Debye-Scherrerschen Methode für die Untersuchung der Kristallstruktur.

Die Naturwissenschaften. — 15. Jahrg., 28. Heft. — L. Flamm, Die neue Mechanik. — F. Bauer, Die Fortschritte in der Bearbeitung des Problems der langfristigen Witterungsvorhersage in den letzten drei Jahren.

15. Jahrg., 30. Heft. — P. Jordan, Die Entwicklung der neuen Quantenmechanik. — St. Meyer, Bemerkung über Atomgewichte und Packungseffekte.

Aus verschiedenen Zeitschriften. — Fries, Die Verwendung des „Kleindiapositivs“ im Unterricht. — B. Humpert, Die Kinematographie im Dienste der Volksbildung. (Optik und Schule, Wetzlar.) — W. Schaub, Die Methoden zur Bestimmung der Parallaxe eines Fixsterns (Die Himmelswelt **37** [1927] Heft 7/8).

Neuerscheinungen.[1])

Sammelwerke.

Mathematisch-Physikalische Bibliothek, herausgeg. von W. Lietzmann und A. Witting. Leipzig, B. G. Teubner. Kart. je RM 1.20, Doppelbändchen kart. je RM 2.40.

Bd. 71. H. Behmann, Mathematik und Logik. 59 S. 1927.

Bd. 59/60. P. Luckey, Nomographie. 2. Aufl. 108 S. 1927.

Sammlung Göschen. Berlin, de Gruyter. Geb. RM 1.50.

Nr. 957. M. Ensslin, Elastizitätslehre für Ingenieure. II. 120 S. 1927.

Nr. 136. G. Mahler, Physikalische Formelsammlung. 5. Aufl. von K. Mahler. 162 S. 1927.

Mathematische Wissenschaft.

J. A. Barrau, Analytische Meetkunde. II. Deel: de ruimte. 460 S. Groningen 1927. Noordhoff.

P. Boutroux, Das Wissenschaftsideal der Mathematiker. Deutsch von H. Pollaczek-Geiringer. (Wissenschaft und Hypothese, Bd. XXVIII.) 253 S. Leipzig 1927, B. G. Teubner. Geb. RM 11.—.

C. Carathéodory, Vorlesungen über reelle Funktionen. 2. Aufl. 718 S. Leipzig 1927, B. G. Teubner. Geh. RM 27.—, geb. RM 29.—.

B. P. Haalmeijer en J. H. Schogt, Inleiding tot de leer der verzamelingen. 159 S. Groningen 1927, Noordhoff.

W. Lietzmann, Der pythagoreische Lehrsatz. Hebräische Ausgabe von Amira. 90 S. Jerusalem 1927.

A. Patzig, Politische Arithmetik. 140 S. Leipzig 1927, B. G. Teubner. Kart. RM 3.20.

H. L. Rietz, Mathematical Statistics (The Carus Mathematical Monographs Nr. 3). 181 S. Chicago 1927, The Open Court Publishing Company. 2 $.

Mathematischer Unterricht.

W. Lietzmann, Mathematisches Unterrichtswerk für Mittelschulen. Leipzig, B. G. Teubner:

Lietzmann-Martens-Hahn, Aufgabensammlung und Leitfaden für Arithmetik und Algebra. Ausg. B: für Mädchen. 2. Aufl. 144 S. 1927. Geb. RM 2.60.

---

1) An dieser Stelle werden alle bei der Schriftleitung einlaufenden Bücher, soweit sie überhaupt den Stoffkreis der Zeitschrift berühren, angezeigt. Eine ausführliche Besprechung der unverlangt einlaufenden Bücher behält sich die Schriftleitung vor. Eine Rücksendung kann in keinem Falle erfolgen.

Die Schriftleitung.

W. Lietzmann, Mathematisches Unterrichtswerk. Leipzig, B. G. Teubner:

H. Neugebauer, Ergebnisse zum Rechenbuch von O. Richter. 78 S. 1927. Kart. RM 3.—.

——, Ergebnisse zum Rechenbuch von P. B. Fischer. 70 S. 1927. Kart. RM 3.—.

H. Martens, Ergebnisse zur Aufgabensammlung für Arithmetik und Algebra (für Mittelschulen). 3. Aufl. 10 + 56 S. 1927. Kart. RM 2.60.

W. Lietzmann und M. Draeger, Ergebnisse zu Bardey-Lietzmann, Aufgabensammlung für Arithmetik, Algebra und Analysis. I. Teil. 6. Aufl. 56 S. 1927. Kart. RM 2.40.

K. Pilizotti, Lösungen der Aufgaben der Arithmetik, Algebra und Analysis von W. Lietzmann und J. Jarosch, IV.—VII. (bzw. VIII.) Klasse der Mittelschulen. 139 S. Wien 1927, Deuticke. Geh. RM 4.62.

Naturwissenschaften.

K. Müller, Studien an Mondphotographien. 41 S. Mit einer Übersichtskarte. Leipzig 1927, Joh. Ambrosius Barth. RM 2.40.

H. Schramm, Die Schwingung als Vortriebfaktor in Natur und Technik. 91 S. Berlin 1927, W. de Gruyter. RM 4.—.

O. Walther, Das Verschwinden des Wassers von der Erdoberfläche und die Weiterentwicklung der Erde. 26 S. Berlin o. J., Säuberlich. Geh. RM 1.—.

Pädagogik, Philosophie, Allgemeines.

Geistbeck-Bausenhardt, Erdkunde für höhere Lehranstalten unter besonderer Berücksichtigung Südwestdeutschlands. 2. Teil: Deutschland. 1. Gang. 137 S. Geh. RM 2.60. 7. Teil: Allgemeine Geographie des Menschen 128 S. Geh. RM 2.20. München 1927, Oldenbourg.

Hübners geographisch-statistische Tabellen aller Länder der Erde. 69. Jahrg. von E. Würzburger und E. Roesner. 186 S. Wien 1927, Seidel.

Lustige Ecke.

61. Wodurch unterscheidet sich ein Rechteck von einer Rede? Beim Rechteck kann man aus Länge und Breite den Inhalt erschließen, bei der Rede nicht.

62. Algebra. Gegeben sei die Gleichung $\frac{1}{x+1} + \frac{x}{x+2} + \frac{1}{x+3} = 1$. Es wird

$$(x+2)(x+3) + x(x+1)(x+3) + (x+1)(x+2) = (x+1)(x+2)(x+3)$$

$$x^3 + 6x^2 + 11x + 8 = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$$

$$8 = 6.$$

B. Gü. in Fr.

63. Herstellung eines magnetischen Nordpols. Auf eine Eisenkugel wird ein Ikosaeder gezeichnet und nun die Kugel in Pyramiden zerschnitten, die eine Ikosaederfläche zur Grundfläche, den Kugelmittelpunkt zur Spitze hat. Jede dieser Pyramiden wird so magnetisiert, daß der Südpol der Spitze, der Nordpol der Grundfläche zugekehrt ist. Setzt man jetzt die Kugel wieder zusammen, dann liegen die Südpole alle unwirksam im Innern der Kugel und nach außen hin sind nur die Nordpole wirksam. E.



ZEITSCHRIFT FÜR MATHEMATISCHEN UND NATURWISSENSCHAFTLICHEN UNTERRICHT ALLER SCHULGATTUNGEN

BEGRÜNDET 1869 VON J.C.V. HOFFMANN



HERAUSGEGEBEN VON
H. SCHOTTEN und W. LIETZMANN
in Halle a. S. in Göttingen
unter Mitarbeit von
W. HILLERS
in Hamburg

58. JAHRGANG. 1927 · 9. HEFT



LEIPZIG · B. G. TEUBNER · BERLIN

Inhaltsverzeichnis des 9. Heftes.

Fortsetzung auf S. 3 des Umschlags

Das Erlanger Programm und die Schulgeometrie.

(Vortrag im Verein zur Förderung des mathem. u. naturw. Unterrichts.)

Von A. Schülke in Berlin-Tempelhof.

Mit 10 Figuren im Text.

Schulgeometrie war ursprünglich der Inhalt von Euklids Elementen; später ist dann unter dem Namen „Neuere Geometrie" noch vieles hinzugekommen, was unter sich in keinem rechten Zusammenhang steht. Man hat öfters die Neuere Geometrie als ein Sammelsurium bezeichnet, denn wir haben für harmonische Punkte, Kreisverwandtschaft, die Sätze von Menelaus und Pascal keine Reihenfolge, welche eine fortschreitende Entwicklung aufzeigt.

Wir sehen also, daß die Geometrie bis zur Gegenwart nicht imstande gewesen ist, aus sich selbst ein *systematisches Lehrgebäude* zu schaffen. Andrerseits sollen wir nach den Richtlinien zu der Einsicht führen, daß die Mathematik eine *geordnete, aus sich aufbaubare Wissenschaft* ist, und wir sollen den Lehrstoff dahin *sichten*, daß nur solche Sätze erarbeitet werden, die für den inneren Zusammenhang Wert haben. Wie finden wir nun den Ariadnefaden in dem Labyrinth der Geometrie? Da die Arithmetik in allen Teilen straff geordnet ist, so läßt sich erwarten, daß das System nur kommen kann durch Verbindung mit der Arithmetik. Aber die ältere analytische Geometrie, die wir in der Schule treiben, überträgt nur Ähnlichkeit und den Satz des Pythagoras in Gleichungen Wir müssen die neueren Entwicklungen hinzunehmen, die sich zwar gelegentlich schon bei Euler finden, die aber erst von F. Klein im Erlanger *Programm* 1872 systematisch benutzt sind, nämlich die *Abbildungen* und *Bewegungen* in analytischer Form, d. h. die *Transformationen*. Dadurch wird die *Rechnung* gleichberechtigt mit der *Zeichnung*; und im folgenden soll an bestimmten Beispielen gezeigt werden, wie wenig Neues dadurch hinzukommt, wie sehr aber die Einsicht dadurch vertieft wird.

Zunächst die *Symmetrie*. Es ist merkwürdig, daß die Griechen, die in der Kunst ein so feines Gefühl für Ebenmaß zeigten, in der Geometrie nicht an Symmetrie gedacht haben. Scharfe Fassung erhält dieser Begriff nur analytisch: Der Punkt $P(x, y)$ kommt durch eine Transformation nach $P'(x', y')$ und dann spiegelt

$x' = x, \quad y' = -y$ an einer *Geraden*, an der x-Achse

$x' = -x, \quad y' = -y$ an einem *Punkte*, am Nullpunkte.

Diese zweite Spiegelung, der kein optischer Vorgang entspricht, ist bisher wenig beachtet, und doch hat diese Dualität bereits schöne Erfolge gezeitigt.

Z. B. die Eigenschaften der symmetrischen Vierseite und Vierecke werden dargestellt durch acht duale Gleichungen, welche auch auf der Kugel gelten:

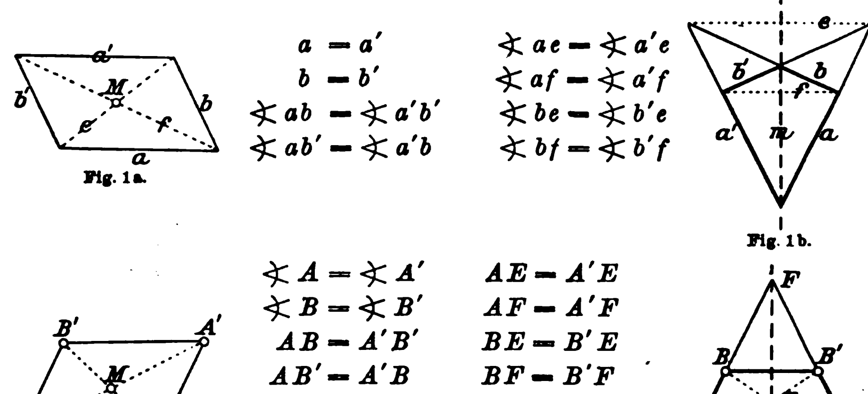


Fig. 1a. Fig. 1b.

$$\begin{array}{ll} a = a' & \sphericalangle ae = \sphericalangle a'e \\ b = b' & \sphericalangle af = \sphericalangle a'f \\ \sphericalangle ab = \sphericalangle a'b' & \sphericalangle be = \sphericalangle b'e \\ \sphericalangle ab' = \sphericalangle a'b & \sphericalangle bf = \sphericalangle b'f \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \sphericalangle A = \sphericalangle A' & AE = A'E \\ \sphericalangle B = \sphericalangle B' & AF = A'F \\ AB = A'B' & BE = B'E \\ AB' = A'B & BF = B'F \end{array}$$

AA' und BB' werden durch M und m halbiert.

Fig. 2a.

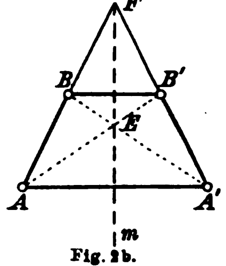


Fig. 2b.

Dieser merkwürdige Zusammenhang ist 2000 Jahre lang nicht bemerkt worden, weil man sich nur mit logischen Kongruenzbeweisen begnügte. Dasselbe gilt von der Dualität zwischen In-, An- und Umkreisen. (Diese Zeitschr. 1923, S. 201.)

Sodann die *Bewegung*. Die griechischen Philosophen behaupteten, daß die Bewegung nicht in die Geometrie, sondern in die Kinematik gehöre. Daher beweist Euklid alles durch Kongruenz. Klein dagegen stellt die Bewegung voran, und dies ist pädagogisch weit wertvoller. Die Kongruenz braucht jedesmal drei Stücke, die man mühsam zusammensuchen muß, und außerdem entstehen dadurch die von Schopenhauer sogenannten Mausefallenbeweise. Man sieht, daß es richtig ist, aber man sieht nicht, warum es richtig ist. Dagegen folgt bei Spiegelung und Bewegung die Gleichheit aller Stücke unmittelbar aus der Anschauung.

Die Gleichungen für Schiebung und Drehung

$$\begin{array}{l|l} x' = x + a & x' = x \cos\alpha - y \sin\alpha \\ y' = y + b & y' = x \sin\alpha + y \cos\alpha \end{array}$$

sind allgemein im Unterricht vorhanden, sie werden bei F. Klein nur anders gedeutet, indem man bei demselben Achsenkreuz den Punkt P nach P' bewegt.

Flächengleichheit kann ausgedrückt werden durch

$$x' = x + y, \quad y' = y, \ [\text{allgemeiner } x' = x + qy], \text{ Fig. 3}$$

und man sieht daraus nicht nur die Gleichheit der Parallelogramme, sondern die Transformation zeigt auch noch, welche Stelle jeder Punkt P der ersten Fläche in der zweiten einnimmt; die Bewegung läßt sich als *Scherung* bezeichnen.

Man kann jedoch dieselben Figuren auch durch $\xi' = -\xi$, $\eta' = \eta$ ineinander überführen; dadurch geht Q nach Q', und man erhält dann eine *Spiegelung* an schiefwinkligen Achsen

Ähnlichkeit erhält man am einfachsten durch $x' = nx$, $y' = ny$. An dem Beispiel

$$\left.\begin{aligned} x' &= x - y \\ y' &= x + y \end{aligned}\right\} \text{[man kann noch beliebig } \pm 1;\ 2;\ 3; \ldots \text{ hinzufügen] Fig. 4}$$

möchte ich die Verwendung im Arbeitsunterricht der Tertia zeigen. Jeder Schüler wählt sich einen Punkt, eine Strecke oder ein Dreieck, und er wendet darauf wiederholt eine von den obigen Transformationen an. Jeder erhält *Drehstreckung* und als Bahnkurven *logarithmische Spiralen*. Der Hinweis auf Schnecken, Ammoniten, Tannenzapfen, Blüten von Kompositen zeigt die Drehstreckung in der

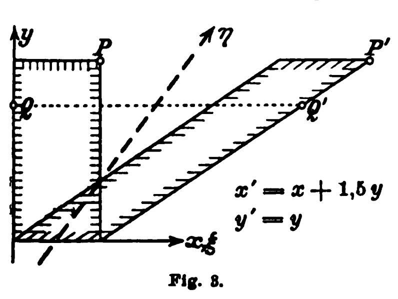


Fig. 3.

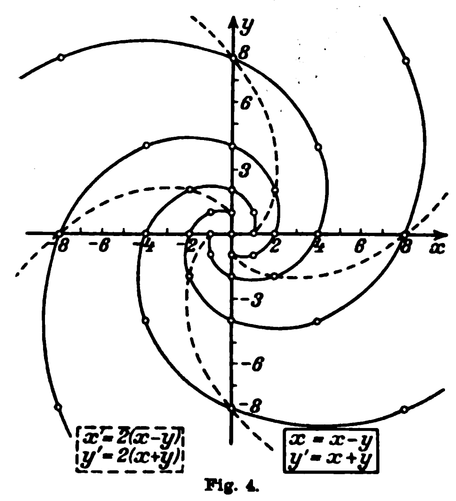


Fig. 4.

Natur. In der Prima kann man weiter fragen: Welche Transformationen geben engere oder weitere Spiralen? Wie kann man Zwischenpunkte einschalten? Welche Punkte, Geraden, Kurven bleiben bei der Transformation unverändert (invariant)? Wie heißt die Bahngleichung der logarithmischen Spirale?

Weiter schließen sich an die *senkrechte Projektion* Fig. 5

$$x' = x$$
$$y' = \frac{b}{a} y$$

der darstellenden Geometrie, die *graphische Addition* Fig. 6, die *Schrägbilder* Fig. 7. Aber wie ist der innere Zusammenhang? Die Geometrie weiß keine Antwort, die Transformationen zeigen sofort, daß wir von der Kongruenz zur *Affinität* übergegangen sind. Die Transformation

$$x' = ax + by + k$$
$$y' = cx + dy + l$$

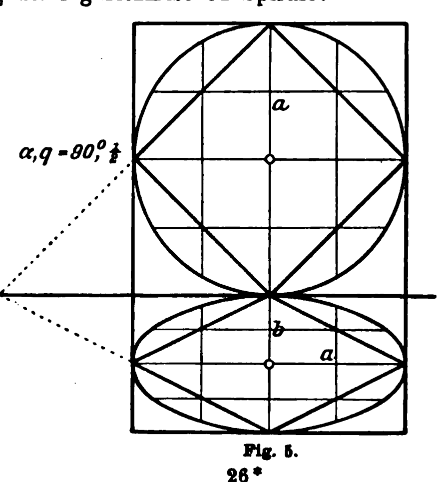


Fig. 5.

enthält alle diese Gebiete, und F. Klein sagt mit Recht, daß die verwirrende Fülle der geometrischen Sätze erst übersichtlich wird durch die Erkenntnis, daß es sich nur um verschiedene Werte der Konstanten handelt.

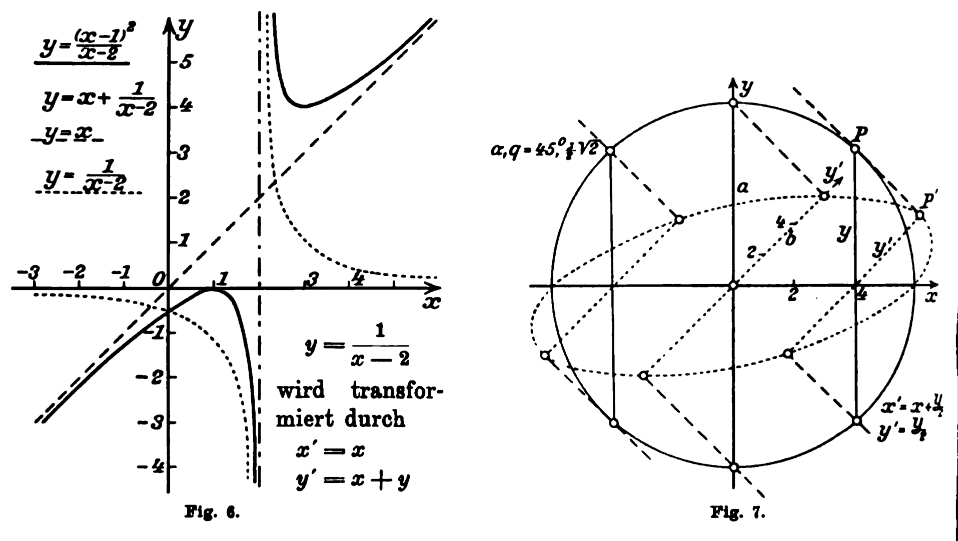


Fig. 6. Fig. 7.

Nun folgt die *Perspektive*, die Punkte aus dem Unendlichen heranholt oder im Unendlichen verschwinden läßt. Die Transformationen müssen also einen Nenner erhalten. Fig. 8a und 8b zeigt, wie man zu einem Punkte P und zu

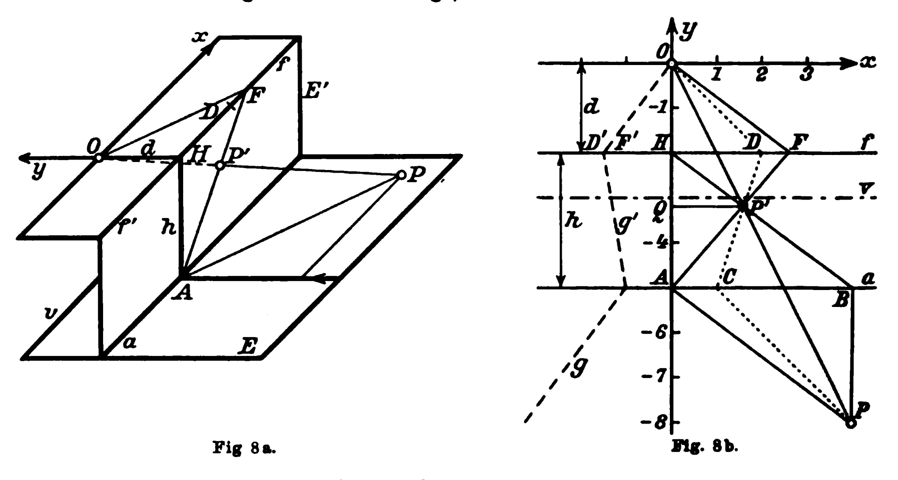


Fig 8a. Fig. 8b.

einer Geraden g das Bild P' und g' zeichnet. Die Transformationen liefern dasselbe Ergebnis

$$\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{OP}{OP'} = \frac{AF}{FP'} = \frac{AH}{HQ} = -\frac{h}{d+y'}$$

$$x' = -\frac{xd}{y+h}, \quad y' = -\frac{yd}{y+h}.$$

An die Transformationen ersten Grades schließen sich die vom zweiten und dritten Grade an, bei denen gerade Linien nicht mehr gerade bleiben, sondern in Kurven umgewandelt werden. Zu diesen gehören die Cremona-Transformationen, welche das Innere eines Kegelschnitts mit dem Äußeren vertauschen. Diese werden natürlich besonders einfach für den Kreis, und damit erhalten wir die Abbildung durch *reziproke Radien*, welche Gerade und Kreise im allgemeinen in Kreise verwandelt.

$$rr' = a^2 \quad \text{oder} \quad x' = \frac{a^2 x}{x^2 + y^2}, \quad y' = \frac{a^2 y}{x^2 + y^2}.$$

Nachdem wir durch das Erlanger Programm die natürliche Entwicklung kennen gelernt haben, können wir die Beweise vereinfachen und dadurch den Schülern überflüssige Arbeit ersparen, z. B.

1. Wir brauchen die *Kongruenzsätze* und die dazu gehörigen *Konstruktionen,* aber wir brauchen nicht die *Euklidischen Beweise*, denn der Beweis folgt aus der Eindeutigkeit der Konstruktion.

2. Die Ellipse sehen wir in unserer Umgebung fast nur als Bild von runden Körpern, und die *Gleichung der Ellipse* erhält man durch affine Abbildung des Kreises (siehe Fig. 5) weit einfacher als durch die Brennpunkte.

3. Der Satz vom *vollständigen Vierseit* wird häufig durch den Menelaus bewiesen — der naturgemäße Beweis erfolgt durch perspektive Abbildung eines Parallelogramms Fig. 9.

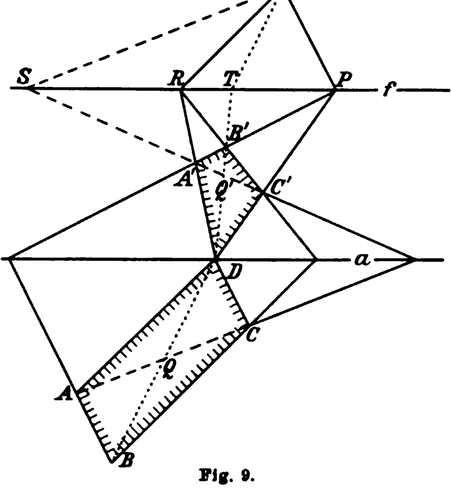


Fig. 9.

In der Figur ist

$OP \| AB \| CD \qquad OS \| AC$

$OR \| AD \| BC \qquad OT \| BD.$

Die Bilder der uneigentlichen Punkte fallen auf die Fluchtlinie f und zwar der Schnittpunkt $AB \times CD$ auf P, $AD \times BC$ auf R. Jede Strecke mit Mittelpunkt und Fernpunkt wird abgebildet durch harmonische Punkte also ACQ durch $A'C'Q'S$, BDQ durch $B'DQ'T$.

4. Auch der Satz des Pascal für den Kreis wird durch dreimalige Anwendung des Menelaus bewiesen — der Satz für den Kreis ist aber entbehrlich; denn da projektive Büschel, die durch fünf Punkte bestimmt sind, sich in einem Kegelschnitt schneiden, so erhält man durch Konstruktion eines beliebigen sechsten Punktes den Satz für alle Kegelschnitte.

5. Hieraus folgt, daß die Sätze von Menelaus und Ceva für das System nicht notwendig sind.

6. Die Sätze von *Pol* und *Polare* werden durch Winkelhalbierende usw. zuerst für den Kreis bewiesen — viel einfacher und überzeugender wird der Beweis durch perspektive Abbildung eines Kreises mit Durchmessern oder mit parallelen Sehnen Fig. 10a und 10b.

Beim Kreise Fig. 10a kann man den Mittelpunkt als Pol, die unendlich ferne Gerade als Polare betrachten. Bei der Abbildung wird der Kreis ein Kegelschnitt, der Mittelpunkt Pol und die Fluchtgerade Polare, weil sie das Bild der unendlich

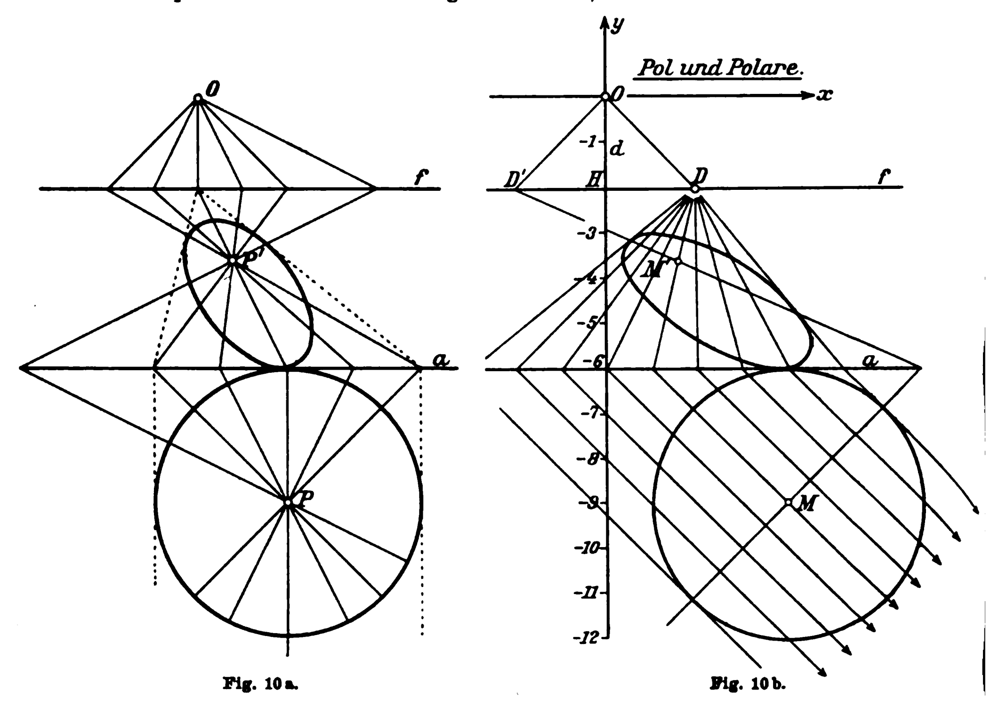


Fig. 10a. Fig. 10b.

fernen Punkte ist. Beim Kreise Fig. 10b werden die parallelen Sehnen durch den senkrechten Durchmesser und den unendlich fernen Punkt der Parallelen harmonisch geteilt. Bei der Abbildung fällt der Pol auf die Fluchtgerade und der Durchmesser wird Polare.

Das weitere Ziel des Erlanger Programms, *Geometrie als Invariantentheorie*, möchte ich zurückstellen. Es ist zwar derselbe Gedanke, der jetzt durch die Relativitätstheorie allgemein bekannt geworden ist, nämlich die geometrischen Eigenschaften müssen ebenso wie die physikalischen unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems sein. Aber die Durchführung ist für den Unterricht zu schwierig, und man wird sich zunächst mit dem Hinweis auf einzelne Invarianten begnügen.

Kurz zusammengefaßt erreichen wir durch das Erlanger Programm zunächst den für die tiefere Ausbildung so wertvollen Gedanken, daß Arithmetik und Geometrie zwar äußerlich verschieden, aber innerlich wesensgleich sind, oder daß sie sich verhalten wie zwei Zifferblätter derselben Uhr. Sodann erhalten wir, was die Geometrie allein trotz 2000jähriger Geschichte nicht hat geben können, nämlich einen Überblick über das Gesamtgebiet der Geometrie, über die Entwicklung und Vertiefung der Gedanken; wir sehen die große Linie, die über Kongruenz, Affinität, Perspektive und Transformationen höheren Grades in unabsehbare Fernen führt. Wir können dadurch die Forderungen der Richtlinien auch für Geometrie erfüllen, und zeigen, daß sie eine aus sich aufbau-

bare Wissenschaft ist; und endlich können wir den Lehrstoff sichten, die Beweise naturgemäßer gestalten und damit die Schüler entlasten.

Der große Gedanke der Zusammenarbeit (Fusion) von Geometrie und Arithmetik zerfällt für die praktische Durchführung in zwei Teile:

alle *arithmetischen* Entwicklungen sollen geometrisch gedeutet und dadurch anschaulich gemacht werden;

alle *geometrischen* Betrachtungen sollen durch Rechnung präzisiert und in einen übersichtlichen Zusammenhang gebracht werden.

Der erste Teil, die graphische Darstellung der Funktionen, die Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Tangenten, Inhalte usw. ist durch die Arbeit der letzten zwanzig Jahre erreicht. Auch der zweite Teil wird zur vollständigen Durchführung eine Reihe von Jahren in Anspruch nehmen, aber er ist ebenso wertvoll für den Unterricht, und er wird ebenso das Interesse und die Freude an der Mathematik erhöhen.

Die Mondbahn hat keine Wendepunkte.

Von Friedrich Schilling in Danzig-Langfuhr.

Mit 2 Figuren im Text.

Im folgenden möchte ich einen sehr anschaulichen und einfachen Beweis des in der Überschrift genannten bekannten Satzes ausführen, den ich gelegentlich als Übungsbeispiel in meinen Vorlesungen vorgetragen habe und der sich für den Schulunterricht besonders eignen dürfte.[1])

Angenommen sei zur Vereinfachung, daß die Erde um die Sonne und ebenso der Mond um die Erde je eine Kreisbahn beschreibt und daß die Mondbahn in der Ebene der Erdbahn gelegen sei. Um zunächst die *Gleichung der Mondbahn*, die eine spezielle Epizykloide ist, in einfachster Weise zu gewinnen, sei in der Ebene der Erdbahn ein rechtwinkliges (xy)-Koordinatensystem angenommen mit dem Sonnenmittelpunkt als Anfangspunkt. In der Anfangslage E_0 und M_0, d. h. für die Zeit $t = 0$, seien Erde und Mond in der x-Achse gelegen und der Mond befinde sich in der Phase des Neumondes. Wir denken noch Sonne und Erde, sowie Erde und Mond durch die Strecken R, r verbunden; die Längen dieser Strecken sind

$$R = 149.10^6 \text{ km} = 23000 \text{ Erdhalbmesser},$$

$$r = 385000 \text{ km} = 60 \text{ Erdhalbmesser}.$$

Fig. 1.

Nach Verlauf der Zeit t möge sich die Strecke SE gegen die feste x-Achse um den Winkel λ, die Strecke EM relativ gegen SE um den Winkel μ gedreht haben (Fig. 1; die Figuren sind natürlich nicht maßstäblich gezeichnet). Man

1) Vgl. die Mitteilung des Herrn A. Weimershaus „Bahn des Mondes um die Sonne" in dieser Zeitschrift, 58. Jahrgang, S. 163.

kann nun die (x, y)-Ebene auch als komplexe z-Zahlenebene ansehen, wobei $z = x + iy$ sei. Ferner sei durch S zu EM die parallele Strecke $S\overline{M}$ gezogen gedacht und den Punkten E und $\overline{M}$ seien die veränderlichen komplexen Zahlen z_1 und z_2 zugeordnet. Dann gehört zu dem Punkte M ersichtlich die komplexe Zahl $z = z_1 + z_2$.

Die Umlaufszeit der Erde um die Sonne beträgt ferner 365 Tage (genau 365, 25637 Tage), die Umlaufszeit des Mondes, der synodische Monat, (d. h. die Umlaufszeit von einer Mondphase bis zur Wiederholung derselben, etwa von einem Neumond bis zum nächsten) 30 Tage (genauer 29, 53059 Tage). Es gilt demgemäß, da zum Durchlaufen der einander entsprechenden Winkel λ und μ die Zeit $t = \frac{365}{360^0} \cdot \lambda = \frac{30}{360^0} \cdot \mu$ gehört, die Gleichung

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{30}{365} = n. \tag{1}$$

Es ist nun ersichtlich (Fig. 1)

$$z_1 = R \cdot e^{i\lambda} = R(\cos \lambda + i \sin \lambda),$$

$$z_2 = -r \cdot e^{i(\lambda+\mu)} = -r \cdot (\cos (\lambda + \mu) + i \sin (\lambda + \mu)),$$

also

$$z = z_1 + z_2 = R \cdot e^{i\lambda} - r \cdot e^{i(\lambda+\mu)},$$

oder

$$\left.\begin{aligned} x &= R \cos \lambda - r \cdot \cos (\lambda + \mu), \\ y &= R \sin \lambda - r \cdot \sin (\lambda + \mu), \end{aligned}\right\} \tag{2a, b}$$

wo die Winkel λ, μ durch die Gleichung (1) miteinander verknüpft sind.

Nach Elimination von λ ergibt sich daher

$$\left.\begin{aligned} x &= R \cos (n\mu) - r \cos (n+1)\mu \\ y &= R \sin (n\mu) - r \sin (n+1)\mu. \end{aligned}\right\} \tag{3a, b}$$

Eine *Halbperiode* seiner Bahn hat der Mond beschrieben, wenn der Winkel μ die Werte von 0 bis 180° durchlaufen hat, d. h. der Mond vom Neumond M_0 bis zum Vollmond M_1 zugenommen hat. *Wir brauchen ersichtlich nur zu zeigen, daß die Halbperiode der Mondbahn keinen Wendepunkt besitzt.*

Es folgt nun aus den Gleichungen (3a, b)

$$dx = [-nR \sin (n\mu) + (n+1) \cdot r \cdot \sin (n+1)\mu]d\mu,$$

$$dy = [\quad nR \cos (n\mu) - (n+1) \cdot r \cdot \cos (n+1)\mu]d\mu.$$

Bezeichnet man den Winkel der Tangente der Mondbahn gegen die positive Richtung der x-Achse mit τ, so erhalten wir ferner

$$\operatorname{tg} \tau = \frac{dy}{dx} = \frac{-nR \cdot \cos (n\mu) + (n+1)r \cdot \cos (n+1)\mu}{nR \cdot \sin (n\mu) - (n+1)r \cdot \sin (n+1)\mu}. \tag{4}$$

Für $\mu = 0$, d. h. in der Anfangslage M_0 des Mondes, ist natürlich $\operatorname{tg} \tau = \infty$, d. h. $\tau = 90^0$; die Kurve hat dort eine zur x-Achse senkrechte Tangente.

Wir können nun leicht erkennen, daß die Halbperiode der Mondbahn tatsächlich nicht aus einem Bogen, der gegen die Sonne konvex, und einem solchen, der gegen die Sonne konkav ist, sich zusammensetzt. Solche Bogen würden sich ja in einem Wendepunkte aneinanderfügen; hierbei verstehen wir unter einem

Wendepunkte einer Kurve allgemein einen solchen Punkt, für dessen Umgebung der Kurvenpunkt mit stetiger Änderung seiner Richtung die Kurve durchläuft, während der Drehungssinn der Tangente sich umkehrt oder das Differential $d\tau$ durch 0 hindurch sein Vorzeichen wechselt.

Für $\mu = \Delta\mu > 0$ ist nämlich, wenn wir uns im Zähler und Nenner der rechten Seite in der Gleichung (4) auf die Glieder erster Ordnung beschränken

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-nR + (n+1)\cdot r}{n^2 R - (n+1)^2 \cdot r} \cdot \frac{1}{\Delta\mu}. \tag{5}$$

Nach Einsetzen der gegebenen Zahlenwerte für R, r, n zeigt sich aber, daß in dem ersten Quotienten der rechten Seite der Zähler negativ, der Nenner aber positiv ist. Es ist also $\frac{dy}{dx}$ für $\mu = \Delta\mu$ negativ oder τ für $\Delta\mu$ ein Winkel im zweiten Quadranten, d. h. *die Mondbahn ist zunächst vom Punkte M_0 aus gegen die Sonne konkav.* Natürlich ist auch die Mondbahn im Punkte M_1, dem Punkte des ersten Vollmondes, konkav, da ja M_1 der am weitesten von der Sonne entfernte Punkt ist. Hiermit ist also erwiesen: *Die Halbperiode der Mondbahn kann nicht aus je einem gegen die Sonne konvexen und konkaven Bogen zusammengesetzt sein.*

Wenn man nun die Schüler fragen würde, ob hiermit auch in aller Strenge nachgewiesen ist, daß die Mondbahn keine Wendepunkte besitzt, so würde ein besonders kluger Schüler gewiß hiergegen einwenden: *Ja, es könnte aber die Halbperiode des Mondes nun doch noch zwei Wendepunkte (oder überhaupt eine gerade Zahl von Wendepunkten) besitzen.* Will der Lehrer auch diesen stichhaltigen Einwand entkräften, so muß allerdings die Funktion tg τ in der Gleichung (4) für die erste Halbperiode noch genauer untersucht werden. Durch Differentiation ergiebt die Gleichung (4)

$$(1 + \operatorname{tg}^2 \tau)d\tau = \frac{n^3 R^2 + (n+1)^3 r^2 - n(n+1)(2n+1)\cdot Rr \cdot \cos\mu}{N^2}\, d\mu, \tag{6}$$

wo

$$N = nR \sin(n\mu) - (n+1)r \sin(n+1)\mu \tag{7}$$

ist. Nun ist aber

$$\begin{aligned}(1 + \operatorname{tg}^2 \tau)\cdot N^2 &= [nR\sin(n\mu) - (n+1)r\cdot\sin(n+1)\mu]^2 \\ &\quad + [-nR\cos(n\mu) + (n+1)r\cdot\cos(n+1)\mu]^2 \\ &= n^2R^2 + (n+1)^2r^2 - 2n(n+1)rR\cdot\cos\mu.\end{aligned}$$

Dieser Ausdruck wird aber niemals null oder negativ; denn sein kleinster Wert ergibt sich für $\mu = 0$ als $\quad (nR - (n+1)\cdot r)^2.$

Es kann also $d\tau$ nach der Gleichung (6) nur 0 werden, d. h. die Möglichkeit eines Wendepunktes vorliegen, wenn der Zähler der rechten Seite in der Gleichung (6) verschwindet. Dies aber könnte höchstens für *einen* Wert μ in dem Intervall $0 \leq \mu \leq 180^0$ der Fall sein. Das aber ist bereits als unmöglich nachgewiesen; der Einwand ist also entkräftet. (Im übrigen würde die Gleichung

$$n^3R^2 + (n+1)^3r^2 - n(n+1)(2n+1)Rr\cdot\cos\mu = 0 \tag{8}$$

auch für $\cos\mu$ einen Wert > 1 ergeben.)

Bei der bisherigen Betrachtung haben wir den folgenden Satz gar nicht entwickelt oder benutzt:

Die Mondbahn kann kinematisch auch als Bahnkurve eines Punktes M dadurch erzeugt werden, daß man einen beweglichen Kreis k_b auf einem festen Kreise k_a (ohne Gleiten) abrollen läßt, wobei der beschreibende Punkt M dem System des beweglichen Kreises angehört, d. h. mit diesem verbunden zu denken ist.

Ohne im einzelnen auf diese interessanten kinematischen Verhältnisse einzugehen[1]), können wir doch unmittelbar folgendes erkennen:

Wir gehen aus von den zwei Kreisen k_a und k_b mit den Radien a, b, wobei

$$a + b = R, \tag{9}$$

$$\frac{b}{a} = n, \tag{10}$$

also

$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{1}{n+1} \cdot R = 21253 \text{ Erdhalbmesser,} \\ b &= \frac{n}{n+1} \cdot R = 1747 \text{ Erdhalbmesser} \end{aligned}\right\} \tag{11a, b}$$

sei. Diese Kreise mögen in der Anfangslage k_a und k_b^0 in der (xy-Ebene) sich äußerlich berührend die Lage der Figur 2 haben. Ist der Kreis k_b^0 durch Abrollen auf dem Kreise k_a in die neue Lage k_b gelangt, so ist offenbar (Fig. 2)

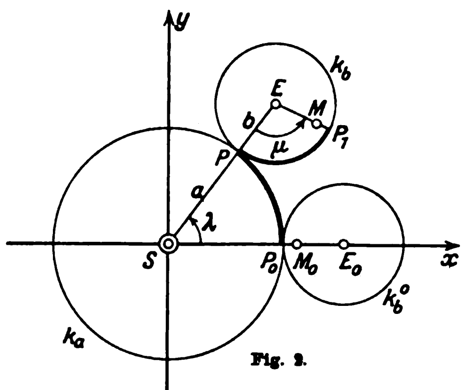


Fig. 2.

$$\widehat{PP_0} = \widehat{PP_1} = a\lambda = b\mu,$$

wenn die Winkel λ, μ hier im Bogenmaß gemessen sind, d. h es ist

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{b}{a} = n,$$

wie es sein soll. Da *M innerhalb* des rollenden Kreises k_b liegt, gehört die Mondbahn zu den „gestreckten" Epizykloiden.

Durch Einführung der Größen a, b nach den Gleichungen (9) und (10) an Stelle von R, n nimmt z. B. die Gleichung (5) die einfachere Form an

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a(b-r)}{r(a+b) - b^2} \cdot \frac{1}{\Delta\mu} \tag{5*}$$

und die Gleichung (8) die Form

$$b^3 + (a+b) \cdot r^2 - b(a+2b)r \cdot \cos\mu = 0$$

oder

$$\cos\mu = \frac{b^3 + (a+b)r^2}{b(a+2b)r}. \tag{8*}$$

1) Man sehe deswegen z. B. meine ausführliche Darstellung: *Über neue kinematische Modelle und eine neue Einführung in die Theorie der zyklischen Kurven.* Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. 44, 1899. S. 214.

Denken wir für einen Augenblick den Abstand r des Mondes von der Erde variabel, so können wir uns fragen:

Für welchen Abstand r (wobei $0 \leqq r < b$ sei, d. h. eine gestreckte Epizykloide vorliege) erhalten wir die Übergangskurve zwischen solchen mit und ohne Wendepunkten?

Offenbar dann, wenn der Nenner des ersten Quotienten auf der rechten Seite der Gleichung (5*) verschwindet oder für $\cos \mu$ nach der Gleichung (8*) sich der Wert 1 ergibt, d. h. für

$$r = \frac{b^2}{a+b} = \text{etwa 133 Erdhalbmesser.} \tag{12}$$

In diesem Falle hat die Epizykloide im Anfangspunkt M_0 eine „vierpunktig berührende" Tangente.

Zur Methodik der Elektrizitätslehre.

Von Rudolf Mayer in Berlin-Tempelhof.

Mit 8 Figuren im Text.

Zusammenfassung.

Die elementare Beschreibung von Naturerscheinungen benutzt Begriffe, die durch unmittelbare Anschauung endlich großer Objekte gewonnen sind. (Primäre Integralbegriffe.) Die allgemeine mathematische Behandlung macht die Einführung von „abgeleiteten Begriffen" notwendig. Es wird für den Unterricht empfohlen, den Übergang von den primären Integralbegriffen zu den abgeleiteten möglichst so durchzuführen, daß der Zusammenhang mit den Grundbeobachtungen nicht verloren geht.

Dieser Übergang wird an Hand der Elektrizitätslehre, bei der in dieser Beziehung viel gesündigt wird, näher ausgeführt.

Inhaltsverzeichnis.

Einleitung.

Allgemeines über die Methodik der mathematischen Naturbeschreibung.

Jede Naturbeobachtung muß den Sinnesorganen des Menschen entsprechend an endlich großen Objekten erfolgen. — Daher wird zunächst die quantitative Beschreibung der Beobachtungen in Form von Integralgesetzen durchgeführt werden. Zur Aufstellung von solchen Gesetzen benutzen wir Begriffe, die unmittelbar aus der beobachteten Integralerscheinung gewonnen werden. Wir wollen solche Begriffe im folgenden als „primäre Integralbegriffe" bezeichnen.

Zur Veranschaulichung bringen wir folgendes Beispiel:

Die Anschauung lehrt, daß ein Gas, das in ein Gefäß eingeschlossen ist, auf die Wände des Gefäßes eine Kraft ausübt. Verkleinert man bei konstant gehaltener Gasmenge und Temperatur den Rauminhalt des Gefäßes, so wird die Kraft proportional zunehmen. Wir schreiben das Integralgesetz für diese Erfahrung in der Form

$$P \cdot V = \text{konstant.}$$

Die primären Integralbegriffe, nämlich die Kraft P, die auf die Gefäßwände wirkt und das Volumen V des Gefäßes haben den unmittelbaren Zusammenhang mit der Beobachtung noch nicht verloren.

Die mathematische Physik abstrahiert nun von den Grenzbedingungen, die bei jeder Wahrnehmung gelten müßten, und leitet aus den primären Begriffen solche ab, die von jeder Grenzbedingung unabhängig sind. An Stelle der Kraft auf die Gefäßwände tritt der Gasdruck als Zustandsgröße in jedem Raumelement. Obwohl diese Größe der Beobachtung nur zugänglich gemacht werden kann, wenn man an der zu untersuchenden Raumstelle die nötigen Grenzbedingungen (Wände eines Manometers) schafft, so spricht man doch vom Gasdruck als einer Realität, die ohne die störenden Wände des Manometers existiert.

Physikalische Begriffe, die aus den „primären Integralbegriffen" durch Abstraktion von besonderen Grenzbedingungen gewonnen sind, wollen wir im folgenden „abgeleitete Begriffe" nennen.

Die Loslösung der Begriffe von speziellen Grenzbedingungen macht es uns erst möglich, die gewonnenen Naturgesetze, die dann in „Differentialform" erscheinen, auf neue, noch nicht beobachtete Grenzbedingungen anzuwenden und damit physikalische Vorgänge vorauszusagen.

Es ist übrigens klar, daß durch den Übergang von den primären Integralbegriffen auf die abgeleiteten und vom Integralgesetz auf das Differentialgesetz der physikalische Inhalt der Beobachtung in keiner Weise verändert bzw. erweitert wird. Durch diesen Übergang wird nur die allgemeine Anwendbarkeit auf analoge Fälle möglich.

In der folgenden Arbeit soll gezeigt werden, wie sich in der Lehre von Elektrizität und Magnetismus die Maxwellsche Gedankenwelt durch den Übergang von den Integralbegriffen zu den abgeleiteten aufbaut. Die in den meisten Lehrbüchern übliche Darstellung der Maxwellschen Lehre weist in didaktischer Beziehung manche Mängel auf, die nach meiner Ansicht zum großen Teil darauf zurückzuführen sind, daß die logische Reihe: Beobachtung — Integralbegriff — Integralgesetz — abgeleiteter Begriff — Differentialgesetz nicht immer streng eingehalten wird.

Zur Demonstration des obigen Gedankens soll die Arbeit in zwei Abschnitte geteilt werden. Im ersten Abschnitt wird die Lehre von Elektrizität und Magnetismus in Integralgesetzen mit Hilfe von Integralbegriffen entwickelt, während im zweiten Teil der Übergang zu den abgeleiteten Begriffen und den entsprechenden Differentialgesetzen der Maxwellschen Theorie erfolgt.

Es wird sich dabei tatsächlich herausstellen, daß durch den Übergang zu den abgeleiteten Begriffen keine wesentlich neuen Erkenntnisse gewonnen werden können.

Der Hauptinhalt der Maxwellschen Lehre wird schon im ersten Teil behandelt, obwohl darin von den abgeleiteten Begriffen wie: elektrische und magnetische Feldstärke, magnetische Induktion, elektrische Erregung keine Rede ist.

Auf Erörterungen über die grundlegenden Begriffe Energie, Elektrizitätsmenge, Spannung habe ich mich mit Absicht nicht eingelassen, zumal da die Maxwellsche Theorie als eine rein phänomenologische auf tiefer schürfende Fragen über das Wesen der Grundbegriffe keine Auskunft gibt. Die Bildung dieser Begriffe kann im Unterricht doch nur durch naive Anschauung und fortgesetzte Übung erfolgen.

I. Abschnitt.

Die Lehre von Elektrizität und Magnetismus in Integraldarstellung.

1. Der Energiesatz; das elektromagnetische Arbeits- und Wärmeäquivalent.

Die moderne Naturbetrachtung steht unter dem Zeichen des Energiesatzes. — Wir wollen diesen Satz daher an die Spitze der Lehre von Elektrizität und Magnetismus stellen. Er sagt aus, daß es eine elektromagnetische Energieform gibt, die einer andern Energieform (mechanische, chemische oder Wärmeenergie) gleichwertig ist und in eine oder mehrere von diesen verwandelt werden kann.

Jede elektromagnetische Erscheinung fassen wir als eine solche Energieumwandlung auf.

Die Größe, auf die der Energiesatz angewandt werden kann, das ist also diejenige Größe, die bei der Energieumwandlung unverändert bleibt, ist durch das Produkt aus Elektrizitätsmenge und Spannung gegeben.

$$A = Q \cdot E \tag{1}$$

A = die elektrische Arbeit (Joule)

Q = die Elektrizitätsmenge (Coulomb)

E = die Spannung (Volt).

Die eingeklammerten Worte geben die benutzten Maßeinheiten.

In der Mechanik benutzt man als Einheit der Arbeit das Erg, in der Wärmelehre als Einheit der Wärmemenge die Kalorie.

Durch die messende Verfolgung einer Energieumwandlung kann man das Zahlenverhältnis der verschiedenen Einheiten ermitteln. Es gilt die Beziehung

$$\begin{aligned} 1 \text{ Volt-Coulomb} &= 1 \text{ Joule} \\ &= 1{,}00051 \cdot 10^7 \text{ Erg} = 0{,}23899 \cdot 10^{-3} \text{ Cal.} \end{aligned}$$

Die beiden Zahlen nennen wir das elektromagnetische Arbeits- bzw. Wärmeäquivalent. Sie haben in der Elektrizitätslehre dieselbe Bedeutung wie das Arbeitsäquivalent der Kalorie in der Wärmelehre.

2. Elektrostatik.

a) Plattenkondensator.

Die Grundbegriffe der Elektrostatik wollen wir uns an der in Fig. 1 dargestellten Anordnung klarmachen.

Zwei metallische, einander parallele Platten werden an eine Spannung E gelegt. Wir beobachten, daß zu den Platten eine Elektrizitätsmenge Q geströmt ist, die sich proportional mit der angelegten Spannung ändert. Wir können daher schreiben

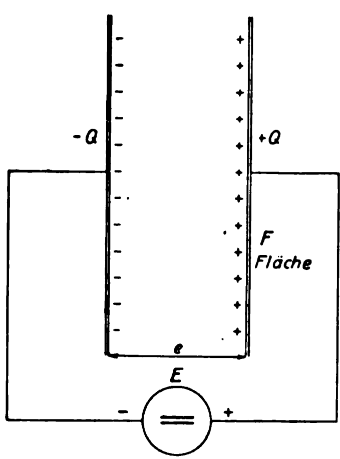


Fig. 1. Plattenkondensator.

$$Q = CE. \tag{2}$$

Den Proportionalitätsfaktor C nennen wir die Kapazität des Plattenkondensators; wir messen sie in Coulomb/Volt = Farad.

Ändert man die Abmessungen des Kondensators, so wird man unter Wahrung gewisser Vorsichtsmaßregeln (der Einfluß des Plattenrandes ist durch einen Schutzring zu eliminieren) beobachten, daß die Kapazität sich proportional mit der Fläche F der Platten und umgekehrt proportional mit dem Abstand l der Platten ändert. Wir schreiben diese Beobachtung in der Form

$$C = \varepsilon_0 \frac{F}{l} \tag{3}$$

und nennen ε_0 die Dielektrizitätskonstante des zwischen den Platten sich befindlichen Mediums. (In unserem Falle Vakuum oder Luft.) Für den leeren Raum wurde sie zu $\varepsilon_0 = 0{,}886 \cdot 10^{-13}$ Farad/cm ermittelt.

Gibt man zwischen die Platten des Kondensators ein anderes Material, z. B. Glas, so beobachtet man eine Vergrößerung der Kapazität und damit der Dielektrizitätskonstanten, so daß jetzt die Beziehung gilt

$$C = \varepsilon \varepsilon_0 \frac{F}{l}. \tag{3'}$$

Die Verhältniszahl ε nennen wir die relative Dielektrizität.

b) Energieinhalt des Plattenkondensators und Kraftwirkungen.

Der Stromquelle, an die unser Plattenkondensator angeschlossen ist, wurde die Energie QE [vgl. Gleichung (1)] entnommen.

Das Arbeitsvermögen des geladenen Kondensators beträgt aber nur die Hälfte dieses Wertes; also mit Hilfe der Gleichungen (2) und (3)

$$A = \frac{QE}{2} = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2 l}{2\varepsilon_0 F}. \tag{4}$$

Die Kapazität ist nicht mehr imstande, bei Entladung über einen äußeren Widerstand die Elektrizitätsmenge Q bei gleichbleibender Spannung E zurück-

zugeben. Die Spannung nimmt nach Gleichung (2) gleichzeitig mit der jeweiligen Restladung bis Null ab. Wegen der linearen Abhängigkeit zwischen Ladung und Spannung ergibt die Integration bis zur vollständigen Entladung den Ausdruck (4). Die andere Hälfte der der Stromquelle entnommenen Energie ist beim Ladevorgang in den Ohmschen Widerständen des Kreises verloren gegangen.

Die im Kondensator aufgespeicherte Energie kann in andere Energieformen umgewandelt werden. Die Umwandlung in Wärme durch Entladen über einen äußeren Kreis haben wir oben angedeutet.

Eine Umwandlung in mechanische Arbeit ist dadurch möglich, daß man die Platten des Kondensators gegeneinander verschiebt. Nähert man z. B. die Platten bei abgeschalteter Spannung und daher konstanter Ladung um eine virtuelle Verschiebung dl, so muß der Verlust an elektrischer Energie gleich der auf dem Wege dl geleisteten mechanischen Arbeit sei. Das gibt also nach Gleichung (4)

$$dA = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 F} \cdot dl = K dl. \tag{5}$$

Die Kraft, die die beiden Platten aufeinander ausüben, beträgt daher

$$K = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 F} = \frac{QE}{2l}. \tag{6}$$

Die Messung dieser Kraft kann nach Gleichung (6) zur Ermittlung der Dielektrizitätskonstanten des Äthers benutzt werden.

3. Elektrodynamik.

a) Das Ohmsche Gesetz.

Die in der Zeiteinheit durch einen Querschnitt strömende Elektrizitätsmenge nennen wir die Stromstärke. Es gilt also

$$J = \frac{dQ}{dt}. \tag{7}$$

Herrscht an einem Apparat die Spannung E und fließt durch ihn in der Zeit dt die Elektrizitätsmenge dQ, so beträgt die in dieser Zeit umgesetzte Arbeit nach Gleichung (1)

$$dA = E dQ = EJ dt \tag{8}$$

Die in der Zeiteinheit umgesetzte Arbeit, die Leistung ist daher

$$N = \frac{dA}{dt} = EJ. \tag{9}$$

Legt man die Spannung an einen Leiter, so wird die durch Gleichung (9) gegebene Leistung in Wärme umgewandelt. (Joulesche Wärme.)

Die Erfahrung zeigt, daß man bei Änderung der Spannung eine proportionale Änderung des Stromes und damit eine dem Quadrat proportionale Änderung der erzeugten Wärme erhält. Wir schreiben das Ohmsche Gesetz

$$E = RJ \tag{10}$$

$$N = \frac{E^2}{R} \tag{10'}$$

R heißt der Widerstand des Leiters (zu messen in Ohm = Volt/Ampere).

Weitere Versuche zeigen, daß bei einem bestimmten Material der Widerstand proportional der Länge l und umgekehrt proportional dem Querschnitt F des Stromleiters sich ändert.

$$R = \varrho \frac{l}{F}, \tag{11}$$

ϱ ist der spezifische Widerstand.

b) Das Induktionsgesetz, magnetische Energie.

Eine andere Art der Energieumsetzung, die ebenfalls durch die Gleichung (8) beschrieben werden kann, wollen wir uns an Hand der Fig. 2 veranschaulichen.

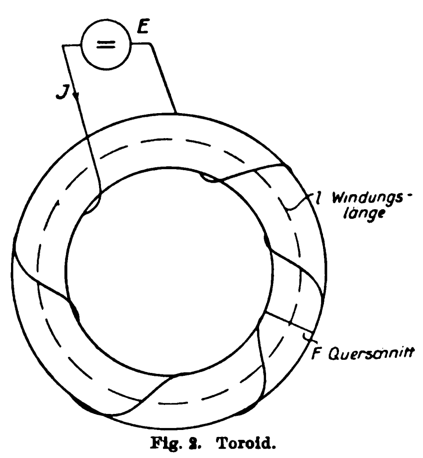


Fig. 2. Toroid.

Der Radius der dargestellten Ringspule sei so groß im Vergleich zu den Abmessungen der Querschnittsfläche F, daß die mittlere Windungslänge l für alle Querschnittspunkte als gleich angenommen werden kann. Um die Spule seien w Wicklungen gewickelt, die widerstandsfrei sein sollen. Legt man an die Klemmen der Wicklung die Spannung E, so springt der Strom nicht sofort auf einen Endwert, der wegen der angenommenen Widerstandsfreiheit unendlich groß sein würde, sondern er steigt linear mit der Zeit an. (Bei genügend großen Spulen mit Eisenkern kann man das allmähliche Ansteigen des Stromes an einem Instrument zeigen.)

Legt man verschiedene Spannungen an, so beobachtet man, daß sich die Änderungsgeschwindigkeit des Stromes proportional der Spannung ändert. Wir schreiben also das Induktionsgesetz in der Form

$$E = L \frac{dJ}{dt}. \tag{12}$$

Der Koeffizient L ist die Selbstinduktion, die in Ohm/sec = Henry gemessen wird.

Setzt man (12) in (8) ein, so erhält man für die der Stromquelle in der Zeit dt entnommene Arbeit den Ausdruck

$$dA = EJdt = LJdJ = Ld\frac{J^2}{2}. \tag{13}$$

Beginnt man mit dem Strom O, so hat man bis zur Erreichung des Stromes J der Spule die Arbeitsmenge

$$A = L\frac{J^2}{2} \tag{14}$$

zugeführt. Wir sagen, daß diese Energie zum Aufbau des magnetischen Zustandes in der Spule verwendet wurde. Durch Verkleinerung dieser Energie sind wir ebenso wie durch Entladen des Kondensators imstande, eine andere Energie (Wärme oder mechanische Arbeit) zu gewinnen.

Bevor wir Beispiele für solche Energieumwandlungen näher besprechen, wollen wir uns mit der Selbstinduktion L etwas beschäftigen. Um den Einfluß

der Windungszahl w zu erkennen, schreiben wir das Induktionsgesetz (12) in der Form

$$\frac{E}{w} = \left(\frac{L}{w^2}\right)\frac{d(wJ)}{dt} = L_0\frac{d(wJ)}{dt}. \qquad (12')$$

Es erscheint danach zweckmäßig, für die Charakterisierung des magnetischen Zustandes die Spannung pro Windung $\left(\frac{E}{w}\right)$ und die Amperewindungen (wJ) einzuführen. Gleichung (12′) zusammen mit (14) sagt aus, daß die Energieverhältnisse dieselben bleiben, wenn man z. B. bei der halben Windungszahl die halbe Spannung und dafür den doppelten Strom nimmt. L_0 in Gleichung (12′) bedeutet die Selbstinduktion unserer Spule, wenn sie nur mit einer Windung bewickelt wird. Für die Selbstinduktion mit jeder andern Windungszahl gilt daher nach derselben Gleichung

$$L = w^2 L_0. \qquad (15)$$

Durch Versuche kann weiter festgestellt werden, daß die Selbstinduktion einer Spule proportional der Windungsfläche F und umgekehrt proportional der Windungslänge l ist. Hat die Spule eine Windung, so gilt also

$$L_0 = \mu_0 \frac{F}{l} \qquad (16)$$

und nach Gleichung (15) für w Windungen

$$L = \mu_0 w^2 \frac{F}{l}. \qquad (17)$$

Die Proportionalitätskonstante μ_0 nennen wir die Permeabilität; sie wurde für das Vakuum zu

$$\mu_0 = 1{,}26 \cdot 10^{-8}\ \text{Henry/cm} \quad \text{ermittelt.}$$

Setzen wir (17) in (12) ein, so erhalten wir nach Multiplikation mit dt

$$E\,dt = L\,dJ = \mu_0 \frac{w^2 F}{l}\,dJ. \qquad (12'')$$

Geht man vom stromlosen Zustand aus, so erhält man aus (12″) nach einigen Umformungen durch Integration bis zum Stromwert J

$$\int^{\bullet} \frac{E_m\,dt}{wF} = \mu_0 \left(\frac{wJ}{l}\right). \qquad (18)$$

Bei der Integration ist für die Spannung nur derjenige Betrag der Klemmenspannung einzusetzen, der für die Erzeugung der magnetischen Energie verwendet wird. E_m ist also die Differenz zwischen Klemmenspannung und dem Ohmschen Abfall der Wicklung.

Füllt man den Innenraum der Spule unter Beibehaltung der Abmessungen und der Windungszahl mit Eisen, so beobachtet man ein sehr starkes Anwachsen der Selbstinduktion. In der Formel 20 ist daher statt μ_0 der Wert $\mu\mu_0$ einzusetzen, wobei die relative Permeabilität μ Werte in der Größenordnung von 100 und 1000 annehmen kann. Läßt man auf eine solche Spule das gleiche Spannungs-Zeit-Integral zur Erzeugung der magnetischen Energie wirken, wie früher auf die Luftspule, so kann man den erreichten Stromwert aus einem der Gleichung (18) analogen Ausdruck errechnen.

$$\int^{\bullet} \frac{E_m\,dt}{wF} = \mu\mu_0 \left(\frac{wJ}{l}\right). \qquad (18')$$

Man erkennt, daß der Strom und damit die aufgewendete Energie nur den μ-ten Teil des früheren Wertes beträgt.

c) Rückgewinnung der Energie, Erweiterung des Induktionsgesetzes. Schaltet man die Wicklung plötzlich von der Stromquelle ab und legt sie ohne Verzögerung an einen Widerstand R, so muß, da die magnetische Energie der Spule sich nicht plötzlich ändern kann, der Strom durch den Widerstand weiterfließen. An demselben muß daher die Spannung

$$E_R = JR \quad \text{auftreten.}$$

Während wir früher zur Erzeugung des magnetischen Zustandes in der Spule eine Stromquelle benötigten, wirkt jetzt die Spule als eine auf den Widerstand R arbeitende Stromquelle. Die in der Zeit dt verbrauchte Energie muß gleich der Abnahme der magnetischen Energie sein

$$E_R J dt = -L d\frac{J^2}{2} = -LJdJ. \tag{19}$$

Daraus folgt eine dem Induktionsgesetz (12) analoge Gleichung

$$E_R = -L\frac{dJ}{dt}, \tag{20}$$

aus der man die Abnahmegeschwindigkeit des Stromes errechnen kann.

Die Verallgemeinerung des Induktionsgesetzes ergibt sich durch die experimentelle Tatsache, daß sich das Spannungs-Zeit-Integral [s. Gleichung (18')] auch an einer Wicklung beobachten läßt, die für die Erzeugung oder den Verbrauch der magnetischen Energie nicht benutzt wird. (Fortsetzung in Heft 10.)

Kleine Mitteilungen.

Physikalisch-geometrische Bestimmung von π. Bekanntlich läßt sich die Zahl π mittels einer Wage dadurch bestimmen, daß man einen Kreis aus einer homogenen Holzplatte aussägt und sein Gewicht mit dem eines entsprechenden Quadrates vergleicht. Diese Methode will ich als *„physikalisch-arithmetisch"* bezeichnen.

Ihr will ich eine *„physikalisch-geometrische"* Methode gegenüberstellen, die es gestattet, den Kreisumfang *rein konstruktiv* zu bestimmen. Als „erlaubtes Hilfsmittel" benutze ich außer Lineal und Zirkel das *Fällen des physikalischen Lotes* von einem Punkte aus.

Zu diesem Zwecke mache ich davon Gebrauch, daß der Abstand des Schwerpunktes eines Halbkreises von seinem Durchmesser in einfacher Weise von π abhängt. Bezeichnet man diesen Abstand mit s, so ist nach der Guldinschen Regel

$$\frac{\pi}{2} r^2 \cdot 2\pi s = \frac{4}{3} \pi r^3$$

oder

$$s = \frac{4 \cdot r}{3\pi}.$$

Die Konstruktion des Kreisumfanges selbst erfolgt dann folgendermaßen:

Ich säge einen Halbkreis aus, durchbohre ihn in irgendeinem Punkte und hänge ihn dort frei beweglich auf. Von diesem Durchbohrungspunkte fälle ich

mit Hilfe von Faden und Gewicht das physikalische Lot. Der Schnittpunkt dieses Lotes mit der Mittelsenkrechten auf dem Durchmesser des Halbkreises ist der Schwerpunkt; sein Abstand s vom Durchmesser ist gleich $\frac{4r}{3\pi}$.

Nun ziehe ich zu s, $2r$ und $2r$ die vierte Proportionale, dann ist

$$s : 2r = 2r : x$$

oder

$$x = \frac{4r^2}{s}$$

$$x = 3\pi r.$$

Der dritte Teil dieser so konstruierten Strecke ist dann *gleich der Länge des halben Kreisumfanges.*

Diese physikalisch-geometrische Methode hat gegenüber der eingangs erwähnten physikalisch-arithmetischen den Vorteil, daß sie keine numerische Näherungsberechnung, sondern *eine völlig exakte Konstruktion* ist. Sie ist in *demselben Sinne exakt* wie jede *real* mit Bleistift gezogene Konstruktionsfigur, d. h. der Fehler ist nur durch die Breite des Bleistiftstriches, bzw. die Dicke des Fadens bestimmt. Der Unterschied gegenüber den üblichen Konstruktionsaufgaben besteht lediglich in der Zulassung eines physikalischen Hilfsmittels, des Fällens des physikalischen Lotes.

Berlin-Neukölln. F. APT.

Berührungskreise des Dreiecks. Die zwischen Inkreisradius ϱ und den Ankreisradien ϱ_a, ϱ_b, ϱ_c bestehende Gleichung $1/\varrho = 1/\varrho_a + 1/\varrho_b + 1/\varrho_c$ besagt: Die Inkreiskrümmung ist gleich der Summe der Ankreiskrümmungen.

Da die Kreiskrümmung an dem Winkel gemessen wird, um den sich Tangente und Radius des Kreises drehen, falls man die Bogenlänge 1 auf der Peripherie abgeht, so läßt sich der Krümmungssatz leicht veranschaulichen, wenn man alle vier Berührungskreise um einen und denselben beliebigen Punkt 0 legt. Addiert man statt der zur Bogenlänge 1 gehörigen Drehwinkel (bei den Ankreisen) die zur Bogenlänge $2\pi\varrho$ (Umfang des Inkreises) gehörigen, so muß deren Summe statt $1/\varrho$ den Wert $1/\varrho \cdot 2\pi\varrho = 2\pi$ ergeben, d. h. eine volle Umdrehung.

Als einfachstes Beispiel ist das (rechtwinklige) Dreieck $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$ brauchbar. Sein Halbumfang $s = 6$, sein Inhalt $f = 6$; $\varrho = f/s = 1$, $\varrho_a = f/(s-a) = 2$, $\varrho_b = f/(s-b) = 3$, $\varrho_c = f/(s-c) = 6$. Lege die Kreise mit den Radien 1, 2, 3, 6 alle um Punkt 0. Schneide einen biegsamen Streifen von der Länge $2\pi = 6{,}28$. Ziehe von 0 aus irgendeinen Strahl. Lege von diesem ab den Streifen längs des Kreises ϱ; er reicht ganz herum: 360^0. Lege dann den Streifen, wieder vom Strahl ab, längs des Kreises ϱ_a; er reicht halb herum: 180^0. Ziehe durch den Endpunkt des Streifens von 0 aus den Strahl. Lege von diesem Strahl ab in gleichem Drehsinne wie vorher den Streifen längs des Kreises ϱ_b; er faßt 120^0. Ziehe durch den jetzigen Endpunkt des Streifens von 0 aus den Strahl. Lege von diesem Strahl ab in gleichem Drehsinne den Streifen längs des Kreises ϱ_c; er faßt 60^0. So erreicht sein Ende den ursprünglichen Strahl wieder: die Summe der drei Drehwinkel ergibt tatsächlich eine volle Umdrehung, d. h. den beim Inkreise zum Abgehen des Bogens $2\pi\varrho$ gehörigen Drehwinkel.

Bremen. CHR. RABBA.

Aufgaben-Repertorium.

Redigiert von Studienrat M. Breitag in Viersen (Burgstr. 2 c).

(Alle das Aufgaben-Repertorium betreffenden Zusendungen und Anfragen sind an die Adresse dieses Herrn zu richten.)

A. Auflösungen.

911. Ein Punkt B durchläuft den einen Schenkel eines rechten Winkels A und wird jeweils mit einem festen Punkte O auf dem anderen Schenkel verbunden. Macht man dann auf der Halbierungslinie des Winkels BOA die Strecke $\overline{OP} = \overline{OB}$, so durchläuft P eine gerade zirkulare Kreuzkurve. (Heft 5, 1926, Hoffmann-Ravensburg.)

Lösung. Es sei O der Anfangspunkt, OA die x-Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems und $\overline{OA} = 2a$. Mit $\sphericalangle BOA = 2\varphi$, $\overline{OP} = r$ erhält man die Polargleichung von P zu $r = \frac{2a}{\cos 2\varphi}$. Geht man mittels $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $\varphi = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}$ zu rechtwinkligen Koordinaten über, so fließt

$$\sqrt{x^2+y^2} = \frac{2a}{\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} - \frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}} = \frac{2a(x^2+y^2)}{x^2-y^2},$$

oder quadriert: $(x^2-y^2)^2 - 4a^2(x^2+y^2) = 0$. Dreht man das Koordinatensystem $x \mid y$ um den Winkel $\frac{\pi}{4}$ nach $\xi \mid \eta$, so ergibt sich wegen $x = \frac{\xi - \eta}{\sqrt{2}}$, $y = \frac{\xi + \eta}{\sqrt{2}}$ die Gleichung: $4\xi^2\eta^2 - 4a^2(\xi^2+\eta^2) = 0$, oder: $\frac{a^2}{\xi^2} + \frac{a^2}{\eta^2} - 1 = 0$.

Brehm. Bücking. Conrad. Diez. Hoffmann. Janzen. Kasper. Mahrenholz. Münst. Rall. Schick. Stiegler.

912. Auf den Seiten des Dreiecks ABC liegen die Strecken m, n, p. P sei ein beliebiger Punkt. Wie muß man P bewegen, damit die Summe der auf m, n und p stehenden Dreiecke mit der gemeinsamen Spitze P (die Dreiecke in einer bestimmten Umlaufsrichtung gemessen) sich möglichst stark ändert? (Heft 5, 1926, Bücking-Darmstadt.)

Lösung. 1. Die Umlaufsrichtung sei entgegengesetzt dem Uhrzeiger. Addiert man mittelst Vektoren m, n und p (Linienzug $HJKL$) und fällt man $PQ \perp HL$, so ist dies die verlangte Richtung, denn die vektorielle Addition der drei Dreiecke ergibt ein solches, dessen Grundlinie parallel zu HL ist. Sein Inhalt ändert sich möglichst stark, wenn P die Höhe durchläuft.

2. Nimmt man BC zur x-Achse das Lot von A hierauf zur y-Achse, so lautet die Gleichung von AB: $y = c \cdot \sin\beta + x \cdot \operatorname{tg}\beta \cdot \frac{x \cdot \operatorname{tg}\beta - y + c \cdot \sin\beta}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\beta}} = 0$, $x \cdot \sin\beta - y \cdot \cos\beta + c \cdot \sin\beta \cdot \cos\beta = 0$. Als Gleichung von AC ergibt sich

$x \cdot \sin\gamma + y \cdot \cos\gamma - b \sin\gamma \cdot \cos\gamma = 0$. Der Inhalt des Dreiecks ABC sei J, die Summe der drei Dreiecke betrage bei der angenommenen Lage von P: $\frac{r}{s} \cdot J$. Bezeichnet man die Koordinaten von P mit x und y, so hat man die Gleichung $\frac{1}{2}my - \frac{1}{2}n(x \cdot \sin\gamma + y\cos\gamma - b\sin\gamma \cdot \cos\gamma) + \frac{1}{2}p(x\sin\beta - y\cos\beta + c\sin\beta \cdot \cos\beta) = \frac{r}{s} \cdot J$; $x(p \cdot \sin\beta - n \cdot \sin\gamma) + y(m - p \cdot \cos\beta - n \cdot \cos\gamma) = \frac{2r}{s} \cdot J - b \cdot n \cdot \sin\gamma \cdot \cos\gamma - c \cdot p \cdot \sin\beta \cdot \cos\beta$. Die Punkte P, für welche die Summe der Dreiecke ebenso groß ist, liegen auf einer Geraden. Variiert man $\frac{r}{s}$, so erhält man eine Schar von Parallelen. Soll die Summe der Dreiecke sich möglichst stark ändern, so müssen die Punkte P sich auf Senkrechten zu diesen Parallelen bewegen. Die allgemeine Gleichung für diese Bahnen lautet

$$x(p \cdot \cos\beta + n\cos\gamma - m) + y(p \cdot \sin\beta - n \cdot \sin\gamma) = \text{const.}$$

Böcking. Conrad. Janzen. Rall. Scharfstter. Schick. Stiegler.

913. Die Parabel $y^2 = 2px$ rotiert zwischen den Abszissen O und x um die X-Achse und erzeugt dabei eine Schale. Wie groß muß die Tiefe x der Schale gemacht werden, damit sie ungefüllt auf Wasser eben noch schwimmt, wenn 1 qcm der Schalenfläche s g wiegt? (Besonderer Fall: $p = 4s$.) (Heft 6, 1926, Mahrenholz-Kottbus.)

Lösung. Aus $O = 2\pi\int_0^y y\sqrt{1 + \frac{y^2}{p^2}}\,dy = \frac{8}{2}\pi p^2\left(\sqrt{\left(1 + \frac{y^2}{p^2}\right)^3} - 1\right)$ und

$J = \int_0^y \frac{y^2 \pi dy}{p} = \frac{y^4\pi}{4p}$ ergibt sich mit $s \cdot O = J$ die Gleichung $x^4 - \frac{32s^2}{9p}x^3 + \frac{4s}{3}(p - 4s)x^2 - \frac{8s^2}{3}px = 0$. Diese reduziert sich für $p = 4s$ auf

$$x^3 - \frac{8}{9}sx^2 - \frac{32}{3}s^3 = 0.$$

Die einzige reelle Wurzel ist $x = 2{,}54s\ (\approx 0{,}64p)$.

Brehm. Böcking. Conrad. Dies. Fix. Hoffmann. Janzen. Kasper. Lohnes. Mahrenholz. Münst. Rall. Ruff. Schick. Stiegler.

B. Neue Aufgaben.

972. Die vom Mittelpunkt der Grundfläche einer regelmäßigen n-seitigen Pyramide auf die Seitenkanten s gefällten Lote betrachte man als Seitenkanten einer einbeschriebenen Pyramide. 1. Welches ist das Maximum dieser inneren Pyramide, 2. welchen Bruchteil der äußeren bildet sie höchstens?

Emmerich-Mülheim-Ruhr.

973. Im rechtwinkligen Dreieck ist bekanntlich $a^2 - cp = b^2 - cq = h^2 - pq$. Im ebenen Dreieck ist $a^2 - cp = b^2 - cq = h_c^2 - pq = t_c^2 - \frac{c^2}{4}$.

Hörting-Zeitz.

974. Besteht zwischen den Winkeln eines sphärischen Dreiecks die Beziehung $\alpha = \beta + \gamma$, so ist $\cos b + \cos c - \cos a = 1$. Mahrenholz-Kottbus.

975. Man bestimme den Mittelpunkt eines Kreises ohne Hilfe des Zirkels mittels zweier Zeichendreiecke. F. Müller-München.

Briefkasten zum Aufgaben-Repertorium.

Bis zum 10. November sandten Lösungen ein: Bücking-Darmstadt 962—965. 967. Ehrlich-Berlin 967. Hoffmann-Ravensburg 959—963. 966. 967. Mahrenholz-Kottbus 962—967. Michnik-Beuthen 962—967. Münst-Ebingen 934. Neumann-München 954. 958. Olitsch-Fürth 966. Rall-Mergentheim 949. 950. 956. 966. 967. Ruff-Wien 965—967. Sós-Budapest 960. 966. 967. Stiegler-Madrid 963. 964.

Neue Aufgaben mit Lösungen sandten ein: Haag-Stuttgart (1), Jacob-Erfurt (1), Michnik-Beuthen (18), Neumann-München (2), Peters-Köln (1), Ruff-Wien (2).

Die Herren Mitarbeiter werden gebeten, die Einsendungen **richtig** zu frankieren. Manuskripte bitte ich nur **einseitig** zu beschreiben.

Berichte.

Methodik.

Das Zeiß-Planetarium im Dienste der höheren Schule. Inzwischen hat das Zeiß-Planetarium in elf deutschen Großstädten seinen Einzug gehalten, Hunderttausende haben den überwältigenden Eindruck, den der ruhende wie der bewegte Sternenhimmel auf den Beschauer ausübt, erlebt. Es ist zum allgemein anerkannten Volksbildungsmittel geworden, das nicht nur nüchterne Aufklärung und Belehrung gibt, sondern auch Feierstunden gewährt, als ob sie in der freien Natur erlebt würden. Das gerade ist das Wertvolle dieses im technischen Zeitalter geschaffenen kunstvollen Apparates, daß er ein Stück Natur, den Himmel, der den vielbeschäftigten Kulturmenschen verloren ging, zurückzugewinnen sucht.

Das Planetarium gibt die Himmelserscheinungen in ihrer Gesamtheit so wieder, wie sie sich dem Beschauer in der Natur darbieten, zeigt also nicht nur die gewaltige Zahl heller und weniger heller Fixsterne für jeden Beobachtungsort auf der Erdoberfläche und deren gleichbleibende Rotation, sondern auch Sonne, Mond und Planeten in ihrer richtigen Stellung zueinander und zu den Fixsternen zu jedem Zeitpunkt der Vergangenheit, der Gegenwart und der Zukunft. Dadurch aber bekommt es für uns Lehrer an den höheren Schulen eine weit größere Bedeutung als die bereits angeführte, es wird zu einem Schulinstrument, zu einem Universalapparat für den Astronomieunterricht, wie man sich ihn idealer nicht denken kann.

So erfülle ich auch gerne den Wunsch, der in der Diskussion zu einem Vortrag, den ich in Frankfurt a. M. zur Tagung des deutschen Vereins zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts über das gleiche Thema hielt, zum Ausdruck kam, meine Erfahrungen über die Verwendung des Zeiß-Planetariums für den Unterricht an den höheren Schulen zu veröffentlichen.

Der Unterricht im Planetarium kann wegen der Unkosten, die mit jeder Vorführung verbunden sind, kein Klassenunterricht sein. Es kann sich nur um einen Massenunterricht handeln. Das Planetarium kann also und soll auch den Schulunterricht nicht ersetzen, sondern ihn nur vertiefen. Nachdem jeder Lehrer

mit seiner Klasse den nach den Richtlinien vorgeschriebenen Stoff je nach seiner Art behandelt und die Erscheinungen draußen in der Natur mit den Schülern beobachtet hat, soll zu einem vorher festgesetzten Termin in ein oder mehreren Vorführungen das bereits Geschaute und Gelernte vertieft werden. Man wird einwerfen, daß das Planetarium doch nicht mehr bieten kann als die Natur selbst, daß also nach einem Unterricht in der Natur die Planetariumsvorführung überflüssig ist. Wer das Planetarium und seine vielseitige Anwendungsmöglichkeit kennt, weiß, daß das nicht zutrifft. Ganz abgesehen davon, daß Beobachtungen in der Natur vom Wetter und von der Zeit (Tag und Nacht) abhängig sind, bedenke man doch, daß beispielsweise zum Ablauf eines Tages 12 Stunden, zum Ablauf eines Jahres 365 Tage erforderlich sind, während im Planetarium diese Erscheinungen in 4 oder 1 Minute ablaufen, und daß in der Natur die starke Strahlung der Sonne die Beobachtung der Sterne und ihre Stellung zu Sonne, Mond und Planeten am Tage unmöglich macht.

Wie soll das Planetarium für den Unterricht Verwendung finden? Für Städte, die ein Planetarium besitzen, hätte eine bereits bestehende Organisation wie der Förderungsverein für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht oder der Verein der Geographen oder aber ein für den Unterricht im Planetarium besonders zu bildender Ausschuß die reinen Organisationsfragen zu erledigen, d. h. die Stoffgebiete, die Zahl der Vorführungen, die Zeit der Vorführungen und die Verteilung der Schulen auf die einzelnen Vorführungszeiten festzusetzen.

Für Barmen haben wir Unterricht in Erdkunde und Mathematik eingerichtet. Die Sexten sollen eine Art propädeutischen Planetariumsunterricht erhalten. Sie sollen das Planetarium als Instrument und das merkwürdige des Kuppelbaus erst einmal kennenlernen, damit sie später bei den anderen Vorführungen durch diese Dinge vom Hauptsächlichen nicht zu stark abgelenkt werden. Eine Vorführung genügt. Ferner werden in Erdkunde abgehalten: Eine Vorführung für die vereinigten Quinten und Quarten, drei für die vereinigten Unter- und Obertertien und eine für die Untersekunden. Somit sehen denselben Stoff die Schüler zweimal in Quinta und in Quarta und zweimal in Unter- und in Obertertia. Dadurch wird er stärker befestigt und die einzelnen Schulen haben die Freiheit, das Astronomiepensum nach ihrer Wahl in Quinta oder Quarta oder verteilt in beiden Klassen oder aber andererseits in Untertertia oder in Obertertia oder verteilt in beiden Klassen zu behandeln. Die Vorführungen werden an einem vorher festgelegten Termin im ersten und zweiten Tertial abgehalten, damit das von vornherein stark belastete dritte Tertial hierdurch keine Störungen erfährt.

Im mathematischen Unterricht handelt es sich um die sphärische Trigonometrie, die wohl in den meisten Schulen in Unterprima behandelt wird. Für ihn sind fünf Vorführungen vorgesehen, die zwischen den Herbst- und Weihnachtsferien liegen. Der Stoff entspricht dem Pensum der Oberrealschulen. In sehr großen Städten könnten Vorführungen für die verschiedenen Schulgattungen bei entsprechend gekürztem Pensum stattfinden.

Allen abgehenden Oberprimanern müßte noch eine Sondervorführung geboten werden, in der die Entwicklung des astronomischen Weltbildes aus der Zeit der Babylonier, Ägypter, Griechen unter Ptolemäus über Kopernikus bis in die Gegenwart behandelt wird.

Etwas schwieriger gestaltet sich die Organisation für die Schulen der Umgebung. Es hat sich herausgestellt, daß die Umgebung am besten in mehrere Bezirke eingeteilt wird und in jedem ein Sonderausschuß der Mathematiker, Naturwissenschaftler und Erdkundler den Besuch regelt. Die Gruppenbildung kann nach Himmelsrichtungen aber auch so erfolgen, daß Orte in der Nähe zu einer Gruppe und solche in größeren Entfernungen zu einer anderen zusammengefaßt werden, da man ja einem Schüler in größerer Entfernung höchstens einmal im Jahr eine Wanderung nach dem Ort des Planetariums zumuten kann.

In Barmen haben wir die Umgebung in radial gelegene Bezirke eingeteilt und im Jahr einen Tag für den Besuch des Planetariums für die Unterstufe und einen anderen für die Oberstufe angesetzt. An diesem Tag fiel der Unterricht für die Besucher des Planetariums aus. Es war eine Art Studientag. Sie wanderten nach Barmen und wohnten hier einer Vorführung von 1 bis $1^1/_2$ Stunden bei. Bei dieser Gruppenbildung muß das Pensum der Erdkunde für die Klassen Untertertia und Obertertia sowie das für die Prima stark zusammengedrängt werden. So wurden die Vorführungen für Quinta und Quarta von 10—11, für Untertertia und Obertertia von 12—1 und für Untersekunda von 2—3 abgehalten. Die Primen haben für die Vertiefung der sphärischen Trigonometrie zwei Vorführungen an demselben Tage und zwar möglichst beide am Vormittag oder beide am Nachmittag mit einer Pause von einer Stunde.

Es ist möglich, daß zu einem Bezirk aus der Unterstufe soviel Schüler gehören, daß geteilt werden muß. Dann können eventuell Knaben und Mädchen getrennt werden.

Die Unterrichtsmethode kann natürlich nicht heuristisch sein. Auch kommt nicht Arbeitsunterricht in Frage. Es kann sich nur um den Vortrag handeln. Dabei ist von vornherein auf strengste Disziplin zu halten, da bei einem Besuch von etwa 500 Schülern schon das leiseste Fragen des Nachbarn die Aufmerksamkeit des anderen stört. Haben sich die Schüler erst einmal an den dunklen Raum gewöhnt, so verhindert das Interesse an den zu schauenden Dingen eine Ablenkung.

Zur Orientierung über den im Planetarium zu zeigenden Stoff erhält jeder Fachlehrer den Lehrplan. Für Barmen haben wir folgende Stoffverteilung vorgenommen:

a) Erdkunde.

I. *Sexta.* Die Planetariumskuppel als Abbild der Himmelskugel. Die Himmelsrichtungen. Der Tag, die Nacht. Die Bestimmung der Himmelsrichtungen am Tage aus Uhrzeit und Sonnenstand, des Nachts aus Uhrzeit und Vollmondstand, des Nachts durch Aufsuchen des Polarsternes. Die Tageslängen im Frühling, Sommer, Herbst und Winter.

II. *Quinta und Quarta.* Horizont, Himmelsgewölbe, Scheitelpunkt, Fußpunkt, Scheitellinie, Scheitelkreis, Tag- und Nachtbogen der Sonne, Südrichtung, Mittagslinie, Mittagskreis, Himmelsrichtungen.

Auf- und Untergang des Mondes, der Planeten, der Fixsterne. Himmelspol, Weltachse. Zirkumpolarsterne, Höchststand der Gestirne im Mittagskreis. Polhöhe = geographische Breite.

Frühlings-Tag- und -Nachtgleiche, Sommersonnenwende, Herbst-Tag- und -Nachtgleiche, Wintersonnenwende. Jahreszeiten.

Einige wichtige Sternbilder (Großer Bär, Cassiopeia, Orion, Plejaden). Einige Sterne erster Größe (Sirius, Wega, Kapella, Altair).

III. *Unter- und Obertertia.* 1. Wiederholung des von der Unterstufe bekannten Stoffes. Himmelsachse. Himmelsäquator 90° entfernt von Nord- und Südpol des Himmels. Die scheinbare Jahresbewegung der Sonne am Himmelsgewölbe. Der

Tierkreis mit 12 Sternbildern. Einprägen der wichtigsten davon: Widder, Stier, Zwillinge, Krebs, Löwe, Jungfrau. Die Sonnenbahn oder Ekliptik. Ihr Schnittpunkt mit dem Äquator im Widder- oder Frühlingspunkt. Ihr Winkel mit dem Äquator (Schiefe der Ekliptik). Die scheinbare Schraubenbahn der Sonne zwischen den Wendekreisen. Die Veränderung der Morgen- und Abendweite. Die Erklärung der Entstehung der Jahreszeiten.

2. Der scheinbare Lauf des Mondes. Entstehung der Mondphasen. Sonnen- und Mondfinsternis. Bedeutsame Sternbilder und Sterne erster Größe des heimatlichen Himmels in den verschiedenen Jahreszeiten.

3. Die scheinbaren Sonnenbahnen in nicht heimatlichen Breiten. Bestimmung der geographischen Breite nach dem Sternenhimmel.

(1 und 2 können miteinander vertauscht werden.)

IV. *Untersekunda.* Unser Sonnensystem als Einheit im Weltenraum.

Die scheinbare Tagesbewegung und ihre Begründung. Die scheinbare Jahresbewegung der Sonne. Die Glieder des Sonnensystems im Planetarium und überhaupt (8 große, viele kleinste Planeten, 27 Monde, Kometen, Meteorschwärme). Die scheinbare Bewegung der Planeten a) der inneren Planeten Merkur und Venus (nur Morgen- und Abendstern) b) der äußeren Planeten Mars, Jupiter, Saturn. Ihre Schleifenbahnen. Die Erde als Planet. Die Begründung der scheinbaren Bewegungen. Das kopernikanische Weltbild. Die Entfernungen der Planeten von der Sonne. Kepler. Newton.

Die Fixsterne als Sonnensysteme. Sternhaufen. Nebel. Die Milchstraße als Sterneneinheit.

b) Sphärische Trigonometrie.

I. *Das Horizontalsystem.* Der Horizont (scheinbare) gleich Gesichtskreis. Standort. Der wahre Horizont. Himmelskugel. Zenit. Nadir. Scheitellinie. Scheitel- oder Vertikalkreise. Höhenkreise. Himmelsgegenden. Südrichtung = Richtung für höchsten Stand der Sonne. Mittagslinie. Mittagskreis = Meridian. Wahrer Mittag. Höhe. Azimut. Höhen und Azimut abhängig von der Zeit. Morgen- und Abendweite.

II. *Das Äquatorialsystem.* Scheinbarer täglicher Lauf der Sonne und der Sterne von Osten nach Westen. Tagbogen, Nachtbogen. Zirkumpolarsterne. Kulmination. Obere und untere Grenze der Zirkumpolarsterne. Sterntag = 23 Stunden 56 Minuten 4 Sekunden. Himmelsachse. Himmelspol. Nordpol. Südpol. Lage des Nordpolarsternes. (Großer Wagen.) Himmelsäquator, Parallelkreise. Deklinationskreise. Stundenwinkel. Deklination. Rektaszension. Polhöhe. Äquatorhöhe. Polhöhe = geographische Breite. Sternzeit = Rektaszension plus Stundenwinkel. Deklination und Rektaszension = feste Koordinaten für Fixsterne.

III. *Das Nautische Dreieck für Barmen.* Die Koordinaten des Horizontalsystems, des Äquatorialsystems, die Polhöhe und ihre Verbindung im Nautischen Dreieck. Die Ostlage, die Westlage. Spezialfälle mit rechtem Winkel am Pol, am Zenit. Das Aufgangsdreieck. Zeitbestimmung.

IV. *Das Nautische Dreieck bei sich ändernder geographischer Breite.* Die Tagesbewegung für den Barmer Himmel, für den Himmel der Bewohner des nördlichen Wendekreises 66½ Grad, für Spitzbergen 80 Grad, für den Nordpol (die parallele Sphäre). Änderung der Lage des Äquators zum Horizont. Für jeden Fall ein nautisches Dreieck. Wanderung nach dem Äquator (die senkrechte Sphäre). Ortsbestimmung.

V. *Das ekliptische System und seine Anwendung.* 1. Die Stellung der Sonne zum Äquator. Lauf der Sonne am 21. März. Aufgang, Höhe des Südpunktes, Untergangspunkt, Bewegung im Himmelsäquator. Aufgangszeit, Untergangszeit, Tagbogen, Nachtbogen. Frühlings-Tag- und -Nachtgleiche. (Äquinoktium.)

Verschiedene Tagesläufe bis 21. Juni. Am 21. Juni. Aufgangspunkt (Morgenweite), Höhe des Südpunktes, Untergangspunkt (Abendweite). Bewegung im nördlichen Wendekreis, Aufgangszeit, Untergangszeit. Tagbogen, Nachtbogen. Sommersonnenwende (Solstitium). Bewegung bis 23. September. Herbstäquinoktium.

Bewegung bis 21. Dezember, bis 21. März.

Die Bewegung der Sonne im Laufe eines Jahres eine Schraubenlinie. Deklinationsänderung.

2. Die Stellung der Sonne zu den Fixsternen. Das Zurückbleiben der Sonne hinter den Fixsternen um 1 Grad an jedem Tag. Rektaszensionsänderung.



3. Die Ekliptik als Sonnenweg. Hauptpunkte der Ekliptik: Äquinoktialpunkte, Solstitialpunkte. Die 12 Sternbilder der Ekliptik. Die 12 Zeichen. Abweichung zwischen Sternbild und Zeichen. Präzession der Tag- und Nachtgleichen. Lage der Ekliptik zum Äquator. Schiefe der Ekliptik. Ekliptikpol. Lage der Ekliptik zum Horizont. Wanderung des Ekliptikpols.

4. Die Koordinaten der Ekliptik. Kreise durch Pole der Ekliptik = Breitenkreise. Astronomische Breite = Abstand eines Sternes von der Ekliptik. Astronomische Länge = Abstand des Frühlingspunktes vom Fußpunkt des Breitenkreises. Richtung der Messung.

5. Das astronomische Dreieck mit Länge, Breite, Deklination, Rektaszension und Schiefe der Ekliptik für Fixsternaufgaben. Das rechtwinklige Dreieck zwischen Äquator und Ekliptik mit Schiefe der Ekliptik, Deklination, Rektaszension und Länge für Sonnenaufgaben.

VI. *Die Zeit.* 1. Der Sterntag = 24 Sternstunden, eine Stunde = 60 Minuten, 1 Minute = 60 Sekunden. Alle Tage gleich lang. Astronomische Zeit. Sternzeit = Stundenwinkel des Widderpunktes. Entstehung durch Drehung der Erde um Achse.

2. Wahrer Sterntag = Zeit zwischen zwei oberen Kulminationen des Sonnenmittelpunktes. 365 Sonnentage = 366 Sterntage. Alle ungleich, weil a) Zeit auf Äquator gemessen, die Sonne sich im Jahre aber in der Ekliptik bewegt, b) Geschwindigkeit in Jahresbahn ungleichförmig (Keplersches Gesetz). Entstehung durch Drehung der Erde um Sonne.

3. Mittlerer Sonnentag. Zeitgleichung. Mittlere Zeit = wahre Zeit plus Zeitgleichung.

4. Mitteleuropäische Zeit = wahre Zeit plus Zeitgleichung plus Längenzeit. Westlicher Ort Längenzeit = plus.

5. Zeitabschnitte. Tag. Woche. Monat. Jahr. Platonische Jahre = 26000 Jahre. (Entstehung durch Kreiselbewegung der Erde.)

Barmen. E. Hoffmann.

Versammlungen und Kurse.

Die 29. Hauptversammlung des Deutschen Vereins zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts vom 10. bis 14. April 1927 zu Frankfurt a. M. (Mit 1 Fig. im Text.) Die Begrüßung der Teilnehmer der Versammlung fand am Sonntag, dem 10. April, abends 8 Uhr, in feierlicher Weise im Kaisersaale des Römers statt; an sie schloß sich unmittelbar in den unteren Räumen eine gesellige Vereinigung zu froher Unterhaltung und zum Zusammenschluß alter Bekannter an, die sich freuten, sich endlich wieder einmal zu treffen. Da man im Kaisersaale die Begrüßungsreden stehend anhören mußte, so ergab sich von selbst, daß sie von erfreulicher Kürze und erfrischender Eindringlichkeit waren. Nach der liebenswürdigen Begrüßung des Herrn Stadtrats Jasper im Namen Frankfurts, der die Mathematiker und Naturwissenschaftler als die Regulatoren und die Hüter einer gesunden Wirtschaftspolitik bezeichnete, eröffnete der Vorsitzende des Ortsausschusses, Herr OStD Dr. Hofmann die Versammlung mit warmem Danke gegen alle Behörden und Körperschaften, die zum Gelingen der Tagung die mühevolle Vorarbeit geleistet hatten; er gedachte der durch die Nationalratswahl am Kommen verhinderten österreichischen Mitglieder und widmete dem Andenken des kurz vorher verstorbenen Mitbegründers des Vereins, Karl Heinrich Müller, herzliche Worte der dankbaren Erinnerung. Namens der preußischen Unterrichtsverwaltung dankte Herr Ministerialrat Prof. Dr. Metzner für die Einladung und betonte das rege Interesse des Ministeriums für die Kulturbedeutung unserer Fächer. Mit warmem Lobe für die bisherige Tätigkeit des Vereins grüßte Herr Min.-Rat Dr. Löffler namens der württembergischen, bayrischen und thüringi-

schen Unterrichtsverwaltungen, und mit dem Ausdruck lebhafter Teilnahme Herr Oberschulrat Prof. Dr. Zühlke namens des Oberpräsidenten und des Provinzialschulkollegiums der Provinz Hessen-Nassau. Die Grüße der Universität, besonders der naturwissenschaftlichen Fakultät, überbrachte der Dekan, Herr Prof. Dr. Madelung, wobei er die enge Zusammenarbeit von höherer Schule und Universität hervorhob. Herr OStD Dr. Behrend sprach als Vertreter des deutschen Philologenverbandes, des Philologenverbandes Hessen-Nassau und des Deutschen Ausschusses für Erziehung und Unterricht. Die dankende Antwort auf alle diese inhaltreichen Begrüßungen gab der zweite Vorsitzende des Vereins, Herr StR Dr. Günther, in geschickter Zusammenfassung.

Montag, den 11. April.

Nachdem um 8.30 Uhr eine von den führenden Firmen reich beschickte Ausstellung von Lehrmitteln in der Universität eröffnet worden war, begann um 9 Uhr mit einer kurzen Ansprache des ersten Vorsitzenden, Herrn OStD Dr. Lietzmann, die erste allgemeine Sitzung. Den Festvortrag zum Gedächtnis des 150. Geburtstages von Karl Friedrich Gauß hielt Prof. Dr. Brendel. Die von dem Vortragenden für das Deutsche Museum in München verfaßte Bildnisinschrift:

> Sein Geist drang in die tiefsten Geheimnisse der Zahl, des Raumes und der Natur. Er maß den Lauf der Gestirne, die Gestalt und die Kräfte der Erde. Die Entwickelung der mathematischen Wissenschaften eines kommenden Jahrhunderts trug er in sich,

bildete nach kurzer Darstellung der äußeren Lebensumstände die Disposition des Vortrages.

Der zweite Teil der Sitzung war dem Problem „Biologie und Philosophie" gewidmet. Vom Standpunkt der Wissenschaft sprach in bekannter fesselnder, ja blendender Weise Herr GR. Prof. Dr. zur Straßen über die verschiedenen Auffassungen der Kausalität. Das Geschehen in der toten Materie scheint ziellos zu sein, das der lebendigen Körper erscheint uns als zweckmäßig. Diese Zweckmäßigkeit im Bereich der Biologie tritt uns in dreifacher Form entgegen: in der Entstehung der Arten (Phylogenie), in der Entwicklung des Individuums (Ontogenie) und im Verhalten des fertigen Geschöpfes. Die Vitalisten nehmen zwei Arten von Kausalität an, die ziellose mechanische und die zielstrebige teleologische; sie sind also Kausalitäts-Dualisten. Die Kausalitäts-Monisten dagegen lassen nur eine Form der Ursächlichkeit gelten, sie spalten sich aber in zwei Lager, in Mechano-Monisten und Teleo-Monisten. Die Mechano-Monisten arbeiten mit zwei Annahmen: Zufall und Gesetzmäßigkeit, die teils allein, teils in geeigneter Mischung alles kausale Geschehen erklären sollen. Der Redner führte aus, wie durch Zusammenarbeit der Biologie mit der Philosophie eine großartige Vereinheitlichung des Weltbildes erreicht werden kann.

Als zweiter Redner nahm Herr StR Dr. Gränz das Wort, um das Problem vom Standpunkte der Schule aus zu behandeln. Nach kurzem Überblick über die Möglichkeit und Grenzen einer philosophischen Vertiefung der Schulbiologie deckte er das Kernproblem auf, das in dem alten Biologenstreit um Mechanismus und Vitalismus steckt, und zeigte, wie sich im Lebensproblem der Rationalismus naturwissenschaftlicher Forschung mit der Irrationalität des Lebens selber berührt. Er wies eindringlich nach, weshalb die Biologie berufen ist,

eine wertvolle Brücke zwischen Natur- und Geisteswissenschaften zu sein, warnte aber vor den Gefahren sowohl einer zum Materialismus führenden Mechanistik, wie auch vor einem voreiligen Teleologisieren. Die Jugendbewegung wird als eine Konvergenzerscheinung zu den wissenschaftlichen und weltanschaulichen Wandlungen gewürdigt, die gleich ihr das Lebendige sucht. Der Vortrag schloß mit den beiden Forderungen, daß die unorganische Zerreißung des biologischen Stoffes durch die gegenwärtigen Lehrpläne aufhören, und daß der Nachwuchs der Biologielehrer sich auch mit der Geschichte und der philosophischen Behandlung des Lebensproblems vertraut machen müsse. Der Berichterstatter erlaubt sich, da keine Diskussion zu den Vorträgen tunlich erschien, darauf hinzuweisen, daß bei der Jahresversammlung unsres Vereins 1905 in Jena der unvergessene Bastian Schmid bereits einen Hauptvortrag über Biologie und Philosophie gehalten hat.

Am Nachmittag fanden Sondervorführungen von Apparaten durch die Lehrmittelfirmen, insbesondere über Mikroprojektion, Meteorologie und meteorologische Apparate im Unterricht, sowie Vorführungen neuer Demonstrationsapparate für den physikalisch-chemischen Unterricht statt. Ferner wurde die geologische Heimatausstellung der Sachsenhäuser Oberrealschule und die Ausstellung seltener Werke und Drucke der Frankfurter Stadtbibliothek eröffnet. Gleichzeitig fand eine Sitzung von Vorstand und Ausschuß und daran anschließend eine Sitzung der beiden Körperschaften mit den Ortsgruppenvertretern statt. Hierbei überbrachte Herr StD Dr. Körner die Grüße der Landesgruppe Südwestafrika aus Windhuk.

Dienstag, den 12. April.

Die zweite allgemeine Sitzung hatte *die praktische Bedeutung der Naturwissenschaften* zum Thema. Zuerst sprach Herr Dipl.-Ing. Carl Weihe über den „Wert der Naturwissenschaften für Leben und Wirtschaft“. Er wünschte, daß in der Schule mehr als bisher das praktische Leben berücksichtigt werde, und forderte, daß auch die Technik in den Schulen Eingang fände: Der Ingenieur als Erzieher! Die Technik bedürfe als Grundlage die Naturwissenschaften, aber man sage nicht mit vollem Rechte, daß die Technik angewandte Naturwissenschaft sei. Die Methoden der Technik weichen vielfach von denen der Naturwissenschaft ab, denn sie gehen nicht auf Erweiterung des Wissens aus, sondern des Könnens. Die Naturwissenschaft sei analytisch, die Technik synthetisch; jene ist nur Wissenschaft, diese ist Wissenschaft und Kunst zugleich, sie ist der Ausdruck eines Willens und ist eine Tat. Da der Techniker zu seiner Ausbildung sehr viel Naturwissenschaft braucht, so ist es erforderlich, daß schon die Schule darauf Rücksicht nimmt. Daß aber der Kulturwert der Technik in der Schule schon richtig gewürdigt wird, ist deshalb wichtig, weil ohne Technik überhaupt keine Kultur möglich ist. Denn wahre Kultur kann nur da entstehen, wo eine harmonische Ausbildung und Förderung aller menschlichen Fähigkeiten, also auch der technischen vorhanden ist. Daher gilt auch zugunsten dieser Forderungen: durch die Schule für das Leben.

Es folgte ein oratorisch bewundernswerter Vortrag von Herrn Direktor Dr. Specketer (Griesheim) der in einer vollen Stunde im Fluge fast alle Gebiete der chemischen Großindustrie besprach und sodann noch im Lichtbilde vorführte. Darauf sprach an Stelle des verhinderten Prof. Dr. Dessauer Herr

Dipl.-Ing. Brenzinger über Physik und Heilkunde. An letzter Stelle sprach Herr Prof. Dr. Caspari vom staatlichen Institut für experimentelle Therapie über biologische Wirkungen der Radium- und Röntgenstrahlen, wobei Lichtbilder die Ausführungen zweckmäßig erläuterten.

Am Nachmittag fanden zwei Fachsitzungen statt. In der mathematischen Fachsitzung sprach Herr Prof. Dr. Epstein über den Begriff der Strenge im mathematischen Unterricht. Er stellte die Forderung auf, daß der Unterricht das Gefühl und das Bedürfnis zur logischen Strenge im Schüler wecken muß, daß er dabei aber nicht von abstrakten Begriffen, sondern immer von anschaulichen Grundlagen auszugehen hat. Dieser längst allenthalben anerkannte Grundsatz wurde nun an interessanten Einzelbeispielen weiter ausgeführt. Nur zwei Beispiele seien hier kurz erwähnt. Das eine ist der Nachweis, daß log 2 keine rationale Zahl sein kann; denn wäre etwa $\log 2 = \frac{p}{q}$, wo p und q ganze Zahlen bedeuten, so folgte die unmögliche Gleichung $2^q = 10^p$.

Das andere Beispiel lehrt, wie man den Differentialquotienten von $\sin x$, ohne $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$ zu benutzen, bestimmen kann. Im Einheitskreis sei der Bogen $AB_1 = x_1$, der Bogen $AB_2 = x_2$, also der Bogen $B_1B_2 = x_2 - x_1$. Fällt man von B_2 die Lote auf OA und OB_1, macht $B_1C \perp B_2C$ und $B_2E \perp OB_2$, so ist $B_2C = \sin x_2 - \sin x_1$, $B_2D = B_2C : \cos x_1$ und $B_2E = B_2C : \cos x_2$. Dann ergibt sich aus

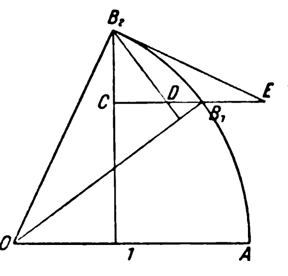
$$B_2D < x_2 - x_1 < B_2E$$

nach leichter Umrechnung der Mittelwertsatz für die Funktion $\sin x$:

$$\cos x_2 < \frac{\sin x_2 - \sin x_1}{x_2 - x_1} < \cos x_1,$$

eine Grenzeinschließung, aus der der Differentialquotient folgt. (Fig. 1.)

In der anschließenden, sehr lebhaften Diskussion wurde eine weitgehende Übereinstimmung mit den Ausführungen des Vortragenden festgestellt. Insbesondere betonte der Berichterstatter die Notwendigkeit, den Grenzbegriff und den Funktionsbegriff auf der Schule schon von der untersten Klasse an vorsichtig und langsam zu entwickeln; er verwies dabei auf eine sehr eingehende Behandlung dieser Fragen auf der Philologenversammlung 1907 zu Basel unter Vorsitz von Felix Klein. Herr Drenkhahn erinnert daran, daß der an sich schon relative Begriff der Strenge in der Schule von der Altersstufe der Schüler abhängig sei, und daß dies nicht nur für die Infinitesimalrechnung, sondern für alle Teile der Elementarmathematik gelte. Wollte man den Mathematikunterricht mit voller Strenge beginnen, so würde die Mathematik bald wieder in die frühere, gehaßte und verabscheute Stellung geraten; die Exaktheit dürfe nur so weit getrieben werden, wie sie der Durchschnittsschüler bei Anspannung aller seiner Kräfte vertragen könne. Dazu bemerkt Herr Prof. Dr. Dehn, daß für die Schule die Hauptsache eine indirekte Wirkung der Strenge sei; sie liege auf moralischem Gebiete und bestehe darin, daß das Verantwortlichkeitsgefühl geweckt und gestärkt werde.



Feurig und überzeugend sprach sodann der alte Kämpe für zeitgemäßen Fortschritt des mathematischen Unterrichts, Herr OStD i. R. Prof. Dr. Schülke über „Das Erlanger Programm und die Schulgeometrie".[1])

In der Diskussion wies der Berichterstatter auf das vor mehreren Jahrzehnten erschienene Lehrbuch von Henrici und Treutlein hin, das ganz auf dem Gedanken der Abbildung aufgebaut ist; Herr Jacobsthal erinnerte an Steiners Konstruktionen mittels einer geraden Linie und eines festen Kreises. Zum Schluß machte Herr Lorey darauf aufmerksam, daß es dem Vortragenden vergönnt gewesen sei, im Vorjahre in voller Rüstigkeit seinen 70. Geburtstag zu feiern.

Sodann sprach Herr Ebner *über die Einordnung der Darstellenden Geometrie in den Schulunterricht:* Aus der starken Betonung des geometrischen Zeichnens und Messens in den amtlichen preußischen Richtlinien geht deutlich die Forderung hervor, daß sich die Darstellende Geometrie neben der Arithmetik und Geometrie als gleichwertiger Bestandteil der Mathematik durchsetzt. Da eine stundenplanmäßige Abtrennung der Darstellenden Geometrie von dem bisherigen Pensum der Mathematik Nachteile hat, so ist es erwünscht, daß die Darstellende Geometrie in den Schulunterricht eingeordnet werde. Der Vortragende legt ausführlich dar, wie das möglich ist. Nach seiner Ansicht kommt für die Mittelstufe nur die senkrechte Ein- und Zweitafelprojektion in Frage. In der Diskussion, die aus Zeitmangel bald abgebrochen werden mußte, berichtete der letzte Assistent von Wilhelm Fiedler, Herr Breuchel, über die günstigen Verhältnisse in der Schweiz, wo die Darstellende Geometrie in ausgedehnter Weise im Schulunterricht behandelt wird. Er schloß mit den Worten: Wenn Sie nicht genügend Zeit verlangen, führt der Unterricht in der Darstellenden Geometrie nicht zum Ziel!

Den letzten Vortrag hielt Herr OStR L. Balser (Darmstadt): *Kartennetze im geometrischen Unterrichte.* Einleitend erörtert er die Stellung, die der Lehre von den Kartennetzen innerhalb des geometrischen Unterrichts zukommt. Er bespricht die fördernden Umstände, wie die Klippen, die es zu vermeiden gilt. Nach Aufzählung der verschiedenen Arten der Projektion (flächentreue, winkeltreue, vermittelnde) wendet er sich zur Merkatorseekarte. Das Gesetz der vergrößerten Breiten leitet er anschaulich aus rein geometrischen Vorstellungen ab. Ein weiterer Abschnitt ist der Untersuchung der *Verzerrung* gewidmet, die jede Karte in größerem oder geringerem Maße aufweist. Diese Verzerrungen werden unmittelbar anschaulich gemacht, indem man um geeignete Netzpunkte kleine Kreise beschrieben denkt, die im Kartenbild entweder als Kreise oder als Ellipsen von verschiedener Gestalt und Größe erscheinen. Zum Schluß wird ein Drahtmodell des Gradnetzes der nördlichen Halbkugel erläutert, das die Verschiedenheiten der Netzmaschen erkennen läßt, und dessen Schattenbild den Übergang verschiedener Netzformen ineinander zu beobachten gestattet.

In der chemisch-physikalischen Fachsitzung sprach Prof. Dr. Meißner mit Experimenten *über neuere Ergebnisse der Atomforschung.* Darauf hielt Prof. Dr. Fritz Mayer einen Vortrag: *Echte Farbstoffe und ihre Anwendung*, ebenfalls mit Experimenten. Schließlich sprach Dr. Hans Wolf *über die praktische Ausbildung der Bewerber für das höhere Lehramt.*

---

1) Vgl. S. 401.

Da der Andrang zu dem Vortrag des Herrn Meißner sehr groß war, mußte er wiederholt werden. Darauf führte Herr Dr. Drenkhahn eine Reihe von Experimenten zur Strömungslehre vor an Hand einer vom Dipl.-Ing. Böving entworfenen Apparatur.

Mittwoch, den 18. April.

Früh 8 Uhr fand die geschäftliche Sitzung statt, in der zuerst der 28 Toten des vergangenen Vereinsjahres gedacht wurde. Dann erstattete Herr Zieprecht den Kassenbericht. An die Mitteilung, daß der Verein jetzt 3533 Mitglieder zählt, schloß Herr Lietzmann die Bemerkung, daß dies mindestens zwei Drittel aller Fachgenossen sei, so daß sich der Verein mit Recht als *Vertreter der Gesamtheit der Lehrer für Mathematik und Naturwissenschaft* betrachten dürfe. Die geographische Verteilung der Mitglieder auf 655 Orte und 54 Ortsgruppen hatte Herr Zieprecht auf einer Karte von Deutschland dargestellt. Herr Wolff berichtete dann über die Unterrichtsblätter. In der von Herrn Günther geleiteten Vorstandswahl wurden die Herren Lietzmann und Wolff einstimmig wiedergewählt. An Stelle des ausscheidenden Herrn Jungbluth wurde Herr Depdolla gewählt. Sodann erfolgte die Wahl des Ausschusses, der nunmehr aus 19 Mitgliedern besteht. Es wurde beschlossen, die nächste Hauptversammlung in Stuttgart abzuhalten. Für die Versammlung 1929 wurde Breslau in Aussicht genommen.

Die III. Allgemeine Sitzung brachte zuerst einen glänzenden und höchst interessanten Vortrag über *Die Chemie im Dienste der Kriminalistik* durch Herrn Prof. Dr. Georg Popp. Wie sich die Untersuchungstechnik der chemischen, physikalischen, photographischen Methode bedient, um unter fast völliger Schonung des Objekts aufzuklären, wurde in eindringlicher und nicht selten humorvoller Weise erläutert und durch Lichtbilder erklärt. Ebenfalls durch Lichtbilder unterstützt führte dann Herr Dr. Dahmer die neueren Verfahren zur *Schädlingsbekämpfung im Wein- und Obstbau* vor.

Im zweiten Teile der Sitzung berichtete Herr Fettweis über *Die pädagogischen Akademien und unsere Fächer*. Zunächst gab er einen Überblick über Ziel und Einrichtung dieser Akademien. Die Studierenden werden in wissenschaftlichen Vorlesungen und Übungen, sowie künstlerisch, technisch und praktisch ausgebildet. Die Vorlesungen und Übungen zerfallen in verbindliche, die einen geordneten Studiengang verbürgen, und in wahlfreie auf den Gebieten der Mathematik, der Naturwissenschaften und der Geographie.

Hieran schloß Herr Dr. Brohmer aus Kiel einen Bericht über die dortigen Einrichtungen, bei denen nur 50 Studierende in jedem Semester aufgenommen werden können.

In der sehr lebhaften Diskussion führte Herr Landesschulrat Dr. Umlauf aus Hamburg aus, daß die Anforderungen maßlos übertrieben seien; in zwei Jahren könne keine fachwissenschaftliche Ausbildung vollendet werden. Vor Resolutionen in der Frage der pädagogischen Akademie sei dringend zu warnen, ehe nicht die praktischen Versuche Erfolg gezeigt hätten. Auch Herr Umlauf betonte, wie der Vorredner, daß die Volksschule keine verflachte höhere Schule sein solle, sondern autonome Aufgaben habe. Der Berichterstatter sprach sodann über die Einrichtungen in Sachsen und erinnerte daran, daß es notwendig sei, den jungen Lehrerstudenten zur Bescheidenheit zu erziehen. Herr Brohmer

wies noch auf die starke Siebung hin, die durch die gegenwärtigen Einrichtungen gewährleistet sei, und Herr Lorey lenkte die Aufmerksamkeit auf die Pflege des bürgerlichen Rechnens.

In der II. mathematischen Fachsitzung berichtete Herr StD Dr. Jakobsthal im Auftrage des *Mathematischen Reichsverbandes* über das Problem der *Ausbildung der Studienreferendare.* Nach einleitenden Bemerkungen über die pädagogischen Ausbildungen der Studienräte im allgemeinen wendet sich der Referent seiner speziellen Aufgabe zu. Er stellt fest, daß es den jungen Lehrern, vielfach auch gerade den tüchtigen, an der Fähigkeit fehlt, ihre wissenschaftliche Vorbildung hinreichend für die Schule fruchtbar zu machen. Es ist daher notwendig, eine tragfähige Brücke zwischen Hochschule und Schule zu schlagen. Nach Erörterung verschiedener Wege hierzu kommt er zu folgenden Forderungen: die fragliche Ausbildung hat nicht während der Studienzeit sondern während der Referendarzeit zu erfolgen. Die Referendare sind für eine gewisse Zeit in Hochschulstädten zu konzentrieren. Dort werden sie nach Möglichkeit in nur einem Seminar ausgebildet. Gleichzeitig erfolgt eine Ausbildung an der Hochschule unter engster Fühlungnahme beider Stellen. Die Hochschulausbildung soll teilweise in Form von Vorlesungen, teilweise in Form von Arbeitsgemeinschaften stattfinden; an beiden können auch Assessoren und Studienräte teilnehmen. Der Vortragende erörtert im einzelnen die Technik dieser Art von Ausbildung und betont besonders, in welcher Weise sich die Seminarübungen anzuschließen hätten. Viele der dabei auftretenden Probleme seien noch ungeklärt, z. B. die Wahl der geeigneten Dozenten, die Dauer dieser Ausbildung usw. In der sehr lebhaften und teilweise ablehnenden Diskussion sprachen die Herren Heller, Behrend, Zühlke Epstein, Dehn, Hertz, Kerst, Lorey und Heß. Es wurde beschlossen, dieses Thema auf einer der nächsten Hauptversammlungen eingehender zu behandeln.

In der physikalischen Fachsitzung führte Herr Prof. Dr. Wulf (Valkenburg) Versuche mit seinem Universal-Elektroskop vor; Herr Prof. Dr. Linke sprach über *die wirtschaftliche und kulturelle Bedeutung der Meteorologie*, Herr StR Dr. Voigts (Lübeck) über *moderne Meteorologie im Unterricht*, Herr StR Dr. Heussel (Gießen) über *Darstellung von Wellen durch Projektion rotierender Spiralen* und Herr StR Dr. Hoffmann (Barmen) *über das Zeiß-Planetarium im Dienste der höheren Schule.*[1])

In den beiden biologischen Fachsitzungen wurden zuerst neue Filme der Höchster Farbwerke über Obst- und Weinbauschädlinge vorgeführt. Sodann sprach Herr Prof. Wimmer (München) über *neuere Anordnungen für Mikroprojektion im Unterricht.* Darauf folgten die Vorträge der Herren StR Dr. Otto (Berlin) und StR Dr. Pröbsting (Weidenau) über *die Biologie auf der Unter-, Mittel- und Oberstufe und in der Reifeprüfung der preußischen Realanstalten.* Im Anschluß daran wurde eine Entschließung angenommen, die die neuen preußischen Richtlinien als völlig verfehlt verwirft und geeignete Besserungsvorschläge macht.

Zum Schlusse seien noch einige dankende Worte über die sonstigen Veranstaltungen des rührigen Ortsausschusses gesagt. Am Dienstag abend fand ein zahlreich besuchtes Festessen statt, am Mittwoch hatte der Ortsausschuß

---

1) Vgl. S. 422.

zu einem Gesellschaftsabend mit allerhand humoristischen Darbietungen eingeladen, und am Donnerstag waren verschiedene Ausflüge zur Besichtigung industrieller Werke, des Bades Homburg, der Saalburg, der Wetterwarte auf dem Feldberg usw. vorgesehen. Ferner waren an allen Tagen für diejenigen, die nicht die Vorträge besuchten, Führungen angesetzt, insbesondere für ortsfremde Damen.

Den Teilnehmern wurde auch eine sehr inhaltreiche und schön ausgestattete Festschrift überreicht, die mit zahlreichen Abbildungen geschmückt die Abhandlungen: Lepsius, Der physikalische Verein zu Frankfurt a. M.; A. v. Weinberg, Die Bedeutung des Benzols für Industrie und Technik; Reuber, Frankfurter Heimatgeologie und Drevermann, Das Senkenbergmuseum, enthielt.

Dresden. A. Witting.

Bücherbesprechungen.

Die Preise der besprochenen Bücher sind nach den Mitteilungen der Verlagsanstalten im Erscheinungsmonat angegeben. Da die Buchhandlungen sich Änderungen vorbehalten, kann keine Sicherheit dafür geboten werden, daß die angegebenen Preise auch heute noch gelten.

Behrendsen-Götting, Lehrbuch der Mathematik mit Aufgaben. Von Prof. Dr. E. Götting und Dr. A. Harnack. 4. Aufl. Ausg. B. Oberstufe. Leipzig 1926, B. G. Teubner. Teil I geb. *RM* 5.80; Teil II geb. *RM* 4.40.

Die Oberstufe dieses Werkes, dessen 1. Auflage seinerzeit die Kleinsche Reform eingeleitet hat, liegt nunmehr in der 4. Auflage vor. Rein äußerlich fällt die Trennung in zwei Teile auf, deren zweiter nur Stoffe der Prima enthält. Sie wurde nötig, da die Oberstufe mit einer Auswahl von mehr als 3800 Aufgaben versehen worden ist, so daß sich eine besondere Aufgabensammlung neben dem Lehrbuch erübrigt. Aber auch innerlich hat sich das Werk gewandelt. Was in der 1. Auflage noch tastender Versuch gewesen ist, in der 4. ist's zu einer abgeklärten Darstellung geworden.

Das gilt in erster Linie von dem Problem des höheren mathematischen Unterrichts, der Differential- und Integralrechnung. Sie ist auf zwei Abschnitte verteilt, deren Umfänge sich wie 1 zu 2 verhalten. Der 1. Teil der „Funktionenlehre" bringt die Grundlegung der Differentialrechnung und ihre Ausgestaltung bis zu den rationalen Funktionen. Behutsam, anschaulich, mit den einfachsten Beispielen beginnend, dringen die Verfasser zur Grenzsteigung und abgeleiteten Funktion vor. Die quadratische Funktion und die trigonometrischen Funktionen geben reichlich Gelegenheit, die verschiedenen Probleme der Differentialrechnung, z. B. auch das der Geschwindigkeit und Beschleunigung anzugreifen und damit den Bildungswert der Analysis ins helle Licht zu setzen. Dann erst wird der allgemeine Funktionsbegriff behandelt samt der Abhängigkeit durch „Einschachtelung" (wie ich statt „Kette" lieber sagen würde) und der Umkehrung, ferner der Begriff des Differenzenquotienten und der Ableitung in allgemeinster Form aufgestellt. Gerade dieser erste Höhepunkt der Analysis ist ein Musterbeispiel dafür, wie sich Anschaulichkeit und Strenge wahrhaft harmonisch vereinigen lassen. So sieht der Schüler auch ein, wie notwendig und zeitersparend die Leibnizschen Regeln sind, in deren Formalismus die Gedanken der Differentialrechnung den elegantesten und fruchtbarsten Ausdruck gefunden haben. An zahlreichen Beispielen lernt er sie gebrauchen und ist gerüstet, die erste und wichtigste Klasse der Funktionen, die rationalen, gründlich zu untersuchen. Der binomische Satz ergibt sich als Beispiel der Taylorschen Formel für die ganze Funktion. Nullstellen, Gipfel- und Talpunkte, Wendepunkte werden der Reihe nach untersucht, und bei den gebrochenen Funktionen stellen sich Pole und Lücken ein.

Im 2. Teil der Funktionenlehre werden die einfachsten irrationalen und die transzendenten Funktionen behandelt. Den zweiten Höhepunkt der Analysis bildet zweifellos die Einführung der Zahl e unter Vermeidung der Bestimmung des schwie-

rigen Grenzwertes $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$, der natürlichen Exponentialfunktion und des natürlichen Logarithmus. Ihr schließt sich die arithmetische, im Vergleich zu der im 1. Teil gegebenen geometrischen strengere Differentiation der trigonometrischen und der Arcusfunktionen an. Ein Kabinettsstücklein ist die Bestimmung des Krümmungskreises.

Bis dahin ist alles auf den Grenzbegriff der Ableitung gegründet. Nun wird — das ist der dritte Höhepunkt — das berüchtigte „Differential" eingeführt, aber nicht als Gespenst eines abgeschiedenen Geistes, sondern als handgreifliche endliche Größe, die man ruhig als ein „Stück Messing" betrachten kann. Der „Differentialquotient" erscheint so als nachträglich definierter wirklicher Quotient, und das wirkt ungemein befreiend. Nun folgt der vierte Höhepunkt, das Umkehrproblem. Schritt für Schritt werden die Teiloperationen des Differenzierens in die umgekehrten des Integrierens verwandelt und damit die Identität der Begriffe „bestimmtes Integral" und „Umkehrfunktion der Ableitung zwischen bestimmten Grenzen" nachgewiesen. Trotz der methodischen Feinheit der Durchführung halte ich aber auch den historischen Weg für berechtigt, das bestimmte Integral als Fläche einzuführen und alle andern Aufgaben der Integralrechnung in Flächenaufgaben umzudeuten. Auf diese Weise scheinen mir die Aufgaben der Integralrechnung noch bewußter und folgerichtiger als durch e i n e Methode bezwungen darstellbar. In der formalen Integralrechnung gehen die Verfasser nicht so weit wie wir in Württemberg, auch nicht in der Breite der Anwendungen. Das gleiche gilt von dem letzten Abschnitt über die Taylorsche Entwicklung, wo wir es nicht bei den Kleinschen Schmiegungsparabeln bewenden lassen, sondern eine Restabschätzung verlangen. Doch das sind Lehrplanfragen. Die Hauptbedeutung der Götting-Harnackschen Darstellung der Analysis scheint mir darin zu liegen, daß sie den Beweis dafür erbringt, daß die Differential- und Integralrechnung auch auf der höheren Schule lehrbar ist, ohne Mystik, ohne Mogelei, mit einem guten Maß von Strenge, und doch anschaulich, in das Wesen der Probleme eindringend. Freilich ist die Analysis schwer, und ob bei Götting-Harnack alles schon so dargestellt ist, daß der Schüler sich auch ohne den Lehrer restlos zurechtfinden kann, ist eine noch zu früh gestellte Frage, deren Beantwortung sicher mit jeder neuen Auflage überflüssiger werden wird. Hingegen halte ich es für eine Pflicht aller Fachgenossen, den Götting-Harnackschen Lehrgang der Analysis gründlich durchzudenken.

Aber auch die andern Teile des Werkes sind dieser Durcharbeit wert. In der Trigonometrie tritt das Formelwerk zugunsten der Anwendungen zurück. Die systematische Stereometrie wird rasch von der darstellenden Geometrie abgelöst, deren Methoden schließlich als geometrische Verwandtschaften gedeutet werden. Stofflich gehen wir in Württemberg in der darstellenden Geometrie viel weiter, aber methodisch lernen auch wir noch gerne hinzu. Die Körperberechnungen, die bei uns im wesentlichen schon in U II zum Abschluß gebracht werden, erfahren eine zusammenhängende Darstellung mittels Integralrechnung. Die analytische Geometrie erscheint in weiser Beschränkung, ebenso die projektive Geometrie, hinsichtlich der wir in Württemberg sehr zurückhaltend sind. Die gleiche Zurückhaltung üben wir in bezug auf den Aufbau des Zahlbegriffs und die Gleichungslehre. Die Lehre von den unendlichen Reihen ist von der Analysis getrennt.

Der Druck ist durch die Wahl besonderer Schriftarten sehr übersichtlich, die Ausstattung gut. Das Werk sei den Fachgenossen nochmals aufs nachdrücklichste empfohlen.

Vaihingen a. F.-Stuttgart. K. Fladt.

H. Martens, Tafeln für das logarithmische und numerische Rechnen mit einer Einführung in die Logarithmen, das logarithmische Rechnen und den Gebrauch des Rechenschiebers. 27 S. Leipzig und Berlin 1925, B. G. Teubner. Kart. RM 1.20.

Die Tafeln stellen eine durchaus empfehlenswerte Ergänzung des Lietzmannschen „Unterrichtswerkes für Mittelschulen" dar. Aus praktischen Gründen werden vierstellige Logarithmen geboten, denen auch eine Tafel dreistelliger Logarithmen

sowie solche mit physikalischen, chemischen und praktischen Werten zugefügt sind. Die Tafeln der trigonometrischen Funktionen und der natürlichen trigonometrischen Funktionen weisen dezimale Winkelteilung auf. Eine Verwandlungstafel gestattet auch die Umrechnung in Minuten und Sekunden. Zu begrüßen ist besonders die gute Einführung in den Gebrauch des Rechenschiebers, dessen Anfertigung und mannigfaltige Verwendbarkeit gezeigt wird.

Danzig-Langfuhr. JOH. SALACHOWSKI.

Müller-Bieler, Mathematisches Unterrichtswerk für Mittelschulen. Neubearbeitung von O. Bewersdorff und H. Sturhann. Lehr- und Übungsbuch der Arithmetik und Algebra für Knaben-Mittelschulen. 8. Aufl. 33 teils farb. Fig. im Text und log.-trig. Tafeln als Beilage. 226 und 17 S. Leipzig und Berlin 1926, B. G. Teubner. Geb. RM 4.60.

Ohne das Buch bis ins Kleinste nach einem pädagogischen Prokrustesbett zu recken, kann kurz zusammenfassend gesagt werden: „Ein moderner Geist strömt daraus, der Schülerhände, Schülergeist regt durch selbstgefertigte Rechenschieber, Funktionsbetrachtungen, Tabellen- und graphisches Rechnen, historische Notizen, Scherze, Rätsel, Trugschlüsse. Das Aufgabenmaterial ist durchaus gut und praktisch ausgewählt. Es würde aber keinerlei Einbuße an diesen Attributen erleiden, wenn sich die Aufgabengruppen S. 97—105, 106—108, 131—138, 192—196, welch gut gemeinten Zweck sie auch immerhin verfolgen, um 50 % reduzierten. Mir scheint darin zuviel „Theoretisches" geboten. Die Empfehlung dieses Buches ist selbstverständlich.

Danzig-Langfuhr. JOH. SALACHOWSKI.

W. Lietzmann, Mathematisches Unterrichtswerk für Mittelschulen.

1. **Lietzmann-Eckhardt-Hahn, Aufgabensammlung und Leitfaden der Geometrie.** Ausgabe B für Mädchen, 204 Fig. im Text, 172 Seiten. Geb. RM 2.80.
2. **Lietzmann-Martens-Hahn, Aufgabensammlung und Leitfaden für Arithmetik und Algebra.** Ausgabe B für Mädchen, 29 Fig. im Text und auf einer Tafel. 144 S. Leipzig und Berlin 1926, B. G. Teubner. Geb. RM 2.60.

Die Vorzüge der bewährten Ausgabe A für Knaben sind auch in der vorliegenden Ausgabe B zu finden und kurz charakterisierbar durch: Anschaulichkeit, Arbeitsbegriff, Selbständigkeit, praktische Anwendung, Lebensnähe. Die Stoffauswahl bewegt sich streng im Rahmen der amtlichen Bestimmungen. Das geometrische Beweisverfahren ist leichtfaßlich und bevorzugt den Bewegungsbegriff. Das Aufgabenmaterial trägt in vielseitiger Weise dem Interessenkreise der Mädchen (zukünftigen Hausfrau) Rechnung, was einige herausgegriffene typische Worte (Wäscheleine, Waschbottich, Eimer, Herdplatte, Kohlenkasten, Heizwert der Brennstoffe, Gasverbrauch, Backwerkformen, Nähmaschine, Damenrock, Tischdecke, Stickmuster) belegen. Mit der angestrebten Weckung und Betätigung der künstlerischen und schöpferischen Kräfte der Mädchen paart sich die Erziehung zum kritischen Denken. Von der verschrienen Nüchternheit der Mathematik werden selbst die dafür empfindsameren Mädchen durchaus nichts verspüren. Rätsel, Scherze, Trugschlüsse tragen u. a. auch ein gut Teil Fröhlichkeit hinein. Die Ausstattung der Bücher ist gut.

Die Freude, die mir ihre Durchsicht bereitete, wird sicher doppelt der genießen, der nach dem nur zu empfehlenden Werk arbeiten darf.

Danzig-Langfuhr. JOH. SALACHOWSKI.

W. Betz, Über Korrelation. 2. Aufl. (Beihefte zur Zeitschr. f. angewandte Psychologie Nr. 3). 65 S. Leipzig 1927, Barth. Geh. RM 3.60.

Das zuerst 1911 erschienene und von vielen Psychologen als Hinführung zum Begriff und Anleitung zur Handhabung der Korrelation geschätzte Heft hat in der

zweiten Auflage seine Aufgabe insofern wesentlich eingeschränkt, als die Berichte über die psychologische Korrelationsforschung fortgelassen werden, so daß nur noch die Korrelationstheorie als solche zur Darstellung kommt. Nur das reichhaltige Literaturverzeichnis führt darüber hinaus.

Die mathematische Entwicklung dürfte für den mathematisch nicht geschulten Leser recht schwer verständlich sein. S. 13 heißt es z. B.: „Die Gleichung einer geraden Linie ist bekanntlich: $y = a + bx$, wo a den Ort des Schnittpunktes der Geraden mit der Achse, und b die Neigung gegen die Achse ausdrückt. Durch die Methode der kleinsten Quadrate kann man die Konstanten a und b so bestimmen, daß die quadratischen Abweichungen der Orte der Mittel der einzelnen Reihen von der Geraden zu einem Minimum wird. Durch passende Wahl der Achsen kann man die Konstante a zum Verschwinden bringen, und für die Konstante b ergibt sich schließlich der Ausdruck

$$b = \frac{S(xy)}{S(x^2)}; \; y = \frac{S(xy)}{S(x^2)} \cdot x\text{“}.$$

Nehmen wir an, der Leser erinnere sich noch von der Schule her der linearen Gleichung, wisse also, daß der Abschnitt a auf der y-Achse, die Neigung b gegen die x-Achse gemeint ist, so bleibt ihm doch die Methode der kleinsten Quadrate als etwas Geheimnisvolles verschlossen (nötig ist das nicht, da der jüngere Leser jetzt überall auf der Schule differenzieren gelernt hat); was mit „quadratischen Abweichungen“ gemeint ist, hätte er sich denken können, wenn man statt dessen „Quadrate der Abweichungen“ gesagt hätte. Was die Symbole $S(xy)$ und $S(x^2)$ bedeuten sollen, ob etwa Funktionszeichen, bleibt dem Leser fürs erste ganz unverständlich. Wenn er Reihen auf der Schule symbolisch bezeichnet hat, dann hat er gewöhnlich das Σ-Zeichen angewandt.

Ich habe das Gefühl, der Verf. setzt beim Leser bereits eine beträchtliche Vertrautheit mit den Begriffen voraus und kann sich nicht in die Lage eines vollständigen Neulings versetzen So ist das Heft in erster Linie wohl für diejenigen bestimmt, denen bei ihrem Studium schon oftmals Korrelationsberechnungen begegnet sind und die nun einmal im Zusammenhang etwas über diese Dinge hören möchten.

Göttingen. W. Lietzmann.

E. Bergfeld, Die Axiome der euklidischen Geometrie psychologisch und erkenntnistheoretisch untersucht. (F. Krüger, Grenzfragen der Philosophie, 2. Heft.) München 1927, Beck.

Der Verf. schließt seine Untersuchungen an die Hilbertschen fünf Axiomengruppen an, wobei er allerdings Gruppe IV, das Parallelenaxiom, für beweisbar aus den anderen hält. Auch seiner Auslegung der Axiome der Gruppe V wird der Mathematiker nicht zustimmen. Der Verf. kommt, kurz gesagt, zu dem Ergebnis, daß die Gruppen I und II, die Axiome der Verknüpfung und Anordnung, wesensverschieden sind von den Axiomen der Gruppe III und V (Kongruenz und Stetigkeit). So sind z. B. die ersten beiden Gruppen a priori, die letzten beiden a posteriori erkennbar. — Der Mathematiker wird dieser Scheidung schwerlich zustimmen, selbst wenn er psychologisch, nicht rein logisch eingestellt ist.

Göttingen. W. Lietzmann.

H. Beck, Einführung in die Axiomatik der Algebra (Göschens Lehrbücherei I, 6). 197 S. Berlin 1926, de Gruyter. Geb. RM 10.50.

Der Verfasser versteht unter Arithmetik die Lehre von den ganzen Zahlen — also den sonst als Bereich der elementaren Zahlentheorie angesehenen Teil der Arithmetik — unter Algebra den Bereich der rationalen Zahlen; mit der Algebra in diesem Sinne beschäftigt sich das Buch. Grenzprozesse werden ausgeschlossen und damit die Irrationalzahlen — freilich wird gelegentlich auch differenziert. Wenn auch komplexe Zahlen, Matrizen und Vektoren herangezogen werden, so doch immer mit Beschränkung auf das Rationale.

Die aus einer Anfängervorlesung hervorgegangene Darstellung ist auch jetzt noch nicht mit ihrem Titel ausreichend gekennzeichnet. Die ersten Kapitel be-

schäftigen sich in der Tat mit der Algebra im eben definierten Sinn, indem sie nacheinander Zahlen, Punktmengen, Zahlenpaare, Matrizen und Vektoren axiomatisch behandeln. Dann aber folgt eine, wie der Verfasser selbst sagt, überschlagbare, zwei Drittel des ganzen Buches umfassende Einschiebung, in der lineare Gleichungen, lineare Vektorgebilde, bilineare und quadratische Formen, Proportionalität der Matrizen und Determinanten behandelt werden. Nun erst wird wieder der Faden der Anfangsuntersuchung aufgenommen; selbst mit der Bezifferung der Erklärungen und Lehrsätze wird noch einmal wieder an die Nummern von Kapitel 5 angeschlossen. Es wird in diesen Schlußkapiteln Unabhängigkeit und Widerspruchslosigkeit und schließlich der genetische Aufbau der Algebra behandelt.

Das lebhaft, manchmal mit Übertreibung salopper Redewendungen geschriebene Buch ist durchaus methodisch, nicht systematisch angelegt — wie etwa das Lehrbuch der Algebra von Loewy, mit dem es sonst manche Berührungspunkte hat. Es ist für Anfänger, Verfasser denkt auch an Physiker, wohl etwas schwer und, wie mir scheint, mit Namen neuer Begriffe allzusehr belastet. Aber es zeigt in anregender Form, was die Axiomatik der Arithmetik eigentlich will, und das war ein verdienstliches Unternehmen.

Göttingen. W. Lietzmann.

Emil Cohn, Das elektromagnetische Feld. Ein Lehrbuch. 2., völlig neubearbeitete Auflage. 366 S. Mit 41 Textabb. Berlin 1927, Julius Springer. *RM* 24.—.

Vor fast einem Menschenalter (1900), als man noch um Form und Fassung der Maxwellschen Lehren und ihre Übertragung auf bewegte Körper rang, ist auch der Verfasser — damals und bis zum unglücklichen Ausgang des Krieges in Straßburg — als erfahrener Beherrscher des Themas rühmlich bekannt geworden. Seine Schrift „Das elektromagnetische Feld. Vorlesungen über die Maxwellsche Theorie" gehörte lange zu den wenigen guten theoretischen Lehrbüchern, aus denen der angehende Wissenschaftler sich mit der neuen Gedankenwelt der Nahewirkungslehren vertraut machen konnte. Das vorliegende Bändchen, buchtechnisch aufs beste ausgestattet, ist als die zweite Auflage dieser Darstellung zu betrachten; der langen Zwischenzeit mit ihrer wissenschaftlichen Entwicklung entsprechend wurde sie aber von Grund auf neu gestaltet. Fr. Emde, von der Technischen Hochschule in Karlsruhe, seit fast ebensolanger Zeit um eine treffende Fassung der elektromagnetischen Lehren bemüht, hat wertvolle Hinweise beigesteuert.

Der Inhalt ist in fünf Kapitel gegliedert: Das stationäre elektrische Feld, das stationäre magnetische Feld, das quasistationäre elektromagnetische Feld, die Ausbreitung des Feldes, weitere Entwicklung der Maxwellschen Theorie. Schon diese Ein- und Unterteilung läßt den neueren Geist gut erkennen. Wie schwierig es aber ist, die in Frage stehende Begriffswelt unabhängig vom Coulombschen Gesetze — dem Wesen nach ein Fernwirkungsgesetz — zu entwickeln, was aus manchen Gründen empfehlenswert wäre, zeigt, daß auch der Verfasser sich entschlossen hat, dieses Elementargesetz an der Spitze der Darstellung, wie meist üblich, beizubehalten. Als Dielektrizitätskonstante führt er dabei schon in das Elementargesetz den 4π-ten Teil der meist noch heute dafür verwendeten Maßzahl ein, ein Gebrauch, dem man neuerdings auch sonst mehrfach begegnet — auf S. 39 findet sich dazu die Bemerkung: Das sogenannte absolute elektrostatische Maßsystem hat nur noch geschichtliche Bedeutung; siehe auch S. 192 —, der aber bei diesem Ausgangspunkt zunächst gezwungen erscheinen muß. Auch die weitere Entwicklung der Lehren strebt in dem Buche außerordentlich schnell vorwärts. Beispielsweise werden die Begriffe Feldstärke und Potential und ihr Zusammenhang auf nicht ganz einer Oktavseite behandelt. Der Leser muß also schon im Vollbesitz der Kenntnisse und Begriffe aus der Experimentalphysik sein, auch die Infinitesimalrechnung mit der Vektoranalysis und ihrer Symbolik fest beherrschen, wenn er gut folgen will. Die außerordentlich elegante formale Darstellung, aber auch die dadurch vermittelte größere Übersichtlichkeit und Klarheit, welche insbesondere die Vektoranalysis ermöglicht, tritt gegenüber den Formulierungen vor einem Menschenalter schlagend im Beginn des zweiten Kapitels entgegen. Hier wird das Biot-Savartsche (früher in der hier verwandten Bedeutung nach Ampère benannte) Elementargesetz den Begriffen des sta-

tionären elektrischen Feldes zugrunde gelegt, wie im ersten das Coulombsche; man bemerke, daß diese Grundbegriffe also nicht an permanente Magnete anschließen. — Der Inhalt des Buches beschränkt sich aber nicht nur darauf, allgemeine Gesetzmäßigkeiten des elektromagnetischen Feldes zu entwickeln, sondern geht bis zu einem gewissen Grade auch auf Einzelheiten ein; beispielsweise finden wir Erklärungen über die Wirkungsweise der Elektrometer, der Stromgeneratoren und Motoren, der Wechselstrommaschinen, Kurzschlußanker, Repulsionsmotoren u. a. Historische Notizen und Literaturhinweise sind sparsam, merkbar eigentlich nur im letzten Kapitel eingestreut; die Darstellungsweise des Buches ist eben darauf eingestellt, in raschem Fortschritt das rein Sachliche zu entwickeln. So beschränkt sich auch das letzte Kapitel auf eine präzise Gegenüberstellung der Maxwell-Hertzschen, Lorentzschen und Einsteinschen Theorie, und zwar letzterer nur insoweit, als sie auf Elektrodynamik Bezug nimmt, ohne aber die allgemeinere physikalische Bedeutung der Relativitätstheorie zu erörtern.

Der aufmerksame Leser des Buches muß den Eindruck davontragen, daß die Darstellung überall sorgsam bemüht ist, die Klarheit, Zuverlässigkeit und Genauigkeit ihrer Aussagen so weit wie möglich zu treiben und dabei doch jede Weitschweifigkeit zu vermeiden. Dementsprechend erfordert die Durcharbeitung auch erhebliche Aufmerksamkeit und geistige Sammlung; leicht kann die Lektüre nicht genannt werden. Doch hat Referent beim Durchlesen einiger Kapitel großen geistigen Genuß empfunden und hat der Darstellung leichter folgen können und sie befriedigender gefunden wie mancher bekannten anderen mit ähnlichen Zielen in ihren älteren Bearbeitungen.

Hamburg. W. Hillers.

Friedrich Kohlrausch, Lehrbuch der praktischen Physik. 15., stark vermehrte Auflage. Neubearbeitet von W. Bothe, E. Brodhun, E. Giebe, E. Grüneisen, L. Holborn †, K. Scheel und O. Schönrock. 832 S. Mit 395 Figuren im Text. Leipzig und Berlin 1927, B. G. Teubner. Geh. RM 23.—, geb. RM 26.—.

Kaum ein anderes Buch hat zur Erziehung der letzten Generation der Physiker, wir dürfen wohl sagen der gesamten Kulturwelt, so beigetragen wie das allseitig bekannte vorliegende. Es sei deshalb auf die neue Auflage hingewiesen, die sich in ihrer Anlage nicht von ihren Vorgängern unterscheidet, aber überall den Fortschritten der Wissenschaft Rechnung trägt. Teile der Optik, ferner Wechselströme, elektrische Schwingungen, Ionen und Elektronen, Röntgenstrahlen und Radioaktivität sind beträchtlich erweitert worden.

Hamburg. W. Hillers.

E. Gehrcke, Handbuch der physikalischen Optik. Bd. II. Zweite Hälfte. Erster Teil. S. 419—807. Mit 114 Abb. im Text u. 3 Tafeln. Leipzig 1927, Johann Ambr. Barth. Subskriptionspreis RM 28.—.

Von diesem Handbuche liegen nunmehr außerdem Band I vollständig, Band II, erste Hälfte vor (siehe diese Zeitschrift, 58. Jahrg., 4. u. 6. Heft). Der Inhalt des vorliegenden Teilbandes besteht aus den Abhandlungen: Mörikofer, Bandenspektren; Berg, Röntgenspektren; Kolhörster, Gammastrahlen; Zeemann und de Bruin, Magnetische Zerlegung der Spektrallinien; Steubing, Starkeffekt; Cremer, Atomtheorien. Der Band behandelt also wesentlich Gegenstände, die mit den neueren und neuesten Fortschritten der Physik innig verknüpft sind. Besonders das letzte Kapitel kann hohes Interesse beanspruchen Über Form und Darstellung gilt das zu den früheren Teilbänden Gesagte.

Hamburg. W. Hillers.

Johann Kleiber, Physik für Bauschulen und verwandte Technische Lehranstalten. 259 S. 534 Fig. Berlin-München 1926, R. Oldenbourg. RM 4.—.

Das Buch ist eine kürzere Ausgabe für Baufachschulen von Kleiber-Carsten, Physik für technische Lehranstalten. Es ist in der bekannten, von dem Verfasser

beliebten Art gehalten: Hervorkehrung wichtiger Formeln in Schildern, Anwendung von Vergleichen und Figuren, dazu viele Übungs- und Musterbeispiele. Die Mathematik ist hier auf das Notwendigste beschränkt. An manchen Stellen dürfte die Darstellung aber doch zu formal mit Analogien z. B. beim Rundfunk behandelt sein; dann sollte lieber auf die Behandlung verzichtet werden, um dem Schüler nicht ein Verständnis vorzutäuschen. In Verbindung mit einem guten Experimentalunterricht wird das Buch in den gedachten Fachkreisen nützliche Dienste erweisen.

Hamburg. L. Müller.

Weltentwicklung und Welteislehre. Herausgeg. vom Bund der Sternfreunde durch R. Henseling. 4⁰. 218 S. m. 8 Taf. Potsdam 1925, Verlag: Die Sterne.

Wenige Dinge sind bezeichnender für die Urteilslosigkeit, mit der weite Kreise unseres angeblich bereits über die Naturwissenschaften hinaus gewachsenen Zeitalters dem Naturgeschehen gegenüberstehen, als die ausgedehnte Verbreitung, die die Welteislehre gewonnen hat. Der Wunsch, denjenigen zu dienen, die in der Naturwissenschaft mehr eine Angelegenheit des Verstandes als des gefühlsmäßigen Glaubens (oder Aberglaubens) sehen, hat den Verein der Sternfreunde bewogen, die vorliegende Sammlung von Aufsätzen von berufener Seite zu veranstalten. Die beiden ersten (Kienle, „Die Entwicklung der Sterne" und Nölke, „Die Entwicklung des Sonnensystems") bieten eine gemeinverständliche Darstellung der Hauptergebnisse und Hypothesen der astronomischen Forschung; zwei Forderungen stellt Nölke an eine Hypothese: „Sie darf 1. keine Verstöße gegen physikalische und mathematische Prinzipien enthalten, und 2. müssen sich die Beobachtungstatsachen ihr zwanglos einfügen. Der auf diese mehr aufklärenden Aufsätze folgende polemische Teil des Buches (Nölke, „Welteislehre und Astronomie", Hoffmeister, „Über die Lehre von den Sternschnuppen und Feuerkugeln in der Welteislehre", Hummel, „Welteislehre und Geologie", Kühl, „Welteislehre und Meteorologie") zeigt, wie häufig diese beiden Forderungen von der Welteislehre verletzt werden. Während die späteren Aufsätze eine Fülle von Beobachtungstatsachen beibringen, zu denen die Welteislehre in einem auch dem Nichtfachmanne klaren Widerspruche steht, zählt der erste nicht weniger als 35 Verstöße auf, die mehr gegen die erste Forderung gerichtet sind. Hier wird den Verfechtern der Welteislehre ihre Verachtung der Mathematik geradezu zum Verhängnis; denn wenn sie die Wirkung der von ihnen herangezogenen Kräfte ausrechnen würden, so würden ihnen ihre Irrtümer nicht verborgen bleiben. Das inhaltreiche Buch kann Kollegen, die in ihrem Kreise für Aufklärung über diese allgemein interessierenden Fragen wirken wollen, warm empfohlen werden.

Hamburg. H. Thorade.

P. ten Bruggencate, Sternhaufen. 158 S. mit 36 Abbild. und 4 Tafeln. Berlin 1927, Julius Springer. Geh. *RM* 15.—.

Der Verfasser teilt die Sternhaufen ein in kugelförmige und offene, er läßt also den dritten Typus, die Sternschwärme oder „moving clusters", beiseite. Nach Shapley gibt es 81 kugelförmige Haufen und 70 offene, wobei namentlich im letzten Fall die Grenze schwer zu ziehen ist. Die beiden Sternhaufentypen verhalten sich in ihrer Verteilung am Himmel nahezu entgegengesetzt; die kugelförmigen Haufen meiden die Milchstraße, die offenen bevorzugen sie. Außerdem sind die Kugelhaufen fast ganz auf eine Himmelshälfte beschränkt, was allein schon darauf hindeutet, daß das System der Kugelhaufen unserm engeren Sternsystem übergeordnet ist. Drei Wege sind versucht worden, um die Entfernungen der Sternhaufen zu bestimmen. Charlier nimmt an, daß die Kugelhaufen alle aus Sternen geringer Leuchtkraft zusammengesetzt sind, und daß alle Haufen die gleichen Dimensionen haben. Dadurch werden alle Kugelhaufen in unserem engeren Sternsystem untergebracht. Schouten versucht, die von Kapteyn für unser engeres Sternsystem ermittelte Verteilung der Leuchtkräfte auch den Sternhaufen aufzuzwingen. Für unser System soll diese Verteilung graphisch durch eine Fehlerkurve

dargestellt werden. Da die Verteilung in den näher untersuchten Kugelhaufen aber gewiß nicht diese einfache Form hat, sind dieser Methode damit die Grundlagen entzogen. Am zuverlässigsten scheint die Methode von Shapley zu sein, der die gewiß berechtigte Annahme macht, daß eine besondere Klasse von veränderlichen Sternen, die in einzelnen Kugelhaufen vorkommen, dieselbe Leuchtkraft haben wie die entsprechenden Veränderlichen in der näheren Umgebung unserer Sonne. Nachdem auf diese Weise für eine Reihe von Haufen die Entfernung ziemlich sicher bestimmt ist, macht Shapley dann dieselbe Annahme wie Charlier, daß alle Kugelhaufen die gleichen Dimensionen hätten. Auf diese Weise findet er Entfernungen für die kugelförmigen Sternhaufen, die etwa von 10000 bis 200000 Lichtjahren reichen. Genauere Werte kann man deswegen nicht angeben, weil die δ-Cephei-Sterne in unserem engeren System zu den sehr fernen Objekten gehören. Der Verfasser sucht eine Entscheidung über den Wert der drei Methoden herbeizuführen mit Hilfe von Farben-Helligkeits-Diagrammen (F.H.D.), indem er für eine Reihe von Sternhaufen die Beziehung zwischen der Farbe und der Leuchtkraft der Sterne graphisch darstellt und sie vergleicht mit den entsprechenden Diagrammen für die Sterne in der Umgebung unserer Sonne, dem sog. Russell-Diagramm. Als Resultat wird angegeben, daß die Entfernungen von Shapley der Größenordnung nach richtig sind.

In den folgenden Abschnitten des Buches wird das Problem behandelt, aus der scheinbaren Verteilung der Sterne eines Haufens auf ihre wahre Verteilung im Raum zu schließen. Eine Lösung ist nur möglich unter der Voraussetzung, daß Kugelsymmetrie herrscht, oder bei ellipsoidförmigen Haufen unter ganz speziellen Annahmen. Bei den Kugelhaufen läßt sich die Verteilung der Sterne annähernd vergleichen mit der Verteilung der Moleküle einer Gaskugel im adiabatischen Gleichgewicht. Im Gegensatz zu früheren Anschauungen scheint aber die Ähnlichkeit zwischen Sternhaufen und Gaskugel rein äußerlich ohne tieferen physikalischen Sinn zu sein. Bei einigen Haufen glaubt der Verfasser Reste einer Spiralstruktur feststellen zu können, doch werden ihm hierin die wenigsten Astronomen beipflichten. Aus den weiteren Untersuchungen über den Aufbau der Sternhaufen sei als das für die Praxis wichtigste Ergebnis hervorgehoben, daß kugelförmige Sternhaufen unter dem Einfluß äußerer Kräfte, also z. B. der Anziehung des übrigen Sternsystems, sich allmählich auflösen müssen.

Große Bedeutung legt der Verfasser den bereits erwähnten F.H.D. für die Entwicklung der Sternhaufen bei. Da wir es hier mit Systemen zu tun haben, die zwar teilweise sehr viele Mitglieder enthalten, aber doch immer noch gegen unser eigenes Sternsystem als klein bezeichnet werden müssen, so liefern einzelne Sternhaufen nach der Ansicht des Verfassers gleichsam kleine Ausschnitte aus dem Russell-Diagramm für das allgemeine Sternsystem. Macht man dann noch die Annahme, daß die Glieder eines Haufens gleich alt sind, so liest man in der Tat aus diesen Diagrammen ab, daß die Entwicklung der Sternhaufen in dem Sinne Kugelhaufen—Offene Haufen—Sternströme vor sich geht. Die Schwierigkeit, die in der merkwürdigen Verschiedenheit in der Verteilung der beiden Sternhaufentypen liegt, kann man dann gerade umgekehrt als Stütze für diese kosmogonische Hypothese deuten, indem die Kugelhaufen sich unter dem Einfluß der Anziehung des Milchstraßensystems der Milchstraße nähern und sich dabei in offene Haufen und schließlich in Sternströme auflösen.

Bergedorf (Sternwarte). LARINK.

G. Kerschensteiner, Theorie der Bildung. 515 S. Leipzig 1926, B. G. Teubner. Geh. RM 15.—, geb. RM 18.—.

Kerschensteiner hat uns im Laufe der letzten Jahrzehnte eine Folge nicht allzu umfangreicher, den Schulmann durch Inhalt und Darstellungsform gefangennehmender, in jeder ihrer zahlreichen Auflagen erneut sorgfältig durchgearbeiteter Monographien geschenkt. Nun tritt er mit einem großen systematischen Werk, das an die Grundlagen der Pädagogik herangeht, hervor und verspricht diesem ersten Teil, der Theorie der Bildung, einen zweiten, eine Theorie der Bildungsorganisation, folgen zu lassen.

Für fast alle diese Schriften über Fragen der praktischen Pädagogik war eine

gewisse theoretische Vertiefung kennzeichnend; jetzt nun tritt der Theoretiker ganz in den Vordergrund. Und doch möchte ich auch in diesem Buche als das Anziehendste die überall eingestreuten feinen Bemerkungen des praktischen Schulmannes bezeichnen, aus denen die reiche Erfahrung einer langen Lebensarbeit spricht. Vielleicht geht es vielen Lesern so, wie es Kerschensteiner selbst gegangen ist, der erst in den letzten Jahren die Wendung zur Philosophie genommen hat. Ich möchte doch das Selbstbild Kerschensteiners, das er an einer Stelle seines Buches (S. 281) zeichnet, hierhersetzen:

„Betrachte ich mein eigenes Leben, so war es die längste Zeit von ausgesprochen praktisch-pädagogischen Zwecken und den entsprechenden Interessen (natürlich neben manchen anderen) beherrscht. Theoretisch-philosophische Untersuchungen, ja selbst theoretisch-pädagogische, fanden noch in meiner Studentenzeit keinerlei Interesse. Selbst mein Interesse für mathematische Studien war zum größten Teil von dem sozialen Motive (Zwecke) getragen, in der exaktesten aller Wissenschaften an der für mich besten Schulform der beste Lehrer zu werden. Da bot ein gütiges Schicksal mir ein reiches Arbeitsfeld für meine praktisch-pädagogischen Neigungen und Interessen. Meine schulorganisatorischen Zwecke ließen mich über die Mittel ihrer Verwirklichung nachdenken und mehr und mehr in das Wesen dieser Mittel eindringen. Da war es unerläßlich, auch den Boden der theoretischen Untersuchungen zu betreten und Schritt für Schritt in eine Wissenschaft einzudringen, der ich in meiner Jugend in weitem Bogen aus dem Wege gegangen war, in die Philosophie. Was ich noch vor 20 Jahren für höchst unwahrscheinlich gehalten hätte, die Philosophie hat stärkstes unmittelbares Interesse für mich gewonnen. Im Hintergrunde freilich steht immer noch das alte praktisch-pädagogische Interesse der Schulorganisation, das mir zugleich auch immer die Grenzen steckt für meine theoretische Betätigung".

Ich kann hier nicht in wenigen Worten auf die Grundzüge der von Kerschensteiner entwickelten Theorie eingehen. Sie steht auf dem Boden der Wertphilosophie, und ein Eindringen in sie wird demjenigen, der anders eingestellt ist, nicht leicht. Das Gefühl, daß dem so ist, hat wohl auch der Verfasser, und er gibt solchen Lesern im Vorwort einige Ratschläge. Ich möchte denjenigen, die als praktische Schulmänner an das Buch herangehen, geradezu empfehlen, mit dem zweiten Teil zu beginnen, der sich mit der „Bildung als Verfahren" beschäftigt und nacheinander Bildungsobjekt (Zögling), Bildungsmittel (Kulturgüter) und Bildungssubjekt (Lehrer und Erzieher) behandelt, um dann am Schluß die allgemeinen Prinzipien des Bildungsverfahrens herauszuarbeiten. Und bei dem ersten Teile („Bildung als Zustand") würde ich demjenigen, dem die psychologische und die teleologische Seite des Bildungsbegriffes näher liegt, raten, mit diesen Kapiteln zu beginnen und die „axiologische" Seite, d. h. die „Wertfrage", den Beschluß machen zu lassen.

Dann kann der Leser das Werk, wenn es, wie das Vorwort es wünscht, „zu einer abermaligen Lesung reizt", in seinem vom Verfasser gewollten Aufbau genießen. Denn, das muß hervorgehoben werden, das Buch gehört nicht zu denen, die man in einem Zuge in wenigen Tagen durchlesen kann, man hat mit ihm monatelang zu tun. — Ganz abgesehen von der philosophischen Gesamteinstellung, die nicht für alle Leser die gleiche sein wird, fordert gewiß auch manche Beantwortung einer praktischen Frage zum Widerspruch heraus — ich nenne etwa die Beurteilung der mathematischen Unterrichtsreform (S. 99) — aber überall ist man für die Fülle der Anregungen dankbar.

Göttingen. W. Lietzmann.

E. Pascal, Repertorium der höheren Mathematik. 1. Bd.: Repertorium der höheren Analysis. Herausgegeben von E. Salkowski. 2. Aufl., 2. Teilband: Differentialgleichungen, Funktionentheorie. S. 529 bis 1023. Leipzig 1927, B. G. Teubner. Geb. *RM* 18.—.

Von der „zweiten, völlig umgearbeiteten Auflage der deutschen Ausgabe" des viel benutzten Pascalschen Repertoriums, dessen erster, der Analysis gewidmeter Teil in seiner ersten deutschen Auflage, von A. Schepp bearbeitet, 1900 in einem einzigen Bande erschienen war, konnte die erste, Algebra, Differential- und Integralrechnung umfassende „Hälfte", von P. Epstein herausgegeben, 1910 erscheinen. Jetzt endlich, 17 Jahre später, erscheint unter anderer Redaktion ein „zweiter Teil-

band", dem in Kürze der dritte, der Schlußband, folgen soll. Da die im vorliegenden Bande vereinigten Kapitel den Stoff der höheren Schulen kaum berühren, kann ich mich mit der Angabe der einzelnen Referate begnügen: A. Guldberg, Gewöhnliche Differentialgleichungen und Differenzengleichungen (ein besonderer Artikel über Differenzengleichungen von A. Walther ist für den 3. Band vorgesehen), A. Guldberg, Partielle und totale Differentialgleichungen, E. Pascal, Totale Differentialgleichungen und Differentialformen, A. Guldberg und F. Engel, Die Lehre von den Transformationsgruppen, H. Hahn, Variationsrechnung, H. Doetsch, Funktionentheorie, E. Jahnke und A. Barneck, Elliptische Funktionen und Integrale, H. W. E. Jung, Algebraische Funktionen und ihre Integrale, H. W. E. Jung, Die Thetafunktionen und die Abelschen Funktionen, R. Fricke, Automorphe Funktionen unter Einschluß der elliptischen Modulfunktionen.

Göttingen. W. Lietzmann.

Hübners geographisch-statistische Tabellen aller Länder der Erde. 69. Jahrgang von E. Würzburger und E. Roesner. 186 S. Wien 1927, Seidel.

Mit gewohnter Pünktlichkeit ist der neue, im April 1927 abgeschlossene Jahrgang des bekannten und geschätzten statistischen Werkes erschienen. Der mathematische Unterricht zieht für seine Übungsaufgaben immer mehr auch Zahlenwerte aus dem Wirtschaftsleben heran. Lehrbücher können naturgemäß immer nur von Zeit zu Zeit bei neuen Auflagen ihre Zahlenangaben nach dem neuesten Stande berichtigen. Deshalb gehört dieses knapp und übersichtlich angelegte Werk neben den statistischen Jahrbüchern für das Deutsche Reich und etwa noch für Preußen in die Handbücherei einer jeden Anstalt.

Göttingen. W. Lietzmann.

P. Boutroux, Das Wissenschaftsideal der Mathematiker. Deutsch von H. Pollaczek-Geiringer. (Wissenschaft und Hypothese Bd. XXVIII.) 253 S. Leipzig 1927, B. G. Teubner. Geb. *RM* 11.—.

Das eigenartige Buch Boutroux gibt nicht etwa eine Geschichte der Mathematik, wenn sich auch die Darstellung um drei Höhenpunkte der Entwicklung der Mathematik ballt, die griechische Mathematik, das 17./18. Jahrhundert, die neueste Zeit, und damit einen Beitrag zu einer Geschichte der mathematischen Ideen liefert. Es greift auch nicht das Problem der Psychologie des mathematischen Forschers in seinem ganzen Umfang an, sondern begnügt sich mit einem Ausschnitt daraus. Die großen, durch die Jahrhunderte bleibenden Ideen fesseln den Verfasser stärker als die einzelnen Mathematiker, in denen jene lebendig werden. Selbstverständlich hat diese Gesamtschau einen sehr individuellen Charakter; der Verfasser sieht in den objektiven historischen Tatbestand, der naturgemäß nur mit einer gewissen Annäherung bekannt ist, Ideen hinein, die seiner subjektiven Auffassung entstammen. So wird, um nur ein paar Einzelheiten zu nennen, mancher die vollständige Beiseiteschiebung der angewandten Mathematik nicht mitmachen. Auch daß die vorgriechische Mathematik so gänzlich praktisch eingestellt gewesen sein soll, erscheint mir falsch. Die Aufgaben des Ägypters Achmes über arithmetische Reihen täuschen doch nur eine Wirklichkeitsnähe vor mit ihren komplizierten Bruchzahlen; dahinter steckt eine reine, spekulative Arithmetik.

Leider berücksichtigt die Darstellung nicht die allerneueste Entwicklung, die gerade für die Beurteilung der Grundlagenfragen und für die Aufklärung der Tatsachengeschichte der Mathematik von Bedeutung gewesen ist. Einige Abschnitte des Buches sind schon vor mehr als 20 Jahren geschrieben, die neuesten Teile sind von 1920; so werden Arbeiten aus der Vorkriegszeit als „kürzlich erschienen" bezeichnet. Die Herausgeberin, die für eine flüssige Übersetzung sorgte, hat zwar in dankenswerter Weise eine Reihe biographischer und bibliographischer Anmerkungen zur Mathematik der Griechen angefügt, bei der neueren und neuesten Zeit aber gestreikt, offenbar weil ihr selbst eine Ergänzung in der Form von Anmerkungen nicht ausreichend erschien.

Ich habe dieses Bedenken geäußert, weil es sich jedem Leser aufdrängen wird. Es zeigt aber gleichzeitig, daß Fragen, wie sie hier behandelt werden, des Interesses der Gegenwart sicher sind. Gerade für den Lehrer, dem der kulturgeschichtliche Gehalt des mathematischen Unterrichtes am Herzen liegt, wird das Buch eine Fülle von Anregungen bringen.

Göttingen. W. LIETZMANN.

M. Hauptmann, Technische Aufgaben zur Mathematik. (Ergänzungsheft 2 von W. Lietzmann, Mathematisches Unterrichtswerk.) 111 S. 115 Abb. Leipzig 1927, B. G. Teubner. Kart. *RM* 3.—.

Es ist kein Geheimnis, daß unter den Vertretern der Mathematik an unseren Universitäten die Zahl derer wieder im Wachsen begriffen ist, die mit einer gewissen Geringschätzung auf die Anwendungen herabsehen und in der Beschäftigung mit diesen Anwendungen eine Entwürdigung der reinen Wissenschaft sehen. Damit aber rückt die Gefahr einer Reaktion gegen die unter Führung von F. Klein seit einigen Jahrzehnten durchgeführte Unterrichtsreform in greifbare Nähe.

Dem wissenschaftlichen Forscher mag man es gern zugestehen, wenn er um des systematischen Aufbaus seiner Wissenschaft willen jede Rücksichtnahme auf die Anwendungen ablehnt. Für die Schule müßte ein solcher Purismus in verstärktem Maße alle jene Mißstände des mathematischen Unterrichts wieder heraufbeschwören, welche gerade durch die Unterrichtsreform überwunden schienen. Es würde nämlich eine Vergewaltigung des jugendlichen Geistes bedeuten, wollte man dem lebhaften Interesse des jungen Menschen für die Anwendungen der Mathematik nicht entgegenkommen. Man wird selbstverständlich dem Primaner ein lebendiges Gefühl dafür vermitteln wollen, was das Ideal der Reinheit des Aufbaus einer Wissenschaft zu bedeuten hat. Das darf aber kein Grund werden, die andere lebenswichtige Seite der Mathematik, nämlich ihren Beruf, als Mittel der Naturerkenntnis und Naturbeherrschung zu dienen, zu vernachlässigen. So verlangt der junge Mensch nach einem Einblick in die Welt der Technik; damit ist nun nicht gesagt, daß man ihm ein in die Einzelheiten gehendes technisches Fachwissen vermitteln soll. Wohl aber muß an Beispielen seine Fähigkeit entwickelt werden, in der Wirkungsweise technischer Einrichtungen und Maschinen das wirkende Gesetz zu erkennen und in ein mathematisches Diagramm oder in eine mathematische Formel zu bannen und damit geistig zu beherrschen. Es ist daher von der größten Erheblichkeit für den Lehrer, daß er selbst einen gewissen Einblick in die Welt der Technik bekommt und eine lebendige Vorstellung davon gewinnt, wie weit das Herrschaftsgebiet der exakten Wissenschaften reicht, um davon seinen Schülern Kunde zu geben.

In diesem Sinne kann man die Erweiterung des Lietzmannschen Unterrichtswerkes durch die Hinzunahme des von M. Hauptmann zusammengestellten Ergänzungsheftes 2 nur lebhaft begrüßen. Es ist berufen, dem mathematischen Unterricht eine neue Note zu geben. Die hier vorliegenden 89 mathematischen Aufgaben aus dem Reiche der Technik atmen wirkliche Lebensnähe und vermögen dem Schüler zu zeigen, daß die Mathematik nicht etwa ein müßiges Spiel rein logischer Denkoperationen ist. Dabei kommen Analysis und graphische Methoden in gleicher Weise zur Geltung. Um einen Eindruck von dem hier gebotenen Reichtum zu geben, erwähne ich stichwortartig die herangezogenen Einzelgebiete der Technik. Da finden wir berücksichtigt: Die Technik des Eisens, die Stoffkunde, die Festigkeitslehre und Statik der Bauwerke, die Lehre von den Maschinenteilen, die Arbeits- und Kraftmaschinen, Bergbau und Hüttenwesen, Schiffbau und Luftschiffbau, Eisen- und Brückenbau, Eisenbahnwesen, Erd- und Straßenbau, Wasserbau, Wasserversorgung und Kanalisation.

Bei solcher Reichhaltigkeit besteht wohl überall die Möglichkeit, bei der Heranziehung der Technik besonders auch auf die besondere industrielle Färbung der Heimat Rücksicht zu nehmen. Man darf daher dem Heft die weiteste Verbreitung in unseren Schulen wünschen.

Göttingen. H. WEINREICH.



Zeitschriftenschau.

Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften. — Jahrg. 1927, Nr. 9. — H. Hermann, Der austauschfreie (adiabatische) Entspannungsversuch nach Clément und Désormes; Ausführung und Auswertung. — R. Fleischmann, Die Infinitesimalrechnung im Unterricht. Ein methodischer Vorschlag. — G. Wolff, Mathematik und Naturwissenschaften in den Bildungswegen Amerikas.

Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität. — 5. Bd., 4. Heft. — K. Zwirner, Zur Riemannschen Geometrie I. Orthogonalsysteme, in denen Ivorys Theorem gilt. — H. D. Kloosterman, Asymptotische Formeln für die Fourrierkoeffizienten ganzer Modulformen. — E. Artin, Beweis des allgemeinen Reziprozitätsgesetzes.

Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft. — 26. Jahrg., 2. Stück. — E. Jakobsthal, Eigenschaften einer speziellen Klasse monotoner Folgen. — E. Hopf, Bemerkungen zum ersten Randwertproblem der Potentialtheorie im Raume. — S. Bochner, Über Fourrier-Reihen von fastperiodischen Funktionen. — A. Hammerstein, Nichtlineare Integralgleichungen und direkte Methoden der Variationsrechnung. — A. Korn, Über die Heavisidesche Methode zur Integration der Telegraphengleichung. — R. Rothe, Über den Mittelwertsatz und die Taylorsche Formel. — G. Hamel, Anwendung der elementaren Zahlentheorie auf die Theorie eines Chiffrierapparates — E. Hopf, Eine Bemerkung zur Theorie der partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung vom elliptischen Typus. — A. Fleck, Über eine Erweiterung des Begriffs der komplexen Zahl.

Nieuw Archief voor Wiskunde. — Tweede reeks. — Deel 15, Derde stuk. — Z. Horak, Die Formeln für allgemeine lineare Übertragung bei Benutzung von nichtholonomen Parametern. — W. Blaschke, Eine Umkehrung von A. Knesers Transversalensatz. — M. van Haaften, Multiplikation et division abrégées. — B. L. van der Waerden, Beweis einer Baudetschen Vermutung. — J. de Vries, Eine Kongruenz von kubischen Raumkurven und ihre Abbildung auf das Punktfeld. — J. de Vries, Eine Abbildung der Kongruenz der Treffgeraden zweier rationalen Raumkurven. — J. de Vries, Eine Kongruenz von Raumkurven vierter Ordnung erster Art. — J. C. Kluyver, Optellingstheorema voor de funkties $sn\, u$, $cn\, u$ en $dn\, u$. — J. C. Kluyver, Berekening van twee bepaalde integralen. — E. L. Elte, Over het voorstellen van zekere getallen in den vorm $a^2 \pm 2b^2$.

Euclides, Tijdschrift voor de didactiek der exacte vakken. — 4. Jahrg. 1927/28, Nr. 1. — H. J. E. Beth, Eenvoudige beschouwingen uit de meetkunde van Gauss. — F. Veen, Bijdrage tot de regeling van het wiskundeonderwijs aan de H. B. S.

Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde. — 15. Jahrg. 1927/28, Nr. 1. — Hk. de Vries, Historische Studien IX.

Matematisk Tidsskrift. — 1927, 1. Heft. — V. A. C. Jensen, Virkeligheds-geometrien som Skolefag. — J. Mollerup, Logaritmer, Potens, Rod. — G. M. Stensig, Om Ellipsen.

1927, 2. Heft. — J. Jensen, Konvekspunkter og vendepunkter. — J. Mollerup, En trigonometrisk-axiomatisk Undersøgelse. — H. Lawaetz, Annuitetsberegning.

The American Mathematical Monthly. — Volume 34, 1927, Nr. 7. — G. James, On the Upper Limit to the Real Roots of an Algebraic Equation. — G. W. Evans, The Greek Idea of Proportion. — P. H. Daus, On a Set of Problems Related to the Problem of Apollonius. — K. P. Williams, The Analytik Determination of the Area of a Triangle in Terms of its Sides. — O. Dunkel, A Note on the Computation of Arithmetic Roots.

Annalen der Physik. — 83. Bd., 5. Heft. — F. Möglich, Beugungserscheinungen an Körpern von ellipsoidischer Gestalt. — W. Tospišil, Über die Vergrößerung der Bewegung durch Luft.

83. Bd., 6. Heft. — H. Pfenninger, Über die Polarisation von Lichtwellen am metallischen Kreiszylinder. — M. Knudsen, Thermischer Molekulardruck in Röhren. — W. Steubing, Über den Dopplereffekt in Wasserstoff-Kanalstrahlen und die

Balmerserie. — Th. Sexl, Zur Stabilitätsfrage der Poisseuilleschen und Couetteschen Strömung. — F. Wolff, Eine Präzisionsmessung von e/m_0 nach der Methode von H. Busch. — K. Wolf, Über die Druckabhängigkeit der Dielektrizitätskonstanten von Gasen und Wasserdampf bei niederen Drucken. — K. Bechert, Über die Eigenwerte der wellenmechanischen Randwertaufgaben.

83. Bd., 7. Heft. — W. Bennewitz, Die Variation der Geschwindigkeitsverteilung lichtelektrischer Elektronen beim Entgasungs- und Gasbeladungsprozeß an Palladium und Platin. — H. Lenz, Die Temperaturabhängigkeit des lichtelektrischen Primärstromes im Diamanten. — E. Schrödinger, Energieaustausch nach der Wellenmechanik. — F. Kirchner, Über den Comptoneffekt an gebundenen Elektronen und einige andere Beobachtungen an Nebelkammeraufnahmen harter Röntgenstrahlen in Argongas. — W. v. Ignatowsky, Zur Theorie der Beugung an schwarzen Schirmen. — M. J. O. Strutt, Stromverdrängung in rechteckigen Leitern. — F. Wolf, Über die Elektronengeschwindigkeiten beim normalen und selektiven lichtelektrischen Effekt. — G. Joos, Zur Theorie des Isotopeneffekts in Linienspektren.

Zeitschrift für Physik. — 44. Bd., 1./2. Heft. — P. Jordan, Über eine neue Begründung der Quantenmechanik. II. — T. R. Hogness und J. Franck, Über den Nachweis der Relativgeschwindigkeit der Zerfallsprodukte bei optischen Dissoziationsprozessen. — W. Kuhn, Polarisierbarkeit der Atomkerne und Ursprung der γ-Strahlen. — F. Sauerwald und G. Elsner, Über den inner- und zwischenkristallinen Bruchvorgang in Systemen aus großen Kristallen von Aluminium, Eisen, Kupfer, Messing in Abhängigkeit von Temperatur und Zeit sowie über dabei erfolgende Kristallisationen. — H. C. Burger und P. H. van Cittert, Wahre und scheinbare Breite von Spektrallinien. — B. Voigt, Über die Messung von Dielektrizitätskonstanten absorbierender Flüssigkeiten. — G. W. Kellner, Die Ionisierungsspannung des Heliums nach der Schrödingerschen Theorie; Der Grundterm des einfach ionisierten Lithiums nach der Schrödingerschen Theorie. — H. Schmidt, Über den Begriff der erzwungenen Schwingung. — G. v. Gleich, Bemerkungen zu den Gravitationsgleichungen der Allgemeinen Relativitätstheorie. — C. Leiss, Über Quarz-Doppel-Monochromatoren und einen neuen vereinfachten Fluorit-Vakuum-Spektrographen für das Schumann-Gebiet. — M. Tschetverikova, Entmagnetisierung von Eisenverbindungen durch elektrische Schwingungen. — M Broszko, Neue Grundgleichungen der Mechanik wirklicher Flüssigkeiten. — J. Eggert und W. Noddack, Berichtigung zu der Arbeit: Über die Quantenausbeute bei der Wirkung von Röntgenstrahlen auf Silberbromid. — B. Trumpy, Berichtigung zu meiner Arbeit „Über Intensität und Breite von Spektrallinien“.

44. Bd., 3. Heft. — T. L. de Bruin, Über das Funkenspektrum des Neons (Ne II). I. — W. Heitler, Freie Weglänge und Quantelung der Molekültranslation. — K. L. Wolf, Über eine Glühkathoden-Vakuumentladung in Gasen und Metalldämpfen, besonders in Eisendampf, und ihre spektroskopische Verwendbarkeit. — Y. Sugiura, Über die numerische Bestimmung der Mittelwerte zwischen Ortho- und Paratermen von He und Li^+ bei Berücksichtigung des Polarisationsgliedes in der quantenmechanischen Störungstheorie. — A. Predwoditelew und W. Blinow, Über den Einfluß des Kristallwassers auf den Photoeffekt in Kristallhydraten. II. — D. Nasledow und T. Kačura, Einfluß der Entladungsform auf die Energieverteilung im kontinuierlichen Röntgenspektrum. — S. J. Hirschhorn, Über die fortschreitende Bewegung eines Piezoquarz-Kristalls im elektrischen Felde. — W. D. Kusnezow und N. A. Bessonow, Zur Frage nach dem Verhältnis der Oberflächenenergien verschiedener Flächen bei Steinsalzkristallen.

44. Bd., 4./5. Heft. — M. Czerny, Die Rotationsspektren der Halogenwasserstoffe. — R. Fürth, Die absolute Bestimmung von Dielektrizitätskonstanten mit der Ellipsoidmethode. — E. Wrede, Über die Ablenkung von Molekularstrahlen elektrischer Dipolmoleküle im inhomogenen elektrischen Feld. — G. Kellström, Die L-Absorptionssprünge des Silbers. — E. Dussler und W. Gerlach, Eiseneinkristalle. III. Mitteilung: Die Magnetisierung in verschiedenen Kristallrichtungen. — E. Dussler, Experimentelle Methode zur Bestimmung des ballistischen Entmagnetisierungsfaktors. — P. Jordan, Über die Polarisation der Lichtquanten. — M. Wehrli, Der Übergang von der Glimm- zur Bogenentladung. — H. Greinacher, Über die Registrierung von α- und H-Strahlen nach der neuen elektrischen Zählmethode. — E. H. Kennard, Zur Quantenmechanik einfacher Bewegungstypen. — A. Reis, Über den Mechanismus

der elektrolytischen Stromleitung in Kristallen. — W. Laschkarew, Ableitung des Fresnelschen Mitführungskoeffizienten aus der Lichtquantentheorie. — W. Laschkarew, Zur Theorie der Bewegung von Materie und Licht im Gravitationsfelde. — L. Myssowsky und L. Tuwim, Absorptionskurve der Höhenstrahlung im Wasser. — Z. Klemensiewicz, Zur Frage des Widerspruches zwischen der klassischen Mechanik und der Erfahrung bei Wärmestrahlung. II. — W. Anderson, Über die heutzutage populärsten Erklärungen der Aufrechterhaltung der negativen Erdladung. — F. J. v. Wiśniewski, Die Modelle von Wasserstoff und Helium; Die chemische Konstante zweiatomiger Molekeln. — W. Rump, Berichtigung zu der Arbeit: Energiemessungen an Röntgenstrahlen.

44. Bd., 6./7. Heft. — U. Gerhardt, Interferenzmikroskopische Messung kleiner Teilchen bis herab zu solchen von etwa 150 $\mu\mu$ Durchmesser. — G. Michel, Über die Austrittsarbeit der Glühelektronen. — L. Myssowsky und P. Tschishow, Spuren der α-Teilchen in dicker Bromsilber-Gelatineschicht der photographischen Platten. — R. Hilsch, Über die ultraviolette Absorption einfach gebauter Kristalle. — W. Weizel und Chr. Füchtbauer, Kernschwingungen im Bandenspektrum des Heliums. — W. Heitler und F. London, Wechselwirkung neutraler Atome und homöopolare Bindung nach der Quantenmechanik. — P. Jordan, Zur Quantenmechanik der Gasentartung. — H. von Klüber, Quantitative Untersuchungen an Absorptionslinien im Sonnenspektrum. — E. Reichenbächer, Die Kopplung des Elektromagnetismus mit der Gravitation. — E. N. Gapon, Der Durchmesser der Atome und der photoelektrische Effekt. — S. I. Wawilow, Eine Möglichkeit des experimentellen Nachweises der Rotverschiebung der Resonanzstrahlung bei wiederholten Reemissionen. — S. I. Wawilow und W. L. Lewschin, Berichtigung zu unserer Arbeit: „Die Beziehungen zwischen Fluoreszenz und Phosphoreszenz in festen und flüssigen Medien". — J. Koenigsberger, Zu einer Bemerkung von St. Rybar über Aufhängedrähte. — K. Przibram, Nachtrag zu der Mitteilung: „Verfärbung und Lumineszenz durch Becquerelstrahlen. II."

Physikalische Zeitschrift. — 28. Jahrg., Nr. 14. — O. Gaertner, Eine Wiederholung einiger Messungen Barklas über Unstetigkeiten bei der Absorption von Röntgenstrahlen in Aluminium (sogenanntes „J-Phänomen"). — N. Stark und O. Blüh, Über die Adsorption und die Gestalt des CO_2-Moleküls. — K. Schollmayer, Richtigstellung von Einwänden gegen Ostwalds Farbenlehre. — H. Petersen, Über die Temperatur in den höheren Schichten der Atmosphäre. — C. Manneback, Bemerkung über die Arbeit von Herrn Gans „Über die Dielektrizitätskonstante im Rahmen der Wellenmechanik. — R. Mecke und M. Guillery, Bandenspektra. II.

28. Jahrg., Nr. 15. — F. Maske, Über die Temperaturabhängigkeit der Dielektrizitätskonstanten von Dämpfen. I. — Benzophenon. — P. Hermanspann, Zur Induktivität von Eisendrosseln. — K. Széll, Über die Rotationsschwingungsentropie der zweiatomigen Gase. — D. Nasledow und P. Scharawsky, Die Abhängigkeit der Gesamtintensität der Röntgenstrahlung von der Stromstärke in der Röntgenröhre. — W. Alexandrow, Bemerkung über den Zusammenhang der spezifischen Strahlungsintensität mit der Strahlungsdichte. — H. Lachs und J. Biczyk, Zur Methodik des Strömungspotentials.

28. Jahrg., Nr. 16. — E. Kretschmann, Kritischer Bericht über neue Elektronentheorien der Elektrizitäts- und Wärmeleitung in Metallen.

Zeitschrift für technische Physik. — 8. Jahrg., 8. Heft. — J. Runge, Zur Farbenlehre. — A. Klughardt, Untersuchungen zur Farbenlehre. — V. Polak, Versuche zur Bestimmung der Strahlungszahlen fester Körper. — E. Schwerin, Über die Eigenfrequenzen der Schaufelgruppen von Dampfturbinen. — A. Sellexio, Einige Bemerkungen zur Wärmelehre. — W. Ewald und H. Schulz, Ein lichtstarker Monochromator.

Die Naturwissenschaften. — 15. Jahrg., 31. Heft. — P. Jordan, Die Entwicklung der neuen Quantenmechanik — Tätigkeitsbericht der Kaiser-Wilhelm-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften für das Halbjahr vom 1. Oktober 1926 bis Ende März 1927. — J. M. Eder, Unrichtige Angaben über die Geschichte der Photographie in der naturwissenschaftlichen Literatur.

15. Jahrg., 32. Heft. — O. Meyerhof und K. Lohmann, Über den Ursprung der Kontraktionswärme.

15. Jahrg., 33. Heft. — F. Rehbock, Rechenmaschinen. — A. Unsöld, Über die Theorie der Born-Landéschen Gitterkräfte.

Zeitschrift für den physikalischen und chemischen Unterricht. — 40. Jahrg., 4. Heft. — H. Lorenz, Elementare Theorie der Zentralbewegung, der allgemeinen Schwere und der Erdgestalt. — E. Hensel, Der Kreissektor als physikalisches Pendel. — P. Nickel, Elektrische Meßinstrumente für Schulzwecke. — K. Gentil, Musikinstrumente in der Akustik. — A. Döge, Bestimmung von elektrischen Widerständen in den Schülerübungen.

Das Wetter. — 44 Jahrg., 7. Heft. — A. Wigand, Luftelektrisch-physiologische Reaktionen des Wettersinnes. — K. Keil, Höhenwindmessungen.

Physik und Chemie. (Wien) — 27. Jahrg., 4. Heft. — H. Trebitsch, Die Ausmessung mikroskopischer und submikroskopischer Materieteilchen.

Aus verschiedenen Zeitschriften. — H. Wieleitner, Über Cardanos Beweis für die Lösung der kubischen Gleichung; über die Fortschritte, die Simon Sterin in der Lösung der quadratischen Gleichung erzielte (Sitzungsberichte d. phys.-med. Sozietät zu Erlangen, 58/59 [1926/27]). — H. Wieleitner, War die Wissenschaft der alten Ägypter wirklich nur praktisch? (Isis **9** [1927]).

Sonderschriften. — H Bieber, Über die Bestimmung des systematischen Fehlers, den man bei der Schätzung gewisser Funktionen apriorischer Wahrscheinlichkeiten aus empirischen relativen Häufigkeiten begeht, mittels einer unendlichen Reihe. Hamburgische Dissertation 1927.

Eingegangene Lehrmittel und Kataloge.

Julius Springer-Berlin, Mathematik, Physik, Chemie. 92 S., o. J. [1927].

Hirschwaldsche Buchhandlung, Berlin NW 7, Unter den Linden 68: Nachtrag zum Hirschwald-Katalog, Mathematik, Physik. Veröffentlichungen September 1926/27. 83 S., o. J. [1927].

Neuerscheinungen.[1])

Sammelwerke.

Mathematisch-Naturwissenschaftlich-Technische Bücherei, herausgeg. von E. Wasserloos und G. Wolff. Berlin 1927, Salle.

Bd. 8. K. Fladt, Euklid. 72 S. Geb. RM 2.—.

Bd. 1. F. Kliem und G. Wolff, Archimedes. 142 S. Geb. RM 3.—.

Bd. 9. K. Mahler, Atombau und periodisches System der Elemente. 123 S. Geb. RM 3.20.

Bd. 2. J. Plassmann, Fixsternbeobachtungen mit einfachen Hilfsmitteln. 120 S. Geb. RM 3.40.

Bd. 5. B. Tzschimer, Wetterkarte und Wettervorhersage. 62 S. Geb. RM 2.—.

Bd. 4. A. Wenzel, Galilei. 74 S. Geb. RM 2.—.

Bd. 12. H. Weinreich, Die Philosophie als Führer in der Schule und im Leben. 174 S. Geb. RM 3.80.

Bd. 3. H. Wieleitner, Mathematische Quellenbücher I: Rechnen und Algebra. 75 S. Geb. RM 2.—.

Bd. 11. ——, Dass. II: Geometrie und Trigonometrie. 68 S. Geb. RM 2.—.

Mathematische Wissenschaft.

F. R. Moulton, Einführung in die Himmelsmechanik. 2. Aufl., deutsch von W. Fender. 412 S. Leipzig 1927, B. G. Teubner. Geb. RM 20.—.

E. Netto, Lehrbuch der Kombinatorik. 2. Aufl. von V. Brun und Th. Skolem. 341 S. Leipzig 1927, B. G. Teubner. Geb. RM 14.—.

1) An dieser Stelle werden alle bei der Schriftleitung einlaufenden Bücher, soweit sie überhaupt den Stoffkreis der Zeitschrift berühren, angezeigt. Eine ausführliche Besprechung der unverlangt einlaufenden Bücher behält sich die Schriftleitung vor. Eine Rücksendung kann in keinem Falle erfolgen.

Die Schriftleitung.

M. Pasch, Mathematik am Ursprung. Gesammelte Abhandlungen über Grundfragen der Mathematik. 149 S. Leipzig 1927, Meiner. Geh. RM 8.—.

Mathematischer Unterricht.

K. Falk, G. Rohrauer und K. Wais, Arithmetik und Geometrie für Deutsche und allgemeine Mittelschulen und verwandte Lehranstalten. I. Teil. 172 S. Wien 1926, Deutscher Verlag für Jugend und Volk.

W. Lietzmann, Aufbau und Grundlage der Mathematik (Ergänzungsheft 3 des Mathematischen Unterrichtswerkes). 89 S. Leipzig 1927, B. G. Teubner. Kart. RM 2.20.

—— und J. Jarosch, Mathematisches Unterrichtswerk für Mittelschulen. Rechenbuch für die I.—III. Klasse. 2. Aufl. 227 S. Wien 1927, Deuticke.

Naturwissenschaftlicher Unterricht.

Arend-Doermer, Grundzüge der Chemie und Mineralogie. Gesamtausgabe für Ober- und Unterstufe realer Lehranstalten. 14., nach den neuen Richtlinien und Lehrplänen umgearbeitete Auflage. 396 S. Leipzig 1927, Leopold Voß. Geb. RM 7.—.

Wiegner-Stephan, Technische Physik für Technische Lehranstalten zum Gebrauch in der Praxis. Band II. Wärme—Optik—Elektrizität. 3. Aufl. 350 S. Leipzig 1927, B. G. Teubner. Geb. RM 8.80.

Pädagogik, Philosophie, Allgemeines.

Kalender der deutschen Jugend. Deutscher Pestalozzi-Kalender 1928. Nürnberg, N. E. Sebald.

R. Lotze, Vererbung und Schule. Vortrag. 23 S. Stuttgart o. J. [1927], Holland & Josenhans. Geh. RM —.60.

W. J. H. Moll en H. C. Burger, Leerboek der Natuurkunde. II. Deel: Electrostatica, Magnetisme, stroomende electriciteit. S. 245—476. Groningen 1927, Noordhoff.

Lustige Ecke.

64. Riesenprimzahlen. $2^{89}-1$, $2^{107}-1$ und $2^{217}-1$ sind Primzahlen. In

$$10^{31}+1=11\cdot 909090909090909090909090909091$$

ist auch die letzte Zahl eine Primzahl. L.

65. Ein einfacher Resonanzversuch. Man setzt ein Fahrrad (Freilauf) auf einen Fahrradständer aus Stabeisen, wie solche jetzt wohl allgemein verbreitet sind. Durch Drehen am Pedal bringt man das Hinterrad in rasche Umdrehung; dann gleicht man, während diese Drehung fortdauert, zunächst die Schwankungen aus, die durch jene Hantierungen entstanden sind. Infolge der einseitigen Belastung des Hinterrades durch das Ventil entsteht nun während der Drehung eine Schwingung, auf die der Fahrradständer anspricht, und zwar liegt das Maximum der Resonanz bei einer ziemlich niedrigen Umdrehungszahl, so daß man die Entwicklung bequem verfolgen kann. Fast plötzlich hört sodann die Schwingung auf.

Beinah katastrophale Wirkung erreicht man, wenn man das Fahrrad, ohne jenen Ständer, verkehrt auf den Fußboden stellt, so daß es mit zwei Punkten der Lenkstange und dem hinteren Rand des Sattels aufliegt und die Sattelfedern auf die Schwingung ansprechen. Kerst.



Für die Schriftleitung verantwortlich: W. Lietzmann in Göttingen.

...eran eine Beilage betr. Janus-Kalender (Verlag von Aug. Heinr. Pusch in Potsdam), sowie Beilagen von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin, die der Beachtung der Leser empfohlen werden.
Druck von B. G. Teubner in Leipzig. Ausgegeben am 30. Dezember 1927

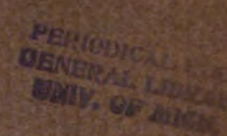
ZEITSCHRIFT FÜR MATHEMATISCHEN UND NATURWISSENSCHAFTLICHEN UNTERRICHT ALLER SCHULGATTUNGEN

BEGRÜNDET 1869 VON J. C. V. HOFFMANN



HERAUSGEGEBEN VON

H. SCHOTTEN und W. LIETZMANN
in Halle a. S. in Göttingen
unter Mitarbeit von
W. HILLERS
in Hamburg



58. JAHRGANG. 1927 · 10. HEFT



LEIPZIG · B. G. TEUBNER · BERLIN

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin

ZEITSCHRIFT FÜR MATHEMATISCHEN UND NATURWISSENSCHAFTLICHEN UNTERRICHT ALLER SCHULGATTUNGEN

Der Bezugspreis für diesen, 10 Hefte im Umfang von je 3 Bogen umfassenden Jahrgang (58. Band) beträgt für das halbe Jahr *RM* 10.—. Einzelhefte können in Zukunft nur von älteren Jahrgängen, soweit überzählig, geliefert werden. Bestellungen nehmen alle Buchhandlungen an, wie auch der Verlag von B. G. Teubner, Leipzig, Poststr. 3 (Postscheckkonto Leipzig 51272). Der Postbezug mußte aufgehoben werden, weil er sich als unvorteilhaft erwiesen hat.

Die Zeitschrift hat seit ihrem Bestehen auf dem Gebiete des höheren Schulwesens erfolgreich gewirkt. Sie hat trotz mancher nach ihrem Muster neugegründeter ähnlicher Organe ihre Bedeutung fortdauernd sich erhalten. Der Inhalt gliedert sich in folgende Abteilungen: I. Abhandlungen. Kleine Mitteilungen. Aufgabenrepertorium. II. Berichte aus der Forschung, über Organisation des Unterrichts, Methodik, Lehrmittelwesen, Versammlungen und Verhandlungen über Unterrichtsfragen. III Literarische Berichte: Besprechungen, Programm-, Zeitschriften- und Bücherschau.

Generalregister zu Bd. 1—32 d. Zeitschrift f. mathemat. u. naturwissenschaftl. Unterricht. Geh *RM* 6.—

Die Verfasser erhalten von größeren Aufsätzen 20, von Besprechungen, kleinen Mitteilungen usw. 5 Sonderabdrücke unentgeltlich und portofrei geliefert. Beiträge werden nach vorheriger Anfrage an den Herausgeber Oberstudiendirektor Dr. W. Lietzmann, Göttingen, Calsowstraße 18, solche naturwissenschaftlichen Inhalts an Professor Dr. W. Hillers, Hamburg 26, Saling 3, Rezensionsexemplare nur an die Verlagsbuchhandlung B. G. Teubner, Leipzig, Poststraße 3, erbeten. Unverlangt eingeschickte Arbeiten werden nur zurückgesandt, wenn Rückporto beigefügt ist. Eine Verpflichtung zur Besprechung oder Rücksendung unverlangt eingesandter Bücher wird nicht übernommen.

Anzeigenpreise: Die zweigespaltene Millimeterzeile *RM* —.34, 1/1 Seite *RM* 100.—, 1/2 Seite *RM* 55.—, 1/4 Seite *RM* 30.—

Anzeigenannahme durch B. G. Teubner, Leipzig, Poststr. 3

Inhaltsverzeichnis des 10. Heftes.

Fortsetzung auf der dritten Umschlagseite

Was ist Mathematik?

Von Wilhelm Ackermann in Göttingen.

Die folgenden Ausführungen beziehen sich nicht auf die Frage, wie man einem Nichtmathematiker oder jemandem, dem nur die Anfangsgründe der Mathematik geläufig sind, einen konkreten Überblick über die mathematischen Probleme und Methoden in möglichster Allgemeinheit geben kann.[1]) Es soll vielmehr versucht werden, für die Beschäftigung mit den mehr prinzipiellen Problemen, die die besondere Natur der mathematischen Gegenstände und das Eigentümliche der mathematischen Erkenntnis betreffen, eine gewisse Orientierung zu geben.

Bei der Schwierigkeit des Gegenstandes kann es sich im Rahmen eines kurzen Referates nur darum handeln, die am häufigsten vertretenen Ansichten zu skizzieren und für jede einen oder mehrere typische Vertreter zu nennen. Als Repräsentanten der einzelnen Auffassungen sind dabei durchweg nur Mathematiker oder solche Philosophen angegeben, die eine gründliche mathematische Durchbildung besitzen.[2])

Die herkömmliche Einteilung der Mathematik ist die in Analysis nnd Geometrie. Die Analysis beschäftigt sich mit den Zahlen, im weitesten Sinne des Wortes, während die Geometrie die Natur der räumlichen Gebilde untersucht. Es sei aber gleich bemerkt, daß diese Einteilung auf Vollständigkeit keinen Anspruch machen kann. Es gibt Disziplinen in der Mathematik, die sich weder speziell mit Zahlen, noch mit räumlichen Dingen befassen. Dahin gehört in gewissem Sinne schon die abstrakte Gruppentheorie und die allgemeine Körpertheorie. Beide sind zwar gerade durch ihre Fruchtbarkeit bei der Anwendung auf Analysis und Geometrie ausgezeichnet und haben sich historisch als ein Abstrakt aus diesen Gebieten ergeben, aber sie gelten ganz allgemein für Dinge, die gewissen axiomatisch festgelegten Verknüpfungsgesetzen genügen. Vor allem aber sind hier die abstrakte Mengentheorie und die mathematische oder symbolische Logik zu nennen. Die Mengentheorie besitzt ein besonders enges Verhältnis zur Logik, und die mathematische Logik erstrebt geradezu eine Behandlung von logischen Problemen mit Hilfe von mathematischen Methoden. Man muß also neben Analysis und Geometrie noch eine dritte Gruppe in der Mathematik unterscheiden, die wir, um einen kurzen Namen zu haben, als logische Gruppe bezeichnen wollen.[3])

---

1) Wer sich für diese Frage interessiert, sei auf das frisch und anregend geschriebene Büchlein von L. Heffter: „Was ist Mathematik? Unterhaltungen während einer Seereise" (Berlin, Theodor Fisher) hingewiesen.

2) Die hinter den Namen stehenden Zahlen weisen auf das am Schluß befindliche Literaturverzeichnis hin.

3) Von der Wahrscheinlichkeitsrechnung wollen wir hier infolge ihrer besonderen Stellung ganz absehen.

In der Analysis, der Lehre von den Zahlen unterscheidet man stufenweise die natürliche ganze Zahl, die positive oder negative ganze Zahl, die rationale Zahl, die allgemeine reelle Zahl und schließlich die komplexe Zahl. Alle die Erweiterungen des Begriffs der natürlichen Zahl oder der Anzahl lassen sich aber logisch auf diesen ursprünglichen Begriff zurückführen, oder sie lassen sich, wie man sagt, im Bereich der natürlichen Zahlen konstruieren. So erscheint die komplexe Zahl als ein Paar von reellen Zahlen, die reelle Zahl als eine Menge von rationalen Zahlen mit bestimmten Eigenschaften usw. Für unsere prinzipielle Betrachtung genügt es also, unter der Analysis die Lehre von den positiven ganzen Zahlen zu verstehen.

Wir werden im wesentlichen nur die verschiedenen Auffassungen des Anzahl- und Raumbegriffs wiedergeben. Bei der Stellungnahme zur logischen Gruppe interessiert uns nur, ob diese Gruppe als zur Logik gehörig eine Sonderstellung einnimmt oder ob sie in eine einheitliche Auffassung der Mathematik mit einbezogen wird. Die Frage nach dem Gegenstand der Logik soll als zu weitgehend nicht berücksichtigt werden.

Es sind nun im folgenden fünf typische Auffassungen zusammengestellt, die wir als *Intuitionismus, Formalismus, Logizismus, Empirismus* und *Konventionalismus* bezeichnen. Es ist natürlich mit dieser Aufstellung nicht gemeint, daß einer dieser Standpunkte immer rein vertreten wird. Oft werden Mittelstellungen eingenommen. Z. B. ist es sehr wohl möglich, daß in bezug auf die Zahlen die logische und bezüglich des Raumes die empiristische Auffassung vertreten wird.

1. Der Intuitionismus. Betrachten wir zunächst die intuitionistische Ansicht über die Analysis. Nach ihr ist die Zahlenlehre anschaulicher Natur. Wir schöpfen die Zahlen und ihre Beziehungen aus einem besonderen Anschauungsvermögen, das für die Mathematik charakteristisch ist. Unter dieser Anschauung wird aber keineswegs eine Sinnesanschauung verstanden, sondern eine reine, unserer Organisation eigentümliche Anschauung, die einer Kontrolle durch Experimente nicht unterliegt und einer solchen auch nicht bedarf. Aus dieser Anschauung ergeben sich mit Allgemeingültigkeit und Notwendigkeit die Sätze über die ganzen Zahlen. Die reine Anschauung der Zahlen wird dabei entweder so verstanden, daß das zeitliche Nacheinander eine besondere Rolle spielt. So ist es z. B. bei Kant. Andere wieder sind der Ansicht, daß die Zahl mehr mit der Raumanschauung zu tun habe. Der Zahlbegriff entsteht nach ihnen durch gleichzeitige Anschauung verschiedener, nebeneinander im Raume befindlicher Gegenstände. Eine dritte Auffassung endlich nimmt eine besondere Zahlenanschauung an, die unabhängig neben der Anschauung von Raum und Zeit besteht.

In jüngster Zeit wird das Wort Intuitionismus meistens in einem mehr speziellen Sinne gebraucht. Man bezeichnet damit die philosophische Auffassung über die Grundlagen der Analysis, deren Hauptvertreter Brouwer (4. 5.) und Weyl (30. 31.) sind. Für diese engere Gruppe von Intuitionisten ist charakteristisch, daß sie auch in der Logik nur einen Abstrakt aus der Mathematik sehen, und daß sie die logischen Prinzipien nur in dem Umfang anwenden wollen, wie sie, ihrer Meinung nach, sich direkt aus der Anschauung ergeben.

Ebenso wie der Intuitionismus in der Analysis die Grundsätze der Zahlenlehre aus der reinen Zahlenanschauung erklärt, so leitet er die geometrischen Grund-

sätze aus der reinen Raumanschauung her. Und zwar ist nach ihm die Euklidische Geometrie vor allen anderen Geometrien ausgezeichnet, indem ihre Grundsätze sich a priori, d. h. vor aller Erfahrung ergeben. Den nichteuklidischen und mehrdimensionalen Geometrien kommt keine reale Bedeutung zu. Sie sind bloße logische Konstruktionen, die nur den synthetischen, d. h. nicht logischen Charakter der Euklidischen Geometrie erweisen.

Für den intuitiven Standpunkt ist es prinzipiell gleichgültig, ob man nur die mathematischen Axiome aus der Anschauung entlehnt, oder ob man auch zuläßt, daß bei den mathematischen Beweisen immer wieder die Anschauung zu Hilfe gezogen wird. Für den uneingeschränkten Intuitionismus muß ferner das Problem der Widerspruchsfreiheit der Mathematik, d. h. der logischen Verträglichkeit der Axiome, entfallen. Die Anschauung verbürgt die unbedingte Zuverlässigkeit der mathematischen Überlegungen.

Die Disziplinen der logischen Gruppe, z. B. die abstrakte Mengenlehre, müssen bei dem Intuitionismus eine Sonderstellung einnehmen, denn es wird niemand behaupten können, daß wir eine reine Anschauung etwa der transfiniten Ordnungszahlen besitzen. Konsequenterweise könnten diese Wissenschaften, vom intuitiven Standpunkt gesehen, eigentlich gar nicht als Mathematik bezeichnet werden. Weyl und Brouwer, die eine selbständige Logik neben der Mathematik nicht anerkennen, lehnen daher die Mengenlehre in der durch Cantor geschaffenen Form überhaupt ab. Sie lassen nur eine „intuitionistische Mengenlehre" gelten.

Als Vertreter des Intuitionismus nennen wir außer Kant, Brouwer, Weyl noch Fries (13.) und Nelson (20. 21.).

2. Der Formalismus. Eine zweite Auffassung will die Mathematik nicht durch einen ihr eigentümlichen Gegenstand, sondern durch ihre formale Methode kennzeichnen. Diese Auffassung knüpft an die moderne Axiomatik an. Nach dieser braucht man sich in der Mathematik beim Beweis der Lehrsätze nicht darum zu kümmern, was die eingeführten Gegenstände, seien es Zahlen oder Punkte, Geraden, Ebenen usw. bedeuten. Dasselbe gilt für die Grundbeziehungen, z. B. die Beziehung: „x ist die auf y unmittelbar folgende ganze Zahl" oder die Beziehung „zwischen" in der Geometrie. Es kommt nur darauf an, daß zwischen den Grundbeziehungen und den Gegenständen oder Elementen die in den Axiomen ausgesprochenen Verknüpfungen bestehen. Man sagt, die Grundbeziehungen und die Elemente werden durch die Axiome implizit definiert. [Man vergleiche z. B. die ersten Seiten von Hilberts: „Grundlagen der Geometrie" (16.)]. — Der Formalismus sieht nun in dieser axiomatischen Methode das Wesen der Mathematik überhaupt. Während man an und für sich auch bei Anwendung der axiomatischen Methode noch fragen kann, welche Bedeutung den Zahlen oder Geraden usw. zukommt, lehnt der konsequente Formalismus eine derartige Fragestellung ab. Es wäre demnach Mathematik zu definieren als die Gesamtheit aller logischen Schlüsse, die aus der axiomatischen Festlegung über die Verknüpfung gewisser Grundbegriffe gezogen werden können. Die Mathematik ist für den Formalisten nichts anderes als ein großartiges Schachspiel. Die mathematischen Symbole für Zahlen, Punkte usw. sind die Steine des Schachspiels, die Axiome die Anfangsstellung und die logischen Schlußweisen die Spielregeln. Die Aufgabe der mathematischen Wissenschaft besteht darin, aus der Anfangsstellung gemäß den Spielregeln besonders interessante Kombinationen

abzuleiten. — Ihre eigentliche Vollendung erhält die formalistische Auffassung erst dadurch, daß auch die Logik einer rein formalen Behandlung unterworfen werden kann, und die logischen „Spielregeln“ durch rein formale Regeln über die Zusammensetzung von Symbolen ersetzt werden können. — Die einzige Forderung, die der Formalist an ein wissenschaftliches Lehrgebäude stellt, ist die der Widerspruchslosigkeit. Daß diese Forderung erfüllt ist, bedarf für ihn immer eines besonderen Nachweises.

Die Schwierigkeit der formalistischen Auffassung liegt darin, mit den Anwendungen der Mathematik, und sei es auch nur mit der Anwendung zum Zählen von Gegenständen, sich irgendwie abzufinden. Als Vorzüge hat sie dagegen aufzuweisen, daß sie eine einheitliche Auffassung der gesamten Mathematik ermöglicht, die allgemein genug ist, um auch eventuell neu entstehende mathematische Disziplinen einzuordnen.

An der angegebenen Schwierigkeit liegt es, daß der Formalismus selten rein vertreten wird; meistens ist er mit logizistischen oder konventionalistischen Tendenzen verknüpft. Wir finden den Formalismus namentlich vertreten bei symbolischen Logikern. Wenn z. B. B. Peirce die Mathematik definiert als „die Wissenschaft, die notwendige Schlußfolgerungen zieht“, so klingt das ganz formalistisch. Auch die Auffassung, die A. Voß vertritt, nähert sich wenigstens der formalistischen ziemlich stark. Für viele, namentlich für die um Brouwer und Weyl sich scharende Gruppe von Intuitionisten gilt Hilbert als der Typ eines Formalisten, meiner Ansicht nach nicht mit Recht. Man verwechselt hier wohl die formalistische, d. h. axiomatische Methode, als wissenschaftliches Untersuchungsprinzip, die von Hilbert in ausgedehntem Maße benutzt wird, und den Formalismus als letzte Ansicht über das Wesen der Mathematik überhaupt. Bei den Hilbertschen Untersuchungen über die Grundlagen der Arithmetik spielt aber gerade eine primitive, anschauliche Basis als Ausgangspunkt die Hauptrolle. Ein näheres Eingehen auf die eigenartige und für die Diskussion über den Zahlbegriff besonders wichtige Hilbertsche Neubegründung der Mathematik (17—19. 2. 3.) kann hier leider nicht gegeben werden.

3. Der Logizismus. Als logische Auffassung der Mathematik kann man in gewissem Sinne auch den Formalismus bezeichnen, hier wird aber der Logizismus in einem engeren Sinne verstanden. Nach der formalistischen Auffassung waren die Zahlen bloße Symbole, die nichts bedeuten. Die jetzt zu besprechende logische Auffassung sucht dagegen gerade eine tiefer eindringende Analyse des bedeutungsvollen Zahlbegriffs zu geben. Sie geht dabei aus von den Resultaten der durch G. Cantor geschaffenen Mengenlehre, bei der sich der Begriff der endlichen Anzahl als Spezialfall dem allgemeinen mengentheoretischen Begriff der Kardinalzahl einordnet. Das Ziel des Logizismus ist, die Eigenschaften der ganzen Zahlen auf rein logisch zu definierende Eigenschaften von Mengen zurückzuführen. Den ersten Vorstoß in dieser Richtung hat Dedekind (6) unternommen. Durchgeführt wurde diese logische Auffassung von G. Frege (11. 12.) und im Anschluß an ihn von B. Russell (27.). Nach Frege ist eine Zahl ein Prädikatenprädikat, das allen und nur solchen Prädikaten zukommt, für die die zugehörigen Mengen äquivalent sind. Die Arithmetik ist nach Frege ein Teil der Logik; die mathematischen Sätze stellen nur komplizierte logische Sachverhalte dar. Besondere arithmetische Axiome gibt es nicht mehr. Die bisher als Axiome bezeichneten logischen Sätze werden hier aus dem Zahlbegriff her-

aus bewiesen. Ist die logische Deutung der arithmetischen Sätze durchgeführt, so ist auch die Widerspruchlosigkeit der Analysis gesichert.

Der Frege schen Auffassung liegt das unbedingte Zutrauen auf die Verläßlichkeit der Logik zugrunde. In dieser Beziehung stellt er den schärfsten Gegensatz zu Brouwer und Weyl dar. Gemeinsam ist beiden, daß die scharfe Unterscheidung zwischen Mathematik und Logik aufgehoben wird. Bei Russell ist der Logizismus mit formalistischen Tendenzen verknüpft.

4. Der Empirismus. Die empiristische Auffassung der Mathematik hat mit der logischen das gemeinsam, daß die Mathematik ihren besonderen Charakter verliert und als spezieller Teil einer anderen Wissenschaft erscheint. Bei der logischen Auffassung war das die Logik, hier ist es die Naturwissenschaft oder genauer die Physik. Die mathematischen Wahrheiten sind von diesem Standpunkt aus nichts anderes als physikalische Hypothesen, die nach der induktiven Methode aus der Erfahrung abgeleitet werden und die einer Kontrolle und Berichtigung durch neue Erfahrungen jederzeit gewärtig sein müssen. Die Allgemeingültigkeit und Notwendigkeit, die sowohl die intuitionistische wie die logizistische Auffassung der Mathematik zuschreiben, erscheint hier als ein Irrtum, indem uns gewisse einfache mathematische Sätze dadurch, daß wir sie von frühster Kindheit an erfahren haben, gewissermaßen in Fleisch und Blut übergegangen sind.

In bezug auf die Analysis wird die empiristische Ansicht verhältnismäßig selten vertreten. Immerhin findet man sie z. B. bei Pasch (23.). Desto aktueller ist dagegen die Auffassung der Geometrie als Erfahrungswissenschaft. Nach dieser erscheinen z. B. die metrischen geometrischen Sätze als physikalische Beobachtungen über das Verhalten von Maßstäben, d. h. starren Körpern. Die Polemik des Empirismus richtet sich hauptsächlich gegen den Intuitionismus, bei dem ja die Euklidische Geometrie eine ausgezeichnete Stellung hat. Man weist hier einmal auf die Existenz der nichteuklidischen und der Meta-Geometrie hin. Ferner wird angeführt, daß die Anschauung ungenau sei und schon zu Irrtümern Veranlassung gegeben habe. Die stärkste Stütze findet die empiristische Auffassung darin, daß die moderne Physik ihren Betrachtungen in der sogenannten Relativitätstheorie ein nichteuklidisches geometrisches System zugrunde legt. Vom intuitionistischen Standpunkt aus hat Nelson (20. 21) die Stichhaltigkeit der empiristischen Einwände einer Untersuchung unterzogen. — Als Vertreter der empiristischen Ansicht, soweit sie die Geometrie betrifft, nennen wir Helmholz (14.), Einstein (9.) und Pasch (22.).

5. Der Konventionalismus. Den bisher dargestellten Auffassungen der Mathematik ist, wenn wir vom Formalismus absehen, gemeinsam, daß sie den mathematischen Sätzen einen wirklichen Erkenntnischarakter zuschreiben, mag nun die Quelle dieser Erkenntnis in der reinen Anschauung, der Sinnesanschauung oder der Logik liegen. Demgegenüber sieht eine fünfte Ansicht in den Zahlen und den geometrischen Gebilden nur eine schöpferische Erfindung des menschlichen Geistes, durch die er in das Vielfache der äußeren Erfahrung Ordnung bringt. Gegenüber der empiristischen Auffassung wird hier betont, daß die Erfahrung erst durch die mathematischen Grundsätze ihre Ordnung und Deutung findet, gegenüber dem Intuitionismus wird das Moment der Willkür in der Aufstellung der mathematischen Prinzipien hervorgehoben. Der Unterschied vom Formalismus liegt darin, daß man die reale Anwendbarkeit der mathematischen Sätze

als ordnende Prinzipien der Erfahrung betont, und gegenüber dem Logizismus erklärt man sich für den synthetischen Charakter der Mathematik.

Der Konventionalismus wurde z. B. von H. Poincaré (24.—26.) und wird in der Gegenwart von H. Dingler (7.—8.) vertreten. Die Auffassung Poincarés über die Zahlen, die nicht ganz klar ausgesprochen ist, scheint allerdings mehr zum Intuitionismus zu neigen. Hier greift er besonders die Logiker an. Er wirft ihnen vor, daß sie bei der Handhabung ihrer logischen Symbole, mit denen sie doch den Zahlbegriff erst erklären wollen, schon eine Reihe von primitiven mathematischen Sätzen anwenden. Desto deutlicher äußert sich der Konventionalismus bei Poincaré in seiner Auffassung der Grundlagen der Geometrie. Hier führt er des Näheren aus, daß die Erfahrung nie zur Begründung oder Kontrolle von geometrischen Grundsätzen dienen kann, da ja die aus der Erfahrung durch die induktive Methode gezogenen Schlüsse ganz verschieden ausfallen, je nachdem welche geometrischen Prinzipien zugrunde gelegt werden, und daß prinzipiell eine Naturerklärung auf Grund einer beliebigen Geometrie möglich ist. Ähnliche Gedankengänge verfolgt Dingler, der sich besonders mit dem Begriff des starren Körpers in der Geometrie befaßt. Aus dem Verhalten des starren Körpers sollte man ja nach dem Empirismus erst die im Raume geltende Metrik ableiten können. Dingler sucht zu begründen, daß umgekehrt die Annahme einer bestimmten Geometrie uns erst die Möglichkeit einer Realisation des starren Körpers gibt. — Die Auswahl der zugrunde gelegten mathematischen Prinzipien erscheint bei den Konventionalisten in gewissem Grade willkürlich, jedoch soll bei der Auswahl dieser Prinzipien vor allen Dingen das Moment der Einfachheit berücksichtigt werden. Aus diesem Grunde verteidigt denn auch Dingler hartnäckig die Euklidische Geometrie als das einfachste System von Konventionen, das aufgestellt werden kann. — Die Schwierigkeiten des Konventionalismus liegen darin, die innere psychologische Nötigung zu erklären, die den mathematischen Sätzen nun einmal anzuhaften scheint.

Literaturverzeichnis.

(Dieses Verzeichnis erhebt auf Vollständigkeit keinen Anspruch; es sollen hier nur einige Schriften und Aufsätze genannt werden, die sich für eine weitere Vertiefung in den Gegenstand zunächst eignen.)

1. R. Baldus, Formalismus und Intuitionismus in der Mathematik. Sammlung „Wissen und Wirken". Karlsruhe 1924.
2. P. Bernays, Über Hilberts Gedanken zur Grundlegung der Mathematik. Jahresber. d. Deutsch. Math.-Ver., Bd. 31. 1921.
3. ——, Die Bedeutung Hilberts für die Philosophie der Mathematik. Hilbert-Festschrift der Naturwissenschaften. 1922.
4. L. E. I. Brouwer, Intuitionism and Formalism. Bulletin of the Amer. Math., Soc. XX. 1913.
5. ——, Intuitionistische Mengenlehre. Jahresber. d. Deutsch. Math.-Ver., Bd. 28. 1919.
6. R. Dedekind, Was sind und was sollen die Zahlen? 3. Aufl. Braunschweig 1911.
7. H. Dingler, Die Grundlagen der angewandten Geometrie. Leipzig 1911.
8. ——, Relativitätstheorie und Ökonomieprinzip. Leipzig 1922.
9. A. Einstein, Geometrie und Erfahrung. Berlin 1921.
10. A. Fraenkel, Einleitung in die Mengenlehre. 2. Aufl. Berlin 1923.
11. G. Frege, Die Grundlagen der Arithmetik. Breslau 1884.
12. ——, Die Grundgesetze der Arithmetik. (Einleitung.) Jena 1893.
13. J. F. Fries, Die mathematische Naturphilosophie. Heidelberg 1822.

14. H. v. Helmholz, Über die Tatsachen, welche der Geometrie zugrunde liegen. Ges. Wiss. Abhandl., Bd. II. Leipzig 1883.
15. G. Hessenberg, Vom Sinn der Zahlen. Leipzig 1922.
16. D. Hilbert, Grundlagen der Geometrie. 5. Aufl. Leipzig 1922.
17. ——, Neubegründung der Mathematik. Abhandl aus d. math. Seminar d. Hamb. Universität 1922.
18. ——, Die logischen Grundlagen der Mathematik. Math. Ann., Bd. 88. 1922.
19. ——, Über das Unendliche. Math. Ann., Bd. 95. 1925.
20. L. Nelson, Bemerkungen über die nichteuklidische Geometrie und den Ursprung der mathematischen Gewißheit. Abhandl. d. Friesschen Schule. Neue Folge. 1. Bd., 3. Heft. 1906.
21. ——, Des fondements de la géométrie. (Abgedruckt in „Die Reformation der Philosophie".) Leipzig 1918.
22. M. Pasch, Die Begriffswelt des Mathematikers in der Vorhalle der Geometrie. Leipzig 1922.
23. ——, Der Ursprung des Zahlbegriffs. Teil I, Archiv d. Math. u. Phys. 1919. Teil II, Math. Zeitschr. Bd. 11. 1921.
24. H. Poincaré, Wissenschaft und Hypothese. 2. Aufl. Leipzig 1906.
25. ——, Der Wert der Wissenschaft. 2. Aufl. Leipzig 1910.
26. ——, Wissenschaft und Methode. Leipzig 1914.
27. B. Russell, Einführung in die mathematische Philosophie. München 1923.
28. A. Voß, Über das Wesen der Mathematik. 2. Aufl. Leipzig und Berlin 1913.
29. ——, Über die mathematische Erkenntnis. Kultur der Gegenwart. III. Teil. Abt. 1. 3. Lieferung. Leipzig 1914.
30. H. Weyl, Randbemerkungen zu Hauptproblemen der Mathematik. Math. Zeitschr. Bd. 20. 1924.
31. ——, Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik. Math. Zeitschr. Bd. 10. 1921.

Zur Geschichte der Nomographie.[1])

Von P. Luckey in Marburg a. L.

Mit 3 Figuren im Text.

Die Verwendung nomographischer Konstruktionsmittel reicht bis ins Altertum hinauf. Die von den Griechen in mannigfaltigen Formen ausgebildeten *Sonnenuhren* bestehen wie Nomogramme aus Scharen von bezifferten Kurven oder von bezifferten Punkten (also Leitern) und unterscheiden sich von den eigentlichen graphischen Rechentafeln nur dadurch, daß sie in eine bestimmte Lage zu Erde und Sonne gebracht werden müssen und daß als Ablesegerät oder „Weiser" der Schattenstrahl des Gnomons dient.

Die Griechen hatten aber auch schon eigentliche graphische Rechentafeln. Eine solche war das *„Analemma"* in der von Ptolomäus (um 150 n. Chr.) beschriebenen Form. Man stelle sich in kleinem Maßstabe auf der Ebene des Horizonts stehend die hohle Halbkugel des Taghimmels vor, mit Meridian, erstem Vertikal und den Parallelkreisbögen, die die Sonne an einzelnen Tagen des Jahres nach antiker Vorstellung durchläuft und denke sich an diesen Sonnenbahnen Teilstriche in den einzelnen Stundenpunkten angebracht und mit den

1) Dieser Aufsatz sollte ursprünglich das Schlußkapitel zu des Verfassers kürzlich erschienener „Nomographie, Prakt. Anleitung zum bewerten graph. Rechentafeln" (Math.-phys. Bibl. 59/60) bilden, die als selbständiges Doppelbändchen von erheblich erweitertem Inhalt an die Stelle der „Einführung in die Nomographie, II" getreten ist, mußte aber, um den Umfang nicht zu überschreiten, weggelassen werden.

Stundenzahlen beziffert. Diese Kreise samt ihren bezifferten Teilstrichen projiziere man nun durch parallele Strahlen senkrecht auf die Ebene des Meridians und klappe außerdem noch dieselben geteilten und bezifferten Kreise in diese Ebene um. Dann hat hat man die wesentlichen Teile dieser ptolemäischen Rechentafel, die also aus geraden und krummen, gleichförmigen und ungleichförmigen „Funktionsleitern" besteht. Unter diesen ist die Projektion der Sonnenbahn für die Tag- und Nachtgleichen eine echte Sinusleiter, was um so bemerkenswerter ist, als die Griechen statt des Sinus die Sehne als Funktion des Bogens benutzten. Die Rechnungen führte Ptolemäus durch Einstellungen eines platten, unbezifferten rechten Winkels und durch Abgreifungen mit einem Zirkel aus. War die Rechentafel einmal hergestellt, so wurde also, was Ptolemäus selbst hervorhebt, nichts mehr gezeichnet; es wurden nur noch Einstellungen mit den beiden Ablesegeräten vorgenommen. Bei den mit dem Analemma zu lösenden Aufgaben handelt es sich z. B. um die Bestimmung von Zenitdistanz und Azimut der Sonne in einer gegebenen Stunde eines gegebenen Tages für eine gegebene geographische Breite.[1]) In moderner Behandlung ist das die Berechnung eines schiefwinkligen sphärischen Dreiecks und führt auf Gleichungen mit vier Veränderlichen, wie den sphärischen Kosinussatz, für den ich in dem S. 455 genannten Büchlein eine nomographische Lösung gegeben habe.[2])

Ein anderes Nomogramm des Altertums ist *das ebene Astrolabium*. Es ist wohl zu unterscheiden von der auch als Astrolabium bezeichneten Armillarsphäre zur Bestimmung von Längen und Breiten der Gestirne, die Ptolemäus in seinem großen astronomischen Handbuch beschreibt. Das ebene Astrolab ist wie das Analemma eine Projektion von Himmelskreisen auf eine Ebene, doch ist es eine Zentralprojektion, und zwar die stereographische, deren Eigenschaften wir in der Schrift „Planisphärium" von Ptolemäus[3]) entwickelt finden. Von ihrem Südpol aus wird die Himmelskugel auf die Ebene projiziert, die sie im Nordpol berührt, und zwar stellt man zwei solcher Projektionsbilder her.

Auf dem *ersten* werden dargestellt: 1. der Himmelsäquator und die Wendekreise, 2. der Horizont und die ihm parallelen immer kleiner werdenden Kreise bis hinauf zum Zenit, die von 0^0 bis 90^0 bezifferten „Höhenkreise", 3. unter dem Horizont die Stundenlinien der Nacht, in antiker Weise jeden Sonnenlauf vom Untergang bis zum Aufgang in zwölf gleiche Teile teilend und von 1 bis 12 beziffert.

Das *andere* Projektionsbild enthält die Sonnenbahn (Ekliptik) mit ihren zwölf Tierkreiszeichen von je 30 Grad und eine Auswahl der bekanntesten Fixsterne.

1) Die bis in die Gegenwart immer wieder auftretenden Lösungen sphärischer Aufgaben durch Zeichnung gehen oft, ohne daß es den Autoren selbst bekannt ist, auf das Analemma zurück, so z. B. die dem „Sonnenstandsmesser" von H. Willig (Weinheim 1905, Fr. Ackermann) zugrunde liegende Konstruktion. Diese hat der Verfasser übrigens auch zu einem, allerdings umständlichen, nomographischen Verfahren weitergebildet, das zu einem Vergleich mit dem ptolemäischen anreizt. — Auch bei H. Stohler (diese Zeitschr., 58, 1927, S. 162—163), der den Zusammenhang mit dem Analemma scheinbar ablehnt, liegt die analemmatische Lösung des sphärischen Kosinussatzes durch Projektion und Umklappung vor.

2) Ausführlich habe ich das Analemma des Ptolemäus behandelt in den Astronomischen Nachrichten, Band 230, Nr. 5498, Sp. 17—46, Kiel 1927.

3) Das Planisphärium des Claudius Ptolemäus. Deutsche Übersetzung von J. Drecker. Isis IX, S. 255—278. Juni 1927.

Dadurch nun, daß wir das zweite Projektionsbild konzentrisch und um den Pol drehbar auf das erste legen, entsteht ein „Nomogramm mit beweglichen bezifferten Systemen". Das Instrument erinnert lebhaft an unsere drehbaren Sternkarten. Während sich aber bei diesen das den Sternhimmel darstellende Blatt *unter* dem Rahmensystem mit der Horizontöffnung dreht, ist beim Astrolabium die Reihenfolge umgekehrt. In der vereinfachten, ohne die Bezifferungen und Sternnamen wiedergegebenen Abbildung eines arabischen Astrolabs (Fig. 1a) erkennt man die *untere* Platte mit der Darstellung des Horizontsystems. Der größte der einander umgebenden bezifferten Höhenkreise ist der Horizont. Unten, auf der Nachtseite, sieht man die Stundenlinien. Der kleinere der beiden konzentrischen Kreise ist der nördliche Wendekreis, der größere der Äquator. Da für andere Polhöhen (Klimata) die Projektion dieses Horizontsystems anders ausfällt, liegt die Platte auswechselbar in einer flachen runden Metallkapsel.



Fig. 1a. Ebenes Astrolab. Vorderseite.

Darüber ist nun drehbar als Darstellung des Fixsternhimmels mit der Sonnenbahn (Ekliptik) die *„Spinne"* angebracht, eine vielfach durchbrochene Deckplatte. Die Spitzen der krummen Haken bezeichnen bestimmte Fixsterne.

Dreht man die Spinne im Uhrzeigersinne, so spiegelt das Gerät die tägliche Drehung des Fixsternhimmels relativ zum System des Horizonts wieder — die äußere Gradeinteilung kann zur Messung der Äquinoktialzeiten dienen —, und da man, im Gegensatz zu unseren unvollkommeneren drehbaren Sternkarten, die Sonne oder ein anderes Gestirn auch auf eine beliebige, in Graden angegebene *Höhe* über dem Horizont einstellen konnte, indem man es über den mit der betreffenden Gradzahl bezifferten Höhenkreis brachte, so ließen sich mit dem Instrument zahlreiche fundamentale Aufgaben der praktischen Himmelskunde zahlenmäßig lösen. In erster Linie stand die Aufgabe der Zeitbestimmung aus der Höhe des Gestirns, die vorher auf einem Teilkreis der Rückseite des Geräts (Fig. 1b) mit Hilfe eines diametralen, drehbaren Lochvisiers beobachtet wurde. (Daher auch der Ring, mit dem das Astrolab zum Zwecke der Beobachtung in einer mit der Hand zu haltenden Schnur hing.) Den Fixstern, dessen Höhe man nachts mit dieser Visiervorrichtung gemessen hatte, suchte man auf der „Spinne" auf und stellte ihn auf den betreffenden Höhenkreis, ent-

weder über dem Aufgangshorizont (links) oder über dem Untergangshorizont (rechts) ein. Nun wußte man aus einem auf der Rückseite befindlicheu graphischen Kalender, in welchem Zeichen die Sonne an dem betreffenden Tage stand und in welchem Grad dieses Zeichens. Die Stundenlinie, über der dieser Punkt der Ekliptik stand, gab dann die Nachtstunde an, wobei selbstverständlich meist eine einfache Einschätzung der Bruchteile stattzufinden hatte. Ebenso leicht konnte man aber auch am Tage die Uhrzeit aus der Höhe der Sonne bestimmen, ferner z. B. die Länge eines beliebigen Lichttages.[1])

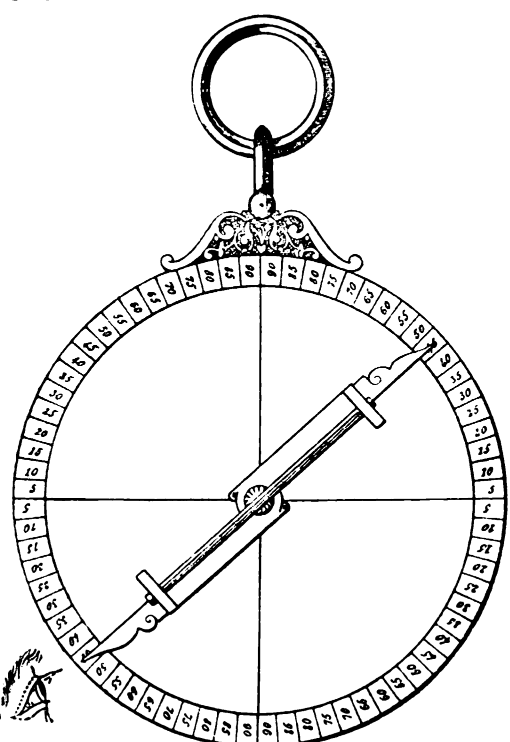


Fig. 1b. Ebenes Astrolab. Rückseite.

Schon die Griechen hatten das ebene Astrolabium mit allen seinen wesentlichen Teilen ausgebildet. Das erfahren wir aus der von dem Philosophen und Theologen Johannes Alexandrinus, genannt Philoponus um 550 n. Chr., abgefaßten kleinen Schrift über Gebrauch und Konstruktion des Astrolabs.[2]) Man erkennt beim Lesen dieses Werkchens, das nächst dem „Analemma“ von Ptolemäus wohl das älteste Denkmal praktisch-nomographischer Literatur ist, sich aber auf die Arbeiten einer weit älteren, schöpferischen Zeit gründet, daß das Astrolabium ein in verschiedenen Ausführungsformen verbreitetes, technisch gut durchgebildetes Instrument gewesen sein muß. Der Verfasser handelt u. a. von der Bezifferung der Gradleiter und

1) Das noch vor wenigen Jahrhunderten verbreitete ebene Astrolabium ist heute fast in völlige Vergessenheit versunken. Und doch verdiente es, auch jetzt noch in den Händen der Liebhaber der Himmelskunde und der lernenden Jugend eine Rolle zu spielen, die über diejenige der drehbaren Sternkarte weit hinausgeht. Die moderne Industrie könnte das Gerät einschließlich der Visiervorrichtung hinreichend genau viel billiger herstellen, als dies früher möglich war, und es ist wohl auf Absatz zu rechnen, wenn sich die Führer der Astronomiefreunde der Sache annehmen. Bei Herstellung aus Pappe könnte das eine System auf Zellhorn oder durchsichtigem Papier gedruckt werden. Natürlich müßten, um genauere Arbeit zu ermöglichen, wie früher mehrere auswechselbare „Klimata“ (Horizontplatten) beigegeben werden. Die antiken krummen Stundenlinien wären durch moderne radiale, die Zeichen und Grade des Tierkreises durch Monate und Tage zu ersetzen. Ferner wäre für eine Umrechnungsmöglichkeit der wahren Sonnenzeit in mitteleuropäische Zeit zu sorgen und endlich — für einen werbenden Namen, etwa „Sternenuhr“.

2) Den Text dieser Schrift gab H. Hase im Rheinischen Museum, 6, 1839, S. 127—171 heraus.

der Höhenkreise, er spricht von verschiedenen Teilstrichlängen, und wir erfahren, daß bei den genauesten Instrumenten die Teilstriche und Kreise von Grad zu Grad, bei anderen von 2 zu 2 oder von 3 zu 3 Grad eingetragen waren.

Die Araber, denen vielfach die erste Ausbildung des ebenen Astrolabiums fälschlich zugeschrieben wird, haben eine außerordentliche Betriebsamkeit in der Herstellung und weiteren Ausgestaltung dieser Geräte entfaltet, die dem frommen Moslem zur Bestimmung der Gebetsstunden dienten. Auch gelangten verwandte Geräte, wie die Universalscheibe, die zarqalische Scheibe und ferner die Quadranten zur Ausbildung, alles Instrumente, die ebenso wie die Sonnenuhren mehr und mehr zu einer allgemeinen Nomographie des sphärischen Dreiecks überleiten mußten. Diese Betätigung ging auf das Abendland über und fand im 16. und 17. Jahrhundert ihren Niederschlag in einer Masse von Schriften über Herstellung und Gebrauch des Astrolabiums.[1]) Auch im Entwurf der mannigfaltigsten Sonnenuhren und anderer Instrumente der angewandten Astronomie von ausgesprochen nomographischem Charakter[2]) traten die Mathematiker der Renaissance frischen Geistes das Erbe der Griechen und Araber an und bildeten die nomographische Kunst der bezifferten Netze und Leitern weiter aus. Noch heute kann man die graphischen Tafeln jener Gnomoniker mit ihren als Ablesegeräte dienenden Seidenfäden, oft mit verschiebbaren Perlen, bewundern. Peter Apian, d. h. Benewitz (1495—1552) war besonders eifrig in der Herstellung solcher „Instrumente", und sein Zeitgenosse Rheticus, der von der Originalität dieses Ingolstädter Professors anscheinend keine hohe Meinung hatte, sprach einmal in spottendem Doppelsinn von seiner „faden kunst".

Man wird fragen, ob denn nicht in älterer Zeit auch in anderen Anwendungsgebieten der Mathematik nomographische Methoden entwickelt wurden. Denn in der angewandten Astronomie stellt sich ja das nomographische Gefüge mehr oder weniger von selbst ein als Abbildung des Himmels mit seinem Netz bezifferter Kreise. Das graphische Kleid ist hier älter als die Rechnung, und ähnlich ist es bei den bezifferten Kurvenscharen der Kartenprojektionen, ganz zu schweigen von den einer späteren Zeit angehörigen magnetischen Deklinationslinien und den bezifferten Höhenkurven der Topographie, die sich überhaupt nicht auf eine Formel bringen lassen. Sehen wir uns nach alten nomographischen Methoden auf anderen Gebieten um, so können wir zunächst an die graphischen und mechanischen Lösungen denken, die die Griechen gewissen ihrer

---

1) In dem an prächtigen Abbildungen älterer und neuerer astronomischer Instrumente reichen Werke von Joh. A. Repsold, Zur Geschichte der astronomischen Meßwerkzeuge (Leipzig 1908, Wilhelm Engelmann), findet man neben einem schönen arabischen Astrolab ein solches von Regiomontan wiedergegeben. — Als prächtiges Quellenwerk, das uns den Übergang aus dem arabischen in das christliche Abendland miterleben läßt, nenne ich die auch die „Alphonsinischen Tafeln" enthaltenden „Libros del Saber del Rey D. Alfonso X de Castilla", herausgegeben von Don Manuel Rico y Sinobas I—V, Madrid 1863—67.

2) Vgl. meinen Aufsatz: Zur älteren Geschichte der Nomographie, Unterrichtsbl. f. Math. u. Naturw., **29**, S. 54—59, 1923 Nr. 5 u. 6. In dieser Arbeit wies ich zum erstenmal auf die Verwandtschaft der modernen Nomographie mit der alten Gnomonik hin und untersuchte aus dem Gesichtspunkt der Nomographie das „Quadratum horarium generale" des Regiomontan. M. d'Ocagne hat nunmehr zu meiner Arbeit Stellung genommen in dem Aufsatz: Le calcul nomographique avant la nomographie. Ann. de la Soc. scient. de Bruxelles, volume jubilaire, 1926, S. 55—66.

Natur nach algebraischen Problemen gaben, wie der Dreiteilung des Winkels und der Verdoppelung des Würfels. Aber diese verschiedenen Lösungen waren keine graphischen Rechentafeln, sondern graphische Einzelkonstruktionen und Mechanismen, denen die Kennzeichen des Nomogramms, bezifferte Leitern oder Linienscharen, fehlte. Und selbst wenn sich eigentliche nomographische Lösungen dieser algebraischen Aufgaben dritten Grades in der älteren Literatur nachweisen lassen sollten, bliebe die Tatsache bestehen, daß es Einzelleistungen wären, wie die astronomischen Nomogramme, die sich gerade dadurch verdächtig machen, daß sie verhältnismäßig kompliziert sind.

Es ist nämlich sehr die Frage, ob man aus dem Vorkommen dieser Einzelleistungen folgern darf, daß die allgemeine Aufgabe der Nomographie, so wie wir sie heute verstehen, voll und bewußt erfaßt war. Nach dem modernen Begriff der Nomographie ist die *Rechenaufgabe* mit veränderlichen Zahlen das ursprünglich gegebene, und zu dieser Rechenaufgabe, um nicht zu sagen „Formel", ist die graphische Tafel zu suchen. Wer von dieser Idee der Nomographie erfüllt ist, wird aber zunächst nicht zu den kompliziertesten Problemen greifen, sondern sich an die nomographische Lösung der elementarsten und am häufigsten vorkommen Aufgaben machen, die dem ausführenden Rechner bei numerischer Behandlung fort und fort Mühsal und Zeitverlust bereiten. Das sind aber *die Multiplikationen und Divisionen.*

Unser Suchen nach den Wurzeln der neuzeitlichen Nomographie spitzt sich also auf die konkrete Frage zu: *Wo treten die ersten Multiplikationstafeln auf*, d. h. die ersten Rechentafeln zu der Gleichung $\alpha = \beta \cdot \gamma$? Da die ältere Mathematik die Multiplikationen und Divisionen meist in die Form von Proportionen kleidet, können wir auch fragen: Wo finden sich die ersten Nomogramme zu der Gleichung $\alpha : \beta = \gamma : \delta$, aus der die vorige Multiplikationsformel als Sonderfall dadurch hervorgeht, daß man eine der vier Größen gleich 1 setzt?

Fig. 2. Werners Proportionaldreieck.

Eine in nomographischer Hinsicht sehr bemerkenswerte Erscheinung sind die sechs Bücher *„De Meteoroscopiis"*[1]) des nürnbergischen Priesters, Mathematikers und Astronomen Johannes Werner (1468—1528). In diesem Werke, das man als eine Nomographie der sphärischen Dreiecke mit zahlreichen Anwendungen auf Himmels- und Erdkunde bezeichnen kann, erfordert die 90. Proposition des dritten Buches die numerische Lösung einer Proportion mit unbekannter vierter Proportionale: $\alpha : \beta = \gamma : x$. „Zu ihrer leichteren Lösung und damit den in den Elementen der Arithmetik nicht genug Geübten keine Irrtümer unterlaufen" bringt Werner in der folgenden 91. Proposition ein besonderes „geradliniges Instrument", das „Proportionaldreieck" *ABC*, dessen Gerippe unsere Fig. 2 wiedergibt. Wir würden heute diese Rechentafel als ein beziffertes kartesisches Netz von Koordinatenparallelen gleichen Abstandes bezeichnen.

1) Herausgegeben von J. Würschmidt, Leipzig und Berlin 1913.

Der Verfasser beruft sich beim Richtigkeitsnachweis auf Euklid VI, 3, den Satz von einer Parallelen zu einer Dreiecksseite und seine Umkehrung. Um zu den Größen 45, 30, 100 die vierte Proportionale zu finden, legt man nach Werner ein Lineal durch den Nullpunkt C und den Punkt mit den Koordinaten 45, 30, wie wir heute sagen würden. Dieses Lineal schneidet dann die mit 100 bezifferte Ordinatenparallele im Punkt mit der Ordinate $66\,^2/_3$. Heute könnten wir dieses Nomogramm zu der Gleichung $\alpha : \beta = \gamma : \delta$ in die Gattung der *Fluchtentafeln mit drei Netzen* eingliedern.[1]) Das erste Netz ist auf einen Punkt $C \equiv (0, 0)$ reduziert und die beiden anderen Netze (α, β), (γ, δ) werden durch ein und dasselbe kartesische Netz dargestellt. Die Gleichung ist dann und nur dann erfüllt, wenn die Netzpunkte $(0, 0)$, (α, β), (γ, δ) auf einer Geraden liegen. Werner bemerkt übrigens auch, daß der Winkel CAB kein rechter zu sein braucht.

Ohne behaupten zu wollen, hiermit die älteste vorkommende Rechentafel zu der Proportion $\alpha : \beta = \gamma : \delta$ in dem noch wenig erforschten älteren Schrifttum entdeckt zu haben[2]), möchte ich auf diese Vorläuferin der modernen Multiplikationstafeln das Augenmerk lenken. Merkwürdig ist, daß man noch vor wenigen Jahren für den Gebrauch des Ingenieurs dieselbe, in großem Format ausgeführte Rechentafel herausgab, die doch sicher nicht den Wettbewerb mit dem kleinen logarithmischen Rechenschieber aushält, ebensowenig wie der von anderer Seite herausgebrachte „Nomograph", ein Instrument, dem ebenfalls diese Tafel als Prinzip zugrunde liegt.

Während Werner nur im Vorübergehen, aus Anlaß einer besonderen Aufgabe, sein Proportionaldreieck beschreibt, tauchen in der ersten Hälfte des 17. Jahrhunderts zwei nomographische Instrumente für die Proportion $\alpha : \beta = \gamma : \delta$ mit dem vollen Anspruch auf, als *allgemeine Rechengeräte* zu gelten. Es sind dies der Proportionalzirkel und der logarithmische Rechenschieber. Beiden war eine lange Geschichte und große Verbreitung beschieden.

Der *Proportionalzirkel*[3]), dessen Erfindungsgeschichte an Namen besten Klangs, wie Bürgi, Clavius, Galilei geknüpft ist, darf nicht mit dem gegenwärtig diesen Namen führenden *Zeichen*gerät verwechselt werden, das zum Abgreifen und gleichzeitigen Verkleinern oder Vergrößern von Strecken dient und früher Reduktionszirkel hieß. Wie dieses Zeichengerät aber und ebenfalls wie Werners Proportionaldreieck beruht der nomographische Proportionalzirkel auf Euklid VI, 3. Auf jedem seiner platten Schenkel (Fig. 3), die infolge der Gelenkreibung bei jeder Spreizung stehen bleiben, ist vom Nullpunkt ausgehend eine gleichförmige Leiter entworfen. Um die Proportion $5 : 2 = 8 : x$ zu lösen, greift man mit dem besonders erforderlichen Handzirkel, der als Ablesegerät dient, von einer dieser Leitern die Strecke

---

1) Vgl. z. B. P. Luckey, Nomographie, S. 81 (Math.-phys. Bibl. Nr. 59/60, Leipzig 1927).

2) Über Benutzung des Astrolabs zu Rechnungen siehe Eilhard Wiedemann, Einleitungen zu arabischen astronomischen Werken. Das Weltall 20, S. 131. Berlin 1920, Heft 15. Über Verwendung des Sinusquadranten zu Multiplikationen, Divisionen und Proportionsrechnungen bei Arabern siehe Eilhard Wiedemann, Beiträge zur Geschichte der Naturwissenschaften XVIII. Sitzungsber. d. phys.-med. Sozietät in Erlangen 41 (1909), S. 58.

3) Vgl. Michael Scheffelts Unterricht vom Proportionalzirkel, neue, mit einer historischen Einleitung versehene Auflage J. E. Scheibel, Breslau 1781.

$0 \rightarrow 2$ ab und gibt dem Proportionalzirkel dann eine solche Spreizung, daß die Öffnung des Handzirkels ($= 0 \rightarrow 2$) die Basis des gleichschenkligen Dreiecks 0; 5; 5 bildet. Die gesuchte Größe x greift man nun mit dem Handzirkel als Basis des gleichschenkligen Dreiecks 0; 8; 8 ab und findet ihren Zahlenwert $x = 3{,}2$ dadurch, daß man die Handzirkelöffnung auf einer der Leitern vom Nullpunkt aus absetzt.

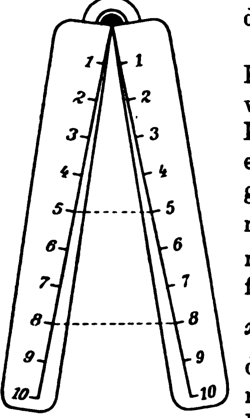


Fig. 3. Proportionalzirkel.

Von Anfang an wurde aber der Umfang der mit dem Proportionalzirkel ausführbaren Rechnungen dadurch wesentlich erweitert, daß man außer der gleichförmigen Leiter („linea arithmetica") auf jedem der Schenkel noch eine Anzahl weiterer, strahlenförmig vom Drehpunkt ausgehender Leitern anbrachte, wie z. B. für Flächenrechnungen die „linea geometrica" $x = \sqrt{\alpha}$, für Körperberechnungen die „linea solidorum" oder „linea cubica" $x = \sqrt[3]{\alpha}$, für trigonometrische Rechnungen die „linea chordarum" $x = 2 \sin \frac{\alpha}{2}$. Die *eindimensionale Anamorphose* war also da, und dieser wichtige Fortschritt darf uns nicht überraschen, da wir schon hundert Jahre vorher Werner Rechnungen an einer Doppelleiter ausführen sehen, von der die eine Teilung gleichförmig, die andere eine Sinusteilung ist. Man konnte also mit dem Proportionalzirkel grundsätzlich alle Gleichungen mit vier Veränderlichen α, β, γ, δ von der Form

$$f_1(\alpha) : f_2(\beta) = f_3(\gamma) : f_4(\delta)$$

auflösen. Die heute wie früher in der Technik weitaus am häufigsten vorkommenden Formeln sind von der Form

$$F_1(\alpha) \cdot F_2(\beta) \cdot F_3(\gamma) \ldots = 1$$

und lassen sich bei höchstens vier Veränderlichen auf die Form der obigen Proportion bringen. Ist die Zahl der Veränderlichen größer als 4, so läßt sich die Formel unter Einführung einer oder mehrerer Hilfsveränderlichen in Gleichungen von der Proportionsform zerlegen. Diese Gleichungen konnte man dann mit dem Proportionalzirkel lösen, wobei ein Zwischenergebnis (der Wert der Hilfsveränderlichen) nicht abgelesen zu werden brauchte, sondern als Spreizung des Handzirkels in die neue Rechnung eingehen konnte.

Der Proportionalzirkel, dessen Ausführung man besonders den Bedürfnissen der damaligen Militäringenieure anpaßte, hatte also ein großes Anwendungsfeld. Dieser Umstand und seine anschauliche geometrische Verständlichkeit läßt uns begreifen, daß er sich so stark verbreitete und daß im 17. und 18. Jahrhundert eine Flut von Schriften über ihn erschien.

Damit wird uns aber auch schon eher verständlich, warum das andere allgemeine Multiplikations- und Proportionsrechnungsgerät des 17. Jahrhunderts, *der logarithmische Rechenschieber*, etwa zwei Jahrhunderte gebrauchte, bis er den endgültigen Sieg über den besonders auf dem Festlande so fest eingenisteten Proportionalzirkel davontrug. Auf der von Edmund Gunter im Jahre 1620, also kurz nach den Anfängen der Briggsschen Zahlenlogarithmen, heraus-

gegebenen logarithmischen Leiter, der Gunters *Scale* der Engländer, wurden die Rechnungen anfangs ebenso wie auf dem Proportionalzirkel durch Abgreifen mit einem Zirkel ausgeführt. William Oughtred erfand dann bald darauf die Schieberform, und auch die weitere Ausgestaltung des Rechenstabes zu der heute verbreiteten Form erfolgte hauptsächlich in England und Frankreich, zum Teil erst im neunzehnten Jahrhundert.

Auch der Rechenschieber löst Gleichungen mit vier Veränderlichen von der obigen Form

$$f_1(\alpha) : f_2(\beta) = f_3(\gamma) : f_4(\delta).$$

Er löst sie genauer und bequemer als der Proportionalzirkel, nämlich mit einer einzigen Einstellung. Während aber auf jedem Proportionalzirkel für die Funktionen f_1, f_2, f_3, f_4 eine Auswahl von sechs und mehr Funktionen ohne weiteres zur Verfügung stand, war die Auswahl beim logarithmischen Schieber beschränkter, und selbst in seiner modernen Form sind auf der Vorderseite nur die Funktionen α und α^2 und ihre Reziproken vorhanden, wozu dann noch die bekannten Funktionen der Rückseite der Zunge kommen. Vielleicht ist es aber gerade diese Beschränkung, die neben seinen sonstigen Vorzügen, zu denen auch die überall gleiche relative Genauigkeit zählt, dem Rechenstab auf die Dauer zum Siege[1]) verhelfen mußte. Schon aus psychologischen Gründen sollte man eine Überlastung nomographischer Instrumente mit allzu mannigfaltigen Anwendungseinrichtungen vermeiden. Besser ist es da eben, für Sonderzwecke eigene Schieber mit anderen Funktionen f_1, f_2, f_3, f_4 herzustellen. Die Mannigfaltigkeit und Nützlichkeit solcher *Sonderschieber* habe ich wiederholt hervorgehoben.

Im neunzehnten Jahrhundert hat die Nomographie den *Franzosen* ihre wichtigsten Fortschritte zu verdanken. Es ist bezeichnend, daß die Revolutionsregierung in einem Artikel des Gesetzes vom Germinal des Jahres IV dekretierte: „An Stelle der Tabellen der Verhältnisse zwischen den alten und neu eingeführten Maßen sollen graphische Leitern hergestellt werden, um diese Verhältnisse ohne jede Rechnung abzuschätzen.“ Frankreich war ein günstiger Boden. Bildete doch die von der Revolution gegründete polytechnische Schule zu Paris, an der auch die darstellende Geometrie zur Entfaltung kam, viele Jahrzehnte lang das größte Kraftzentrum für die angewandte Mathematik. Seitdem Pouchet 1795 in seiner „Arithmétique linéaire“ die Tafeln mit gleichförmigem kartesischen Netz behandelt hatte, wurde die *Methode der Netztafeln* weiter und weiter ausgebildet und in der Praxis angewandt. Hatte man auch in dem alten Erbgute der Himmels- und Erdkartennetze, in den topographischen und magnetischen Karten bewußt oder unbewußt Vorbilder für Tafeln mit bezifferten Scharen, so wollte man doch jetzt mit vollem Bewußtsein *Rechen*tafeln entwerfen. Das bringt schon Pouchet klar zum Ausdruck, wenn er sagt: „Der Vorteil des graphischen Rechnens liegt in der Möglichkeit, schnell und ohne Feder, Papier und Tinte zu rechnen, da es gewissermaßen eine allgemeine Tabelle ausgeführter Rechnung darbietet . . . Diese Linienarithmetik kann allgemein werden wie das gewöhnliche Rechnen.“ Was Pouchet hier „graphisches

1) Ob es zu einem offenen Wettstreit zwischen Proportionalzirkel und Rechenstab gekommen ist, oder dieser kampflos das Erbe des ersteren angetreten hat, müßte erst untersucht werden.



Rechnen“ nennt, ist Nomographie. Unser heutiges „graphisches Rechnen“, d. h. die zeichnerische Lösung einer Aufgabe durch Ausführung der Einzelkonstruktion mit den jeweilig gegebenen Werten, bildete sich im 19. Jahrhundert aus, hauptsächlich im Anschluß an Cousinerys „Calcul par le trait“ (1839) und an die Wirksamkeit Culmanns in Zürich („Die graphische Statik“, Zürich 1866).

Eine wichtige Etappe in der Entwicklung der Nomographie bildete 1843 die Erfindung der *Anamorphose* (Verstreckung) der kartesischen Tafeln durch Lalanne, der übrigens vorschlug, seine geradlinigen Multiplikationstafeln an öffentlichen Stellen in Form von Plakaten anzuschlagen, um dem Volk das Multiplizieren und Dividieren zu ersparen. Ein Wendepunkt war 1884 die Umwandlung der geradlinigen Netztafeln in *Fluchtentafeln* durch M. d'Ocagne. Beide Fortschritte geben Beispiele dafür, wie man an der *Formung* der Rechentafeln arbeitete. Das theoretische Werkzeug bei dieser Arbeit wurden immer mehr die allgemeinen Prinzipien und Methoden, die die Analysis und die neuere Geometrie fertig darreichten. So kann man nach dem *Dualitätsprinzip* jede geradlinige Netztafel in eine Fluchtentafel verwandeln, und *projektive Transformationen* dienen dann dazu, den Fluchtentafeln wie auch den Netztafeln eine möglichst zweckmäßige Form zu geben. In den einfachsten und wichtigsten Fällen macht man von dieser projektiven Formbarkeit der Tafeln dadurch Gebrauch, daß man den nutzbaren Leiterstücken eine für die Genauigkeit und Schönheit des Nomogramms erwünschte Länge und Stellung gibt. Planmäßig untersucht man ferner heute eine Gleichung oder Formel auf ihre Darstellbarkeit durch die verschiedenen Tafeltypen, die durch „Schlüsselgleichungen“ gekennzeichnet sind. So hat der Amerikaner Gronwall 1912 die theoretischen Bedingungen dafür aufgesucht, daß eine Gleichung mit drei Veränderlichen *verstreckbar* ist, d. h. auf die Form der Schlüsselgleichung einer aus drei Geradenscharen bestehenden Netztafel oder einer aus drei Leitern bestehenden Fluchtentafel gebracht werden kann.

Von besonderer Wirkung war das 1899 erschienene Lehrbuch der Nomographie von M. d'Ocagne. Es bot eine treffliche Überschau der verschiedenen Methoden, die an der Hand ausgeführter Beispiele erläutert wurden. Es suchte ferner das Wesen eines Nomogramms in seiner Allgemeinheit zu erfassen und abzugrenzen. Klar prägte sich nun die Nomographie als besonderer Zweig der angewandten Mathematik heraus. Auch in der Schaffung eines Namens für diesen Wissenszweig kommt dies zum Ausdruck. Wer die berückende Wirkung würdigt, die ein neues Wort nicht nur auf die Massen ausübt, wird auch daran nicht vorübergehen. „Nomogramme“ nannte d'Ocagne die Rechentafeln auf Vorschlag von Fr. Schilling, damals in Göttingen, und so entstand das Kennwort „Nomographie“.

Das Werk von d'Ocagne kam einem Bedürfnis entgegen. Techniker aller Länder begannen nun eifrig, graphische Rechentafeln, insbesondere Fluchtentafeln, für alle möglichen Sonderformeln zu entwerfen. Die Hochflut dieser Betätigung entstand ebenso, wie es mit dem Eindringen der Radiobetätigung in weitere Kreise der Fall war, früher in Amerika und England als in Deutschland, wo aber schon lange vorher Männer wie Ch. A. Vogler, A. Adler, H. Fürle, F. Klein, F. Schilling, R. Mehmke, C. Runge schaffend und werbend für die graphischen Rechentafeln eingetreten waren. Wie die deutschen

Nomographen im 16. und 17. Jahrhundert der Konstruktion von ebenen Astrolabien, im 17. und 18. der Erfindung und Ausgestaltung der Proportionalzirkel oblagen, so entwerfen sie jetzt Netztafeln, Leitertafeln und Schieber. Aber in der Werkstatt des neuzeitlichen Ingenieurs begegnen und vereinigen sich diese nomographischen Arbeiten mit allen den Bestrebungen, die der gegenwärtigen Technik das Gepräge aufdrücken: Die Nomographie gliedert sich ein in die auf Grund exakter Untersuchungen erstrebte planmäßige Organisation der auf höchsten Wirkungsgrad eingestellten physischen und geistigen Arbeit. Allerdings ist das „Mechanisierung", aber eine solche, die Hand, Gehirn und Zeit frei macht für neue Aufgaben.

Die Formel, an deren nomographischer Bewältigung den Praktikern der Technik am meisten gelegen ist, ist die schon genannte Gleichung

$$F_1(\alpha) \cdot F_2(\beta) \cdot F_3(\gamma) \cdots = 1.$$

Meistens sind in ihr die Funktionen Potenzen der Veränderlichen, deren Exponenten kleine ganze positive oder negative Zahlen, wie ± 1, ± 2, ± 3 oder einfache Brüche wie $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ usw. sind. Man kann sagen, daß sich schon die ganze Nomographie der letzten 300 Jahre um die Bewältigung dieser Gleichung bemühte. Nachdem der Proportionalzirkel aus dem Wettbewerb ausgeschieden ist, bleiben noch Netztafeln, Fluchtentafeln und Schieber auf den Plan. Für Gleichungen mit einer größeren Zahl von Veränderlichen dürften wohl in Zukunft die zusammengesetzten Fluchtentafeln nicht so beliebt bleiben. Haben solche Gleichungen die oben genannte weitverbreitete Form, so kommen für die Lösung auch Schieber mit mehreren Zungen in Frage. Sind sie aber komplizierter gebaut, so bieten die *zweidimensionalen Tafeln mit beweglichen bezifferten Systemen* (die natürlichen Verallgemeinerungen der Rechenschieber auf die Ebene) viele fruchtbare Anwendungsmöglichkeiten. Für diese Nomogramme, zu denen schon das ebene Astrolabium zu rechnen ist, haben nach mancherlei älteren Vorarbeiten in jüngster Zeit besonders die Anregungen von W. Margoulis in Frankreich und W. Kretschmer in Deutschland eine allgemeinere Behandlung und die Anwendung auf technische Formeln angebahnt.

Es ist sehr wohl denkbar, daß jede der heutigen nomographischen Darstellungsformen an ihrem Platze lebensfähig ist, je nach Umfang und Natur der Herstellung und der Verwendung des Nomogramms, auch nach der Art von Personen, denen man es in die Hand gibt.

Zur Methodik der Elektrizitätslehre.

Von Rudolf Mayer in Berlin-Tempelhof.

Mit 8 Figuren im Text.

II. Abschnitt. (Fortsetzung von S. 418.)

Der Übergang zur Differentialdarstellung.

Die im I. Abschnitt gebrachte Elektrizitätslehre kann als Fernwirkungstheorie bezeichnet werden. Z. B. scheint bei dem Begriff der Spannung nur der Zustand in zwei voneinander entfernten Punkten maßgebend zu sein. Durch den Übergang von den primären Integralbegriffen zu den abgeleiteten gewinnen wir die Nahewirkungstheorie Maxwells.



Um die Bedeutung dieses Schrittes noch einmal klar zu machen, bringen wir als Ergänzung zu dem in der Einleitung gegebenen Beispiel zwei Fälle aus der Mechanik.

Übt man auf einen Stab eine bestimmte Zugkraft aus, so erfährt dieser eine Längenänderung. Die Kraft und die Längenänderung sind hier die primären Integralbegriffe, die beobachtete Proportionalität gibt das Elastizitätsgesetz in Integralform. Dadurch, daß man sich die Längenänderung längs der Achse des Stabes gleichmäßig verteilt denkt und die Längenänderung auf die Einheit der Länge, ferner die Kraft auf die Einheit des Stabquerschnittes bezieht, macht man sich von den besonderen Grenzbedingungen der ersten Beobachtung unabhängig, und gewinnt der Differentialbegriff der Elastizität als Eigenschaft des untersuchten Materials.

Als weiteres Beispiel sei erwähnt der Übergang von dem gemessenen Gewicht und Volumen eines Körpers auf das spezifische Gewicht und die Massendichte des Materials, aus dem der Körper besteht.

Mit Hilfe der so gewonnenen Begriffe Elastizität und Massendichte können wir die Differentialgleichungen elastischer Körper aufstellen und damit kompliziertere Fälle, wie Schwingungen elastischer Körper, Fortpflanzungen elastischer Wellen usw. exakt behandeln.

Derselbe Weg, der uns von dem Dehnungsversuch und der Gewichtsmessung zur Theorie elastischer Wellen führt, bringt uns in der Elektrizitätslehre von den im I. Abschnitt dargestellten Grundtatsachen zur elektromagnetischen Theorie des Lichtes.

Daß diese Entwicklung ohne wesentlich neues experimentelles Material erfolgen kann, soll im folgenden Abschnitt gezeigt werden.

Dabei wird außerdem die Gelegenheit benutzt, durch die Behandlung von Beispielen einige Beiträge zur praktischen Methodik zu bringen, die vielleicht für die unmittelbare Verwendung beim Unterricht von Wert sind.

1. Elektrostatik.

a) Feldgrößen.

Die an dem Plattenkondensator in Fig. 3 liegende Spannung E verteilt sich linear zwischen den beiden Platten. Dies kann experimentell durch Messung mit Sonden nachgewiesen werden. Wir definieren die Spannung pro Längeneinheit als die elektrische Feldstärke und schreiben

$$\mathfrak{E} = \frac{E}{l}. \tag{21}$$

Diese Größe ist ein polarer Vektor. — Weiter bezeichnen wir die Elektrizitätsmenge pro Flächeneinheit als die Flächendichte der Elektrizität oder als die elektrische Erregung

$$\mathfrak{D} = \frac{Q}{F}. \tag{22}$$

Diese Größe ist als Flächengröße ein axialer Vektor; eine anschauliche Bedeutung kommt ihr vorerst nur unmittelbar an den beiden leitenden Platten des Kondensators zu.

Wir können aber die elektrische Erregung als Zustandsgröße des isolierenden Mediums zwischen den beiden Platten ansehen, wenn wir uns dasselbe, wie in

Fig. 3 angedeutet, durch Flächen normal zur elektrischen Feldstärke in viele Schichten zerlegt denken. Die hypothetischen, einander bindenden Elektrizitätsmengen können dadurch realisiert werden, daß man bei ungeänderter Spannungsverteilung sehr dünne leitende Flächen in den Zwischenraum des Kondensators bringt. Doch ebenso, wie wir uns den Druck eines Gases auch ohne Manometer als eine Realität vorstellen können, denken wir uns die elektrische Erregung im Isolator als wirklich bestehend, ohne daß wir eine leitende Fläche an den betreffenden Punkt bringen, an der wir erst tatsächlich Elektrizitätsmengen beobachten können.

Wir schreiben den Integralssatz (2) mit Hilfe von (3) folgendermaßen

$$Q = CE = \varepsilon_0 \frac{F}{l} E \qquad (23)$$

oder

$$\frac{Q}{F} = \varepsilon_0 \frac{E}{l}. \qquad (23')$$

Durch Einführung der abgeleiteten Begriffe $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{D}$, Gleichung (21) und (22) folgt daraus das Grundgesetz der Elektrostatik

$$\mathfrak{D} = \varepsilon_0 \mathfrak{E}. \qquad (24)$$

Ist der Zwischenraum des Kondensators mit einem Material von der relativen Dielektrizität ε erfüllt, dann gilt entsprechend der Gleichung (3') die Gleichung

$$\mathfrak{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \mathfrak{E}. \qquad (24')$$

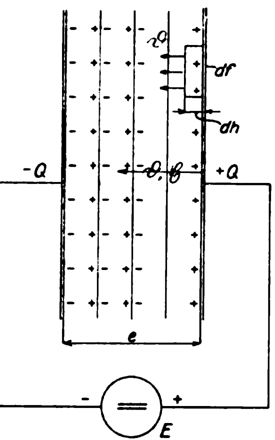


Fig. 3. Plattenkondensator.

Den Ausdruck (4), durch den der Energieinhalt des Plattenkondensators gegeben ist, wollen wir unter Benutzung von Gleichung (21) und (22) wie folgt umschreiben

$$A = \frac{\mathfrak{D}\,\mathfrak{E}}{2} Fl. \qquad (25)$$

Da Fl den Rauminhalt des Kondensators bedeutet, erhält man für die Energiedichte den Ausdruck

$$\mathfrak{A} = \frac{\mathfrak{D}\,\mathfrak{E}}{2}. \qquad (26)$$

Wir wollen der Vollständigkeit halber noch die Eigenschaften der elektrischen Feldgrößen mathematisch formulieren.

Da die Spannung zwischen zwei Punkten eines elektrostatischen Feldes eine eindeutige Größe ist, muß die elektrische Feldstärke als Gradient eines skalaren Potentialfeldes darstellbar sein. Es gilt also

$$\mathfrak{E} = -\nabla \varphi \qquad (27)$$

oder

$$\operatorname{rot} \mathfrak{E} = 0. \qquad (28)$$

Um eine allgemeine Charakterisierung für die elektrische Erregung zu erhalten, denken wir uns die Elektrizitätsmenge nicht flächenhaft, sondern räumlich auf den Kondensatorplatten verteilt, so daß wir von einer räumlichen Dichte ϱ der Elektrizitätsmenge sprechen können. Der in Fig. 3 gezeichnete kleine Zylinder mit der Grundfläche df und der Höhe dh enthält daher die Elektrizitätsmenge

$$dq = \mathfrak{D}\, df = (df\, dh)\, \varrho. \qquad (29)$$

Diesen Ausdruck können wir als den gesamten, durch die Oberfläche des kleinen Zylinders austretenden Fluß der elektrischen Erregung ansehen, da an der rechten Seite der Platte $\mathfrak{D} = 0$ ist und an den Mantelflächen des Zylinders die Linien parallel zur Begrenzung laufen.

Beziehen wir den Ausdruck (29) auf das eingeschlossene Volumen, so erhalten wir für die elektrische Erregung die Gleichung

$$\frac{\int \mathfrak{D}\, df}{df\, dh} = \operatorname{div} \mathfrak{D} = \varrho. \tag{30}$$

Im Isolator ist die Dichte der Elektrizität $\varrho = 0$; es gilt daher

$$\operatorname{div} \mathfrak{D} = 0. \tag{31}$$

b) Kugelkondensator.

Durch die Einführung der abgeleiteten Begriffe $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{D}$ sind wir in der Lage auch komplizierte Aufgaben zu lösen. Als Beispiel behandeln wir den Kugelkondensator (Fig. 4).

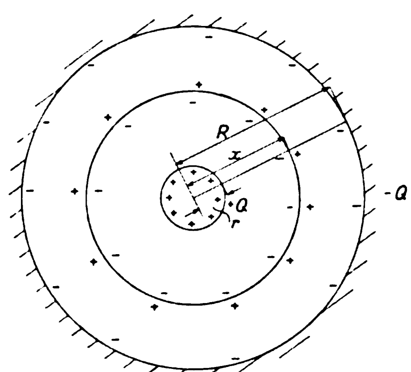


Fig. 4. Kugelkondensator.

Auf den beiden Kugelflächen mit den Radien R bzw. r lagere die Elektrizitätsmenge $\pm Q$. Aus Symmetriegründen sind die Flächen gleicher elektrischer Erregung konzentrische Kugelschalen. An der Stelle x hat die elektrische Erregung den Wert

$$\mathfrak{D}_x = \frac{Q}{4\pi x^2}. \tag{32}$$

Die elektrische Feldstärke ist daher

$$\mathfrak{E}_x = \frac{Q}{4\pi x^2 \varepsilon_0}. \tag{33}$$

Die Spannung, die zwischen den beiden Kugelflächen herrscht, errechnet sich durch Integration

$$E = \int_r^R \mathfrak{E}\, dx = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \int_r^R \frac{dx}{x^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right). \tag{34}$$

Die Kapazität des Kugelkondensators beträgt daher

$$C = \frac{Q}{E} = \frac{4\pi\varepsilon_0}{\frac{1}{r} - \frac{1}{R}}. \tag{35}$$

Wächst der Radius der Halbkugel gegen ∞, so nähert sich die Kapazität dem Wert

$$C = 4\pi\varepsilon_0 r. \tag{36}$$

c) Das Coulombsche Gesetz.

Die in Fig. 5 dargestellten Kugeln seien mit der gleich großen und entgegengesetzten Elektrizitätsmenge $\pm Q$ geladen. Wir berechnen zuerst die Spannung, die zwischen den beiden Kugeln besteht.

Die Erregung an der Stelle x der Verbindungsstrecke beträgt

$$\mathfrak{D}^x = \frac{Q}{4\pi x^2} + \frac{Q}{4\pi(a-x)^2}. \tag{37}$$

Die Feldstärke daher $$\mathfrak{E}_x = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(a-x)^2}\right). \tag{38}$$

Die Spannung zwischen den beiden Kugeln erhält man durch Integration dieses Ausdruckes

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_{\varrho}^{a-\varrho}\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(a-x)^2}\right)dy = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0}\,\frac{a-2\varrho}{\varrho(a-\varrho)}. \tag{39}$$

Die zwei geladenen Kugeln stellen einen Kondensator dar, dessen Energieinhalt durch die Beziehung

$$A = \frac{QE}{2} = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{a-2\varrho}{\varrho(a-\varrho)} \tag{40}$$

gegeben ist.

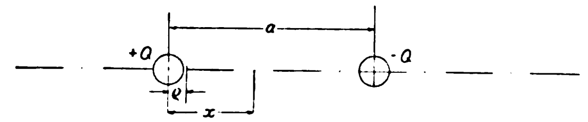


Fig. 5. Coulombsches Gesetz

Verkleinert man den Abstand a um da, so verkleinert sich der Energieinhalt unseres Kondensators auf Kosten der geleisteten mechanischen Arbeit um

$$dA = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{(a-\varrho)^2}\,da = K\,da. \tag{41}$$

Die Kraft, mit der sich die beiden Kugeln anziehen, beträgt daher bei Vernachlässigung von ϱ gegen a

$$K = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{a^2}. \tag{42}$$

In analoger Weise läßt sich die abstoßende Kraft zweier gleich geladener Kugeln berechnen. Hier müssen wir aber die beiden Kugeln als Pol eines Kondensators auffassen, dessen zweiter, die ∞ ferne Hüllkugel, die entsprechende Gegenladung $2Q$ trägt.

d) Das Verhalten der Feldgrößen an Trennungsflächen.

Auf Fig 6a ist ein Plattenkondensator dargestellt, dessen Innenraum durch eine zu den Platten parallele Fläche in zwei Gebiete verschiedener Dielektrizitätskonstante (ε_1 und ε_2) geteilt ist.

Legt man an den Kondensator eine Spannung, so strömt zu den Platten eine Elektrizitätsmenge. Aus der Eindeutigkeit dieser Elektrizitätsmenge folgt, daß der aus ihr abgeleitete Vektor der elektrischen Erregung $\mathfrak{D} = \frac{Q}{F}$ zwischen den beiden Platten konstant bleibt. Den beiden Dielektrizitätskonstanten entsprechend sind die notwendigen elektrischen Feldstärken

$$\mathfrak{E}_1 = \frac{\mathfrak{D}}{\varepsilon_0\varepsilon_1} \quad \text{bzw.} \quad \mathfrak{E}_2 = \frac{\mathfrak{D}}{\varepsilon_0\varepsilon_2}.$$

Wir verallgemeinern:

Beim Übergang von einem isolierenden Medium mit der relativen Dielektrizität ε_1 in eines von der Dielektrizität ε_2 ändert sich, falls die Trennungsfläche normal zu den Feldlinien steht, die elektrische Feldstärke im Verhältnis $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$, während die elektrische Erregung konstant bleibt.

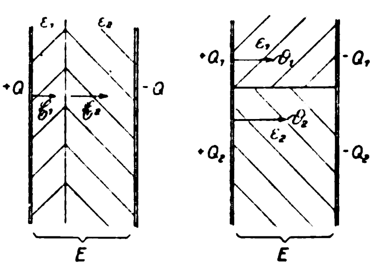


Fig. 6a. Fig. 6b.
Plattenkondensator mit verschiedenen Dielektriken.

Der Plattenkondensator in Fig. 6b sei durch eine Fläche normal zu den Platten in zwei Gebiete verschiedener Dielektrizität geteilt. Wegen der Eindeutigkeit der angelegten Spannung muß hier die Feldstärke $\mathfrak{E} = \frac{E}{l}$ für beide Gebiete gleich sein. Dementsprechend sind die elektrischen Erregungen

$$\mathfrak{D}_1 = \varepsilon_0 \varepsilon_1 \mathfrak{E} \quad \text{bzw.} \quad \mathfrak{D}_2 = \varepsilon_0 \varepsilon_2 \mathfrak{E}.$$

Wir verallgemeinern wieder:

Verläuft die Trennungsfläche parallel zur Richtung der Feldlinien, so ändert sich die elektrische Erregung beim Übergang vom Medium I in das Medium II im Verhältnis $\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$, während die elektrische Feldstärke unverändert bleibt.

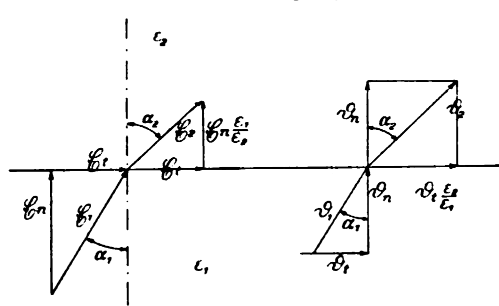


Fig. 7. Brechungsgesetz für elektrische Vektoren.

Stehen die Feldstärken unter einem Winkel α_1 gegen die Normale der Trennungsfläche, (Fig. 7), so folgt aus den obigen Sätzen, daß beim Übertritt vom Medium I in das Medium II die Normalkomponente der elektrischen Feldstärke sich im Verhältnis $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$ ändert, während die Normalkomponente der elektrischen Erregung konstant bleibt, — daß dagegen die Tangentialkomponente der elektrischen Feldstärke konstant bleibt, während sich die Tangentialkomponente der elektrischen Erregung im Verhältnis $\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$ ändert.

Daraus folgt unmittelbar das Brechungsgesetz für die Feldlinien zu

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}. \tag{43}$$

(Vgl. Fig. 7.)

Das Verhalten der Normalkomponenten ist anschaulich gegeben durch die Eindeutigkeit der Flächendichte der Elektrizitätsmengen, das der Tangentialkomponenten durch die Eindeutigkeit der Spannung zwischen zwei Punkten der Trennungsfläche.

Aus der hier gebrachten Darstellung erkennt man, daß sich das Verhalten der Feldgrößen an Trennungsflächen auch ohne die üblichen Hilfsbegriffe der freien Elektrizität erklären läßt.

2. Elektrodynamik.

a) Das Ohmsche Gesetz.

Aus den Integralsätzen (10) und (11) des I. Abschnittes entwickeln wir den entsprechenden Differentialsatz, indem wir die abgeleiteten Begriffe

Stromdichte $\mathfrak{i} = \frac{J}{F}$ und die elektrische

Feldstärke $\mathfrak{E} = \frac{E}{l}$ einführen.

Beide Größen sind Vektoren. — Wir formen dann (10) mit Hilfe von (11) um

$$E = RJ = \mathfrak{E} l = \varrho \frac{l}{F} \mathfrak{i} F. \tag{10'}$$

Dann folgt das Ohmsche Gesetz in Differentialform

$$\mathfrak{E} = \varrho \mathfrak{i}. \tag{44}$$

b) Die magnetischen Feldgrößen.

Für die Ableitung der Differentialform des Induktionsgesetzes gehen wir vom Ausdruck (18) des I. Abschnittes aus.

$$\int \frac{E_m dt}{wF} = \mu_0 \left(\frac{wJ}{l}\right). \tag{18}$$

Den eingeklammerten Ausdruck auf der rechten Seite bezeichnen wir als die magnetische Feldstärke

$$\mathfrak{H} = \frac{wJ}{l}. \tag{45}$$

Die Größe ist als die Amperewindungszahl (magnetische Spannung), die auf die Einheit der Windungslänge unseres Toroids entfällt, ein polarer Vektor. Der Ausdruck der linken Seite bedeutet das für die magnetische Energie aufgewendete Spannungszeit-Integral, bezogen auf eine Windung und auf die Einheit der Windungsfläche. Wir nennen diese Größe die magnetische Induktion

$$\mathfrak{B} = \int \frac{E_m dt}{wF}. \tag{46}$$

Die Induktion ist als Flächenvektor ein axialer Vektor, dessen Richtung mit der der magnetischen Feldstärke zusammenfällt.

Durch Einführung der beiden Feldgrößen zerfällt der Ausdruck (18) für das Induktionsgesetz in zwei Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} &\mathfrak{B} = \mu_0 \mathfrak{H} \\ &\mathfrak{B} = \int \frac{E_m dt}{wF} \quad \text{bzw.} \quad \frac{d\mathfrak{B}}{dt} = \frac{E_m}{wF}. \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

Die eingeführten Größen gewinnen als Zustandsgrößen des magnetisierten Raumes Anschaulichkeit, wenn man sich den Innenraum der Ringspule in kleine Röhren zerlegt denkt, auf deren jede die gleiche Umlaufspannung wirkt wie auf die Gesamtspule. Die elementaren Umlaufsströme und -Spannungen heben sich im Innern auf, so daß nur die Grenzwerte meßbar bleiben.

Physikalisch anschaulich wird diese Loslösung von den Grenzbedingungen durch die Möglichkeit, das Spannungs-Zeit-Integral durch das die Induktion definiert ist, an jeder Stelle eines magnetischen Raumes mit Hilfe einer kleinen Prüfspule zu messen. Ebenso gelingt es, den magnetischen Spannungsabfall zwischen zwei beliebigen Raumpunkten und damit auch die magnetische Feldstärke, durch einen Rogowskischen Spannungsmesser der Anschauung näher zu bringen.

Es bleibt noch übrig, den durch die Gleichung (45) und (46) gegebenen Beziehungen eine allgemeine mathematische Form zu geben. Die Aufgabe bietet prinzipiell nichts Neues; wir wollen uns daher damit begnügen, das Resultat mitzuteilen.

Für den räumlichen Zusammenhang zwischen beliebigen Strömen und der dazugehörigen Feldstärke — Gleichung (45) — erhält man die Vektorgleichung

$$\operatorname{rot} \mathfrak{H} = \mathfrak{i}. \tag{48}$$

Analog gilt für die magnetische Induktion entsprechend der Gleichung (46)

$$-\operatorname{rot} \mathfrak{E} = \frac{\partial \mathfrak{B}}{dt}. \tag{49}$$

Die größte Leistungsfähigkeit der Maxwellschen Lehre zeigt sich in ihrer Anwendbarkeit auf Strahlungserscheinungen; diese ist durch die Annahme möglich geworden, daß der Verschiebungsstrom in seinen magnetischen Wirkungen dem Leitungsstrom gleichzusetzen ist. Wir bringen diese Annahme in der Gleichung (48) dadurch zum Ausdruck, daß wir zu der Leitungsstromdichte $\mathfrak{i}$ noch das Glied $\frac{\partial \mathfrak{D}}{dt}$ für die Verschiebungsstromdichte hinzufügen

$$\operatorname{rot} \mathfrak{H} = \mathfrak{i} + \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t}. \tag{50}$$

Wir wollen noch die allgemeinen Ausdrücke für die Energiedichte und für die Energiestrahlung ableiten.

Gleichung (14) für den Energieinhalt des Toroids läßt sich mit Hilfe der Gleichungen (17) und (45) auf folgende Weise umformen.

$$A = L\frac{J^2}{2} = \frac{\mu_0}{2}\frac{w^2 F}{l}J^2 = \frac{\mu_0}{2}\left(\frac{wJ}{l}\right)^2 Fl = \frac{\mu_0 \mathfrak{H}^2}{2}Fl. \tag{51}$$

Da Fl das Volumen des Toroids bedeutet, folgt für die Energiedichte

$$\mathfrak{A} = \frac{\mu_0 \mathfrak{H}^2}{2} = \frac{\mathfrak{B}\mathfrak{H}}{2}. \tag{52}$$

Die Zunahme der inneren Energie unseres Toroids, die gleich der zugeführten Arbeit ist, können wir folgendermaßen ausdrücken

$$dA = EJdt = \left(\frac{E}{wu}\right)\left(\frac{wJ}{l}\right)uldt = [\mathfrak{E}\mathfrak{H}]\,uldt, \tag{53}$$

wobei u den Umfang einer Windung bedeutet. ul ist also die gesamte Oberfläche des Toroids, durch die der Energiebetrag dA eintritt. Das Produkt

$$\mathfrak{S} = [\mathfrak{E}\mathfrak{H}] \tag{54}$$

gibt also die Energie an, die in der Zeiteinheit durch die Einheit der Oberfläche unseres Toroids eintritt. $\mathfrak{S}$ wird als der Poyntingsche Strahlungsvektor bezeichnet.

c) Kraftwirkungen.

Als Beispiel für die Anwendung der abgeleiteten Begriffe sei die Kraftwirkung auf einen Stromleiter im magnetischen Feld berechnet.

In einem homogenen Magnetfeld von der Stärke $\mathfrak{B}$, wie es z. B. im Luftspalt eines Elektromagneten mit großer Windungsfläche realisierbar ist, befindet sich eine rechteckige Schleife, deren eine Seite (l) verschiebbar angeordnet ist (Fig. 8).

Die Schleife führt den Strom J. Wird nun die bewegliche Seite in der Zeit dt um eine Länge ds verschoben, so entsteht an den Klemmen nach Gleichung (47) eine Spannung

$$E = \mathfrak{B} l \frac{ds}{dt}. \tag{55}$$

Die entsprechende Arbeit beträgt

$$dA = EJdt = J\mathfrak{B}lds = Kds. \tag{56}$$

Die Kraft, die auf die Länge der Schleife wirkt, erhält man daraus zu

$$K = \mathfrak{B}Jl. \tag{57}$$

Fig 8. Stromleiter im Magnetfeld.

Je nach der Bewegungsrichtung wird die Arbeit nach Gleichung (56) von der Stromquelle, an die die Schleife angeschlossen ist geliefert oder an dieselbe abgegeben. Daraus läßt sich die Richtung der Kraft bestimmen.

Gleichung (57) kann man benutzen, um die Kraftwirkung zweier paralleler Stromleiter aufeinander zu berechnen.

Das Magnetfeld um einen Strom J beträgt in der Entfernung δ

$$\mathfrak{B} = \mu_0 \frac{J_1}{2\pi\delta}. \tag{58}$$

Es wirkt daher an dieser Stelle auf die Länge l eines Leiters mit dem Strom J_2 die Kraft

$$K = \mu_0 \frac{J_1 J_2}{2\pi\delta} l. \tag{59}$$

d) Verhalten der magnetischen Vektoren an Trennungsflächen.

Als letztes Beispiel für das Rechnen mit den abgeleiteten Begriffen wollen wir noch das Verhalten der magnetischen Vektoren an den Trennungsflächen verschiedener Medien behandeln.

Der Innenraum der Ringspule (vgl. Fig. 2) sei durch Trennungsflächen, die normal zu der magnetischen Feldstärke stehen, in zwei Gebiete verschiedener Permeabilität μ_1 und μ_2 geteilt. Legt man an die Wicklung des Toroids eine Spannung E, so wird der Strom entsprechend der Selbstinduktion der Spule ansteigen. Wegen der Eindeutigkeit der an den Windungen liegenden Umlaufsspannung muß die daraus abgeleitete Induktion $\mathfrak{B}$ längs der ganzen Windungslänge einen bestimmten Wert haben. Dementsprechend wird die auf die

Einheit der Windungslänge entfallende Ampere-Windungszahl, d. i. die magnetische Feldstärke, in den zwei Medien verschieden sein.

$$\mathfrak{H}_1 = \frac{\mathfrak{B}}{\mu_0 \mu_1} \quad \text{bzw.} \quad \mathfrak{H}_2 = \frac{\mathfrak{B}}{\mu_0 \mu_2}. \tag{60}$$

Wir verallgemeinern:

Beim Übergang von einem Medium I (μ_1) in das Medium II (μ_2), deren Trennungsfläche normal zu den Feldlinien steht, ändert sich die magnetische Feldstärke im Verhältnis $\frac{\mu_1}{\mu_2}$, während die magnetische Induktion konstant bleibt.

Wird nun der Innenraum unserer Ringspule durch eine Fläche geteilt, die längs der Windungslänge, also in Richtung der Feldlinien verläuft, so muß wegen der Eindeutigkeit der magnetomotorischen Kraft zwischen zwei Punkten der Trennungsfläche die magnetische Feldstärke in beiden Gebieten dieselbe sein

$$\mathfrak{H} = \frac{wJ}{l}. \tag{61}$$

Dementsprechend sind die Induktionswerte

$$\mathfrak{B}_1 = \mu_0 \mu_1 \mathfrak{H} \quad \text{bzw.} \quad \mathfrak{B}_2 = \mu_0 \mu_2 \mathfrak{H}. \tag{62}$$

Verallgemeinert:

Beim Übergang vom Medium I in das Medium II ändert sich also, falls die Trennungsfläche in Richtung der Feldlinien verläuft, die Induktion im Verhältnis $\frac{\mu_2}{\mu_1}$, während die magnetische Feldstärke unverändert bleibt.

Die Verallgemeinerung für den Fall, daß die Trennungsfläche unter einem Winkel zu den Feldlinien verläuft, liefert genau dieselbe Regel wie für die elektrischen Vektoren (vgl. S. 470).

An Stelle der elektrischen Feldstärke ist die magnetische zu setzen, statt der elektrischen Erregung die magnetische Induktion, und statt des Verhältnisses der Dielektrizitätskonstanten das der Permeabilitätskonstanten.

Das Verhalten der Normalkomponenten wird beim Magnetismus anschaulich gemacht durch die Eindeutigkeit der Umlaufsspannung, das der Tangentialkomponenten durch die Eindeutigkeit der magnetischen Kraft. (Amperewindungen.)

Ein grundlegender Unterschied kann jedoch zwischen der magnetischen und elektrischen Feldgröße schon durch die Anschauung des Plattenkondensators und der Ringspule festgestellt werden. Während die elektrischen Vektoren an geladenen Leitern entspringen und verschwinden, verlaufen die magnetischen Linien geschlossen. Es gibt im Magnetismus weder ein Analogon für den elektrischen Leiter, noch für die Elektrizitätsmenge.

Schlußwort.

Der weitere Ausbau der Maxwellschen Theorie mit Hilfe der abgeleiteten Begriffe soll an dieser Stelle nicht weiter durchgeführt werden. Der Zweck der vorliegenden Arbeit war ja nicht der, eine Einführung in die Maxwellsche Theorie zu geben, sondern die Richtlinien anzudeuten, nach denen beim Unterricht der Elektrizitätslehre die Begriffsbildung am zweckmäßigsten erfolgen soll. Durch die in den meisten Lehrbüchern gewählte Darstellungsweise besteht ge-

rade bei der Elektrizitätslehre die Gefahr, daß der Zusammenhang der anschaulichen primären Integralbegriffe (Spannung, Strom) mit den abgeleiteten Begriffen der mathematischen Theorie verloren geht. Der Verlust dieses Zusammenhanges ist gleichbedeutend mit Gedankensprüngen in der Entwicklung des Lehrgebäudes, die dem kritischen Studierenden ein unangenehmes Gefühl bereiten. Ich glaube, daß es dem Unterrichtenden mit Hilfe einer Darstellung, die der hier angedeuteten ähnlich ist, leichter fallen wird, solche unangenehmen Gedankensprünge zu vermeiden.

Am Schluß sei noch darauf aufmerksam gemacht, daß bei den Entwicklungen dieser Arbeit gar nicht die Versuchung aufgetreten ist, von den sogenannten „absoluten Maßsystemen“ Gebrauch zu machen.

Es ist schon an vielen Stellen[1]) darauf hingewiesen worden, daß ein Festhalten an den historischen absoluten Maßsystemen für die wissenschaftliche Forschung überflüssig, für den Unterricht aber schädlich ist. Diese Stimmen scheinen aber wenig beachtet zu sein, denn in den meisten modernen Lehr- und Handbüchern sind noch immer lange Abhandlungen über die verschiedenen Maßsysteme zu finden.

Daß die Notwendigkeit dafür nicht vorliegt, dürfte vielleicht aus der vorliegenden Schrift hervorgegangen sein.

Kleine Mitteilungen.

Zur stereographischen Projektion. (Mit 1 Figur im Text.) Die Eigenschaft der stereographischen Projektion, winkeltreu und „kreistreu“ zu sein (Kreise wieder als Kreise abzubilden) führt auf die Frage, ob es noch andere derartige Abbildungen der Kugel gibt, und ob solche, wenn vorhanden, in Beziehung stehen zur stereographischen Karte.

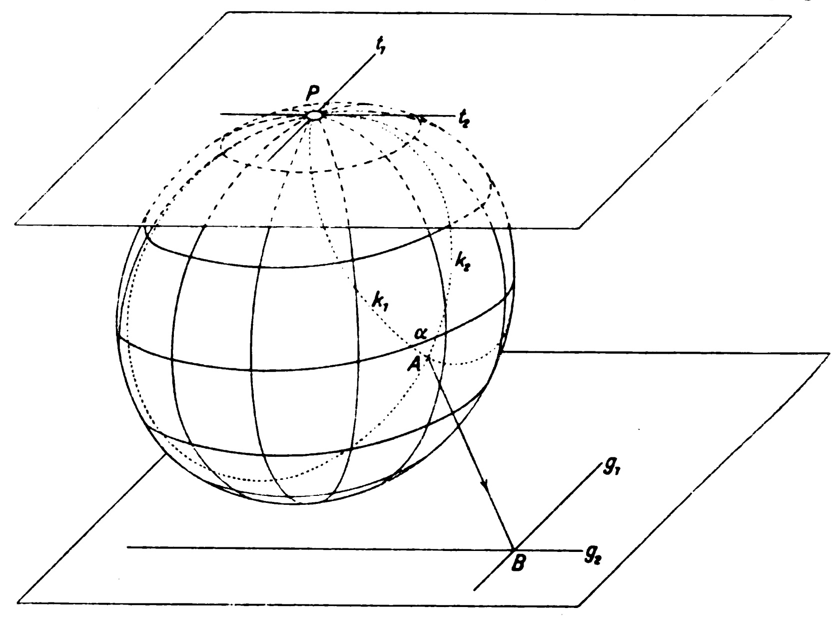
Um diese Frage zu beantworten, sei angenommen, daß die Kugel $\mathfrak{K}$ stereographisch auf der Ebene $\mathfrak{E}$ abgebildet sei, und daß eine zweite kreistreue Abbildung auf eine Ebene $\mathfrak{E}'$ vorliege. Wenn beide Abbildungen eindeutig sind, so wird auch $\mathfrak{E}$ auf $\mathfrak{E}'$ eindeutig abgebildet sein. Irgendeinem Punkte P der Kugel $\mathfrak{K}$ entspreche der Punkt Q in der Ebene $\mathfrak{E}$ und Q' in $\mathfrak{E}'$, und letzterer werde stereographisch auf eine zweite Kugel $\mathfrak{K}'$ zurückprojiziert in P'. Der Gesamtheit der Kreise durch P entspricht die Gesamtheit des Kreise durch Q, durch Q' und durch P'. Nun drehe man die beiden Kugeln so, daß P und P' in den Nordpol fallen (wie in der nebenstehenden Figur), so werden die durch sie gehenden Kreise in $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{E}'$ durch die Gesamtheit der Geraden in dieser Ebene abgebildet. Die beiden Ebenen sind also kollinear aufeinander bezogen. Alle kreistreuen Abbildungen der Kugel gehen folglich aus der stereographischen hervor durch Bewegungen der Kugel und kollineare Verwandtschaft.

Da die kollineare Verwandtschaft keine winkeltreue Abbildung ist, es sei denn, sie beschränke sich auf Verschiebung, Drehung und Ähnlichkeit, so kann man auch sagen, daß die stereographische Abbildung die einzige ist, die zugleich kreistreu und winkeltreu ist.

---

1) Mie, Lehrbuch der Elektrizität, Enke, Stuttgart; Wallot, Über die physikalischen und technischen Einheiten E. T. Z. 1922, Heft 44, 45.

Man könnte einwenden, daß die Abbildung von $\mathfrak{E}$ auf $\mathfrak{E}'$ ja z. B. auch durch reziproke Radien kreistreu und winkeltreu (allerdings mit Umlegung der



Stereographische Projektion der Kugel; $\sphericalangle\alpha = \sphericalangle(t_1\,t_2) = \sphericalangle(g_1\,g_2)$.

Winkel), also ohne Kollineation, bewirkt werden könnte. Aber der Einwand ist nicht stichhaltig, da die Abbildung durch reziproke Radien durch eine Spiegelung der Kugel am Äquator entsteht und also unter den Bewegungen der Kugel im weiteren Sinne mit enthalten ist.

Hamburg. H. THORADE.

Aufgaben-Repertorium.

Redigiert von Studienrat M. BRETTAR in Viersen (Burgstr. 2c).

(Alle das Aufgaben-Repertorium betreffenden Zusendungen und Anfragen sind an die Adresse dieses Herrn zu richten.)

A. Auflösungen.

914. Aus der gegebenen Kantensumme $4s$ und der gegebenen Oberfläche $2q^2$ den Quader von größtem und den von kleinstem Volumen zu bestimmen. Wann haben die beiden extremen Quader rationale Kanten? (Heft 6, 1926, Michnik-Beuthen.)

Lösung. Eliminiert man aus dem System: $a + b + c = s$, $a \cdot b \cdot c = V$, $ab + ac + bc = q^2$ die Größen a und b, so erhält man $V = c^3 - s \cdot c^2 + q^2 \cdot c$; $\frac{dv}{dc} = 3c^2 - 2sc + q^2$; $\frac{d^2V}{dc^2} = 2(3c - s)$. Mit $\frac{dV}{dc} = 0$ ergibt sich $c = \frac{1}{3}(s \pm R)$, wo $R = \sqrt{s^2 - 3q^2}$ ist $(s^2 > 3q^2)$. $\frac{d^2V}{dc^2}$ wird für $c = \frac{1}{3}(s + R)$ gleich $2R$, also wird V ein Minimum. Für $c = \frac{1}{3}(s - R)$ wird V ein Maximum.

1.) $c = \frac{1}{3}(s - R)$; $a + b = \frac{1}{3}(2s + R)$; $a \cdot b = q^2 - c(a + b) = \frac{1}{9}(6q^2 - s^2 + sR)$. Aus beiden Gleichungen fließt $(a - b)^2 = s^2 - 3q^2 = R^2$; $a - b = R$. Also

$$a = \tfrac{1}{3}(s + 2R), \quad b = \tfrac{1}{3}(s - R).$$

Für den Fall des Maximums sind also die beiden kleinen Kanten gleich (Säule). $V_{max} = \frac{1}{27}(s - R)^2(s + 2R)$.

2.) $c = \frac{1}{3}(s + R)$; $a + b = \frac{1}{3}(2s - R)$; $a \cdot b = \frac{1}{9}(6q^2 - s^2 - sR)$; $a - b = R$; $a = \frac{1}{3}(s + R)$, $b = \frac{1}{3}(s - 2R)$. Für den Fall des Minimums sind die beiden großen Kanten gleich (Platte). $V_{min} = \frac{1}{27}(s + R)^2(s - 2R)$.

Es läßt sich leicht beweisen, daß alle Quader von der Kantensumme $4s$ und der Oberfläche $2q^2$, die gleiche Raumdiagonale d haben, daß sie sich also ein und derselben Kugel einbeschreiben lassen. — Ist $R = 0$, so wird $s^2 = 3q^2$. Für Maximum und Minimum erhält man $a = b = c = \frac{s}{3}$; $V = \frac{s^3}{27}$ (Würfel). Ist $s = 2R$, so wird $s^2 = 4q^2$, $s = 2q$, $d^2 = 2q^2$, d. h. das Quadrat der Raumdiagonale ist gleich der Oberfläche des Quaders. Für den maximalen Wert findet man: $a = \frac{2}{3}s$, $b = c = \frac{s}{6}$, $V_{max} = \frac{s^3}{54}$. Für den minimalen $a = c = \frac{s}{2}$, $b = 0$, $V_{min} = 0$. Dieser Quader reduziert sich auf ein Quadrat von der Seite $\frac{s}{2}$.

Rationale Lösung. Sollen für die Extreme des Volumens die Kanten a, b, c rational sein, so sind s, q^2 und die Extreme selbst, folglich auch R rationale Zahlen. Die Rationalität von q ist nicht erforderlich. Um $R = \sqrt{s^2 - 3q^2}$ rational zu machen, setze man $\sqrt{s^2 - 3q^2} = s - \lambda$. Dann ist $s^2 - 3q^2 = s^2 - 2s\lambda + \lambda^2$; $s = \frac{3q^2 + \lambda^2}{2\lambda}$, $R = \frac{3q^2 - \lambda^2}{2\lambda}$. Im Maximalfalle ist dann

$$a = \frac{1}{3}(s + 2R) = \frac{9q^2 - \lambda^2}{6\lambda}, \quad b = c = \frac{1}{3}(s - R) = \frac{\lambda}{3}, \quad V_{max} = \frac{\lambda}{54}(9q^2 - \lambda^2).$$

Im Minimalfalle

$$a = c = \frac{1}{3}(s + R) = \frac{q^2}{\lambda}, \quad b = \frac{1}{3}(s - 2R) = \frac{\lambda^2 - q^2}{2\lambda}, \quad V_{min} = \frac{q^4}{2\lambda^3}(\lambda^2 - q^2).$$

q^2 kann eine beliebige positive rationale Zahl sein; λ muß positiv und rational sein. Es ergibt sich ferner $q < \lambda < 3q$ und für positive Werte von R außerdem $\lambda < q\sqrt{3}$.

Zahlenbeispiel $q^2 = 1$, $\lambda = \frac{3}{2}$. Dann ist $s = \frac{7}{4}$ für das Maximum ist $a = \frac{3}{4}$, $b = c = \frac{1}{2}$, $V = \frac{3}{16}$, für das Minimum $a = c = \frac{2}{3}$, $b = \frac{5}{12}$, $v = \frac{5}{27}$.

Brehm. Bücking. Conrad. Diez. Fix. Friedrich. Groner. Hoffmann. Jacob. Janzen. Kasper. Mahrenholz. Mertens. Michnik. Münst. Niebel. Rall. Scharffetter. Sohn. Sós. Stiegler.

B. Neue Aufgaben.

976. Die beiden Punkte, in denen der einbeschriebene Kreis eines rechtwinkligen Dreiecks die Hypotenuse und eine Kathete berührt, liegen mit dem Punkte, in dem der dieser Kathete anbeschriebene Kreis die andere Kathete berührt, auf einer Geraden. Michnik-Beuthen.

977. Auf einer geraden Straße stehen vier Bäume A, B, C, D in den Abständen $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$. Einem außerhalb der Straße stehenden Beobachter erscheinen sie gleichweit voneinander entfernt. Wo steht der Beobachter? Klobasa-Troppau.

978. Gegeben sind die Geraden g_1 und g_2 mit dem Schnittpunkt S und auf g_1 der Punkt A. Gesucht wird ein g_2 berührender Kreis mit dem Mittelpunkt auf g_1, dessen Durchmesserendpunkte U und V auf g_1 mit A und S eine harmonische Gruppe bilden. Münst-Ebingen-Württ.

979. Für die (aus Schuckes Aufgabensammlung zur Differentialrechnung bekannten) Kurven 4. Ordnung mit den Gleichungen 1). $x^4 + x^2y^2 - 6ax^2y + a^2y^2 = 0$, 2). $x^4 - 2ax^2y - 2axy^2 + a^2y^2 = 0$ soll aus den Gleichungen eine punktweise geometrische Konstruktion hergeleitet werden.

Hoffmann-Ravensburg.

980. In der Ebene eines Dreiecks gibt es Punkte P von der Eigenschaft, daß die Transversalen von den Fußpunkten der Lote von P auf die Seiten jedesmal durch einen Punkt Q gehen (z. B. Mittelpunkt des umbeschriebenen Kreises, Höhenschnittpunkt, Mittelpunkt der Berührungskreise). Es soll der geometrische Ort dieser Punkte P und der Ort der zugehörigen Punkte Q gefunden werden. Epstein-Frankfurt a. M.

Briefkasten zum Aufgaben-Repertorium.

Bis zum 25. November sandten Lösungen ein: Ehrlich-Berlin 942. 965. Halberstadt-Berlin 968—970. Lauffer-Graz 941. 943—945. 947. 948. 950. 951. 954—957. 960. 961. Michnik-Beuthen 968—971. Neumann-München 967.

Neue Aufgaben sandten ein: a) mit Lösung: Ehrlich-Berlin (1), Lauffer-Graz (2), Michnik-Beuthen (5), Neumann-München (12), Ruff-Wien (1); b) ohne Lösung: Neumann-München (2).

Berichte.

Methodik.

Über die Beurteilung der Leistungen in der Schule.[1] (Mit 4 Figuren im Text.)

1. Eine der schwierigsten Pflichten von uns Lehrern ist die Erteilung der Zeugnisse. Das Zeugnisgeschäft kann scheinbar ganz einfach sein. In den sprachlichen Arbeiten der unteren Klassen zähle ich die Fehler und entnehme einer zuvor entworfenen Beziehungstafel zwischen Fehlern und Noten das Zeugnis. In den andern Fächern, z. B. im Rechnen, entscheidet ein Richtig oder Falsch über den Anteil der einzelnen Aufgabe am Gesamtzeugnis. Vielleicht müssen

1) Die folgende Besprechung der Schrift: W. Lietzmann, Über die Beurteilung der Leistungen in der Schule. Mathematisches, Psychologisches, Pädagogisches. Leipzig 1927, B. G. Teubner. Kart. RM 6.—, schließt sich an einen Vortrag an, der in der Stuttgarter Ortsgruppe des „Förderungsvereins" gehalten wurde und bei dem als Gäste auch Vertreter anderer Fachgruppen anwesend waren.

aber hier schon Unterschiede gemacht und auch halbrichtige Aufgaben berücksichtigt werden. Je mehr es bei einer Arbeit aber nicht mehr auf die richtigen oder falschen Einzelheiten, sondern auf die Brauchbarkeit des Ganzen ankommt, je mehr man die Fehler wägen und nicht zählen muß, desto schwieriger wird ihre Beurteilung, desto mehr kommt es auf die persönliche Auffassung des Beurteilenden an. Unsere ganze Zeugniserteilung ist überwiegend subjektiv. Daran ändert sich auch nichts infolge der selbstverständlichen Forderung, die Zeugnisse nach bestem Wissen und Gewissen zu erteilen. Das Gefühl des Lehrers ist kein objektiver Wertmesser.

2. Es erhebt sich also die schwerwiegende Frage: Gibt es einen Wertmesser, der die Schülerleistungen eindeutig mit angebbarer Meßgenauigkeit objektiv, d. h. unabhängig von der Person des Messenden und unabhängig von Zeit und Ort der Messung festzustellen vermag, also einen Wertmesser ähnlich den physikalischen Messinstrumenten, der zudem gestattet, die Messung beliebig oft unter gleichen Umständen zu wiederholen und damit nachzuprüfen?

Diese Frage ist um so dringlicher, wenn man bedenkt, daß auf den Einzelzeugnissen die Entscheidung über Versetzung und Nichtversetzung, über Reife und Nichtreife und unser ganzes Berechtigungswesen beruht. Mit der Beantwortung dieser Frage beschäftigt sich die vorliegende Schrift. Diejenige Lösung, die jedem von uns als die ideale vorschwebt und in deren Sinn er auch seine Zeugnisse erteilt, wäre der Vergleich der Schülerarbeiten mit einer nicht bloß vom Aufgabensteller, sondern von der Allgemeinheit anerkannten Idealarbeit. Die Abweichungen von ihr müßten durch Aufstellung eines Punktezahlsystems oder sonstwie ebenfalls allgemeingültig festgestellt sein. Aber abgesehen davon, daß eine solche Idealarbeit im Einzelfall gar nicht existiert, wären ja unzählig viele Idealarbeiten und damit unzählig viele Idealmaßstäbe zu schaffen. Wir wünschen aber einen Wertmaßstab, der in jedem Fall gilt, gleichgültig, ob es sich um eine französische oder um eine mathematische Arbeit handelt.

3. Es gibt nun ein ganz anderes und auf den ersten Blick höchst merkwürdiges Verfahren, zu einem solchen Maßstab zu gelangen. Wir betrachten nicht Idealarbeiten und mühen uns nicht um den Vergleich der tatsächlich vorliegenden Arbeiten mit dieser, sondern wir nehmen als gegeben z. B. die mit allen Mängeln subjektiver Beurteilung versehenen Zeugnisse einer Klassenarbeit. Wir notieren uns, wie viele Schüler das Zeugnis 1, 2, . . ., 5 haben. Wir tragen die Zeugnisse auf einer wagrechten Achse ab und die entsprechenden Schülerzahlen als Lote auf dieser Achse. Verbinden wir die Endpunkte durch Strecken, so haben wir in dieser graphischen Darstellung ein rasch zu übersehendes Bild der Abhängigkeit zwischen Zeugnis und Schülerzahl.

Man denke sich in gleicher Weise in tausend andern Fällen, z. B. bei den Zeugnisdurchschnitten der Abiturienten der württembergischen Oberrealschulen, verfahren. Was für ein Beispiel man auch wählen mag, immer wird man einen Polygonzug von der gleichen Art erhalten. Freilich werden die Polygonzüge bei den Arbeiten, die derselbe Lehrer zu korrigieren hat, oder solchen, die von verschiedenen Lehrern zu beurteilen sind, nicht genau deckungsgleich sein. Gemeinsam ist ihnen, daß das Maximum der einer Note zukommenden Schülerzahl etwa in der Mitte liegt und daß sie zu beiden Seiten sehr schnell abfallen. In der Abweichung der Polygonzüge voneinander äußern sich die subjektiven Unterschiede der Beurteilung. Die objektive ideale Beurteilung müßte durch einen

idealen Polygonzug dargestellt sein. Dieser müßte nicht nur zu jeder ganzen Note, sondern für beliebige Noten die zugehörige Schülerzahl liefern, er müßte also „unendlich viele“ Seiten haben, d. h. in Wahrheit eine Kurve sein.

4. Hier greift nun die Mathematik ein. Die Kurve, die den Namen des größten deutschen Mathematikers Karl Friedrich Gauß führt, gibt die ideale Verteilung eines Gegenstandes, eines sogenannten *Kollektivs* — in unserem Fall des Kollektivs „Schüler“ — in bezug auf ein *Merkmal* — hier die durch ein Zeugnis ausgedrückte Leistung — an. Sie hat in rechtwinkligen Koordinaten die Gleichung

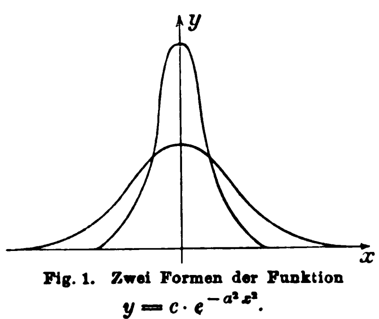


Fig. 1. Zwei Formen der Funktion $y = c \cdot e^{-a^2x^2}$.

$$y = c \cdot e^{-a^2x^2}.$$

Die Größen a und c, die den Maßstab auf der x- und y-Achse bestimmen, erlauben, ihr noch mannigfache Gestalt zu geben und sie einem bestimmten Einzelfall anzupassen.

Ein strenger Beweis dafür, daß die Verteilung eines Kollektivs gerade durch die Gaußsche Kurve gegeben sein muß, ist freilich nicht erbracht und nicht zu erbringen. Das Gaußsche Gesetz braucht aber in dieser Hinsicht den Vergleich mit den physikalischen Gesetzen nicht zu scheuen. Denn die Verteilungskurven eines Kollektivs schließen sich der Gaußschen Kurve sehr eng an.

Wozu kann uns diese Kurve nun nützen? Sie kann jedem von uns dazu dienen, seine persönliche Gleichung — Gleichung im astronomischen Sinn von Ausgleichung verstanden — zu bestimmen. Der eine gibt gerne gute Zeugnisse, der andere beurteilt sehr scharf, der dritte hält sich an ein Durchschnittszeugnis. Recht deutlich tritt das bei Lehrerwechseln zutage. Lietzmann gibt dafür ein drastisches Beispiel, wie man überhaupt eine interessante Kennzeichnung von Lehrertypen hinsichtlich ihrer Art, Zeugnisse zu erteilen, bei ihm findet.

Zeichnet sich nun jeder von uns für die aufeinanderfolgenden Klassenarbeiten die besprochene graphische Darstellung auf und vergleicht sie mit der Gaußschen Kurve, so wird er bald erkennen, ob er zu hohe oder zu niedere Zeugnisse gibt. Natürlich muß sich die Beobachtung über einen längeren Zeitabschnitt erstrecken.

Bei jeder Arbeit interessiert uns ferner der *Durchschnitt*. Dieser sollte sich vom häufigsten Zeugnis nicht allzusehr unterscheiden. Noch wichtiger ist die *Streuung*. Sie gibt an, wie die Leistungen sich zur Mittelleistung verhalten. Kleine Streuung deutet auf starke Zusammenballung um den Mittelwert, große auf Bevorzugung der Extremwerte hin. Bei der Gaußschen Kurve ist die Streuung einfach gleich der Abszisse des Wendepunkts.

Lietzmann hat zur Erleichterung für den Leser das Gaußsche Verteilungsgesetz durch bequemer zu handhabende Näherungsgesetze mittels der sogenannten Binominalzahlen ersetzt und an zwei Beispielen die Zensuren eines Lehrers nachgeprüft.

5. Das zweite Hauptproblem seiner Schrift setzt Lietzmann zunächst an folgendem Beispiel auseinander: Eine Klasse ist in zwei verschiedenen Fächern zensiert worden, und die Schüler wurden auf Grund davon in zwei verschiedene Lokationen gebracht. Wie sind die beiden Lokationen zu einer einzigen zu vereinigen?

Nehmen wir der Einfachheit halber nur 7 Schüler, und sind 1, 2, ..., 7 und 1′, 2′, ..., 7′ die beiden Rangordnungen, so können wir uns von ihrer Verteilung auf die einzelnen Schüler durch ein quadratisches Netz wie in den Figuren 2, 3 und 4 ein Bild machen. In Fig. 2 stimmen die Lokationen vollkommen überein; wir haben eine vollständige *Korrelation* der beiden Fächer, in

	1_2	2_2	3_2	4_2	5_2	6_2	7_2
1_1	o						
2_1		o					
3_1			o				
4_1				o			
5_1					o		
6_1						o	
7_1							o

Fig. 2.

	1_2	2_2	3_2	4_2	5_2	6_2	7_2
1_1							o
2_1						o	
3_1					o		
4_1				o			
5_1			o				
6_1		o					
7_1	o						

Fig. 3.

·	1_2	2_2	3_2	4_2	5_2	6_2	7_2
1_1		o					
2_1	o						
3_1			o				
4_1					o		
5_1							o
6_1						o	
7_1				o			

Fig. 4.

Fig. 3 haben wir die entgegengesetzte Korrelation, in Fig. 4 eine beliebige. Der Engländer Spearman hat nun eine Formel aufgestellt, die ein Maß für den Grad der Korrelation liefern soll. Er richtet den Ausdruck so ein, daß er im Falle der Fig. 2 den Wert $+1$, im Falle der Fig. 3 den Wert -1 hat. Das Maß für die Korrelation, der Korrelationskoeffizient, ist nun

$$\varrho = 1 - \frac{6}{n(n^2-1)} S(x-y)^2.$$

n ist die Zahl der Schüler, x der Platz eines Schülers in der ersten, y der in der zweiten Lokation. Die Differenzen $x - y$ sind den Abständen der Plätze von der Quadratdiagonale proportional. Im Falle der Fig. 3 ist $S(x-y)^2 = \frac{n(n^2-1)}{3}$. Der Faktor $\frac{6}{n(n^2-1)}$ bezweckt, daß das Ergebnis von der Zahl n der Schüler unabhängig wird und zwischen 0 und 2 sich befindet. Die Differenzbildung bringt ϱ in das Intervall $-1 < \varrho < +1$.

Lietzmann wählt als weitere Beispiele von Korrelationsuntersuchungen die zwischen Gedächtnis, Aufmerksamkeit und Kombinationsgabe bestehenden Korrelationen, weiter die Korrelationen bei der Beurteilung derselben Arbeiten durch verschiedene Lehrer, ferner die Korrelation zwischen Klassenzeugnissen und Prüfungszeugnissen anläßlich der Reifeprüfung. Letztere erweist sich als sehr hoch. Das würde für die Abschaffung der Reifeprüfung sprechen, sofern man sie als Leistungsprüfung der Schüler ansieht. (Man kann sie natürlich aber auch als Leistungsprüfung der betreffenden Schule oder als Erziehungsfaktor für die Schüler auffassen.)

Ganz allgemein ist die Aufgabe der Korrelationstheorie, zu untersuchen, ob ein engerer oder weiterer oder gar kein Zusammenhang besteht zwischen zwei Eigenschaften, deren Verteilung auf ein Kollektiv durch irgendeine Tafel gegeben ist.

6. Wir sehen, daß die Lietzmannsche Schrift zu einer Reihe heute besonders wichtiger Fragen Stellung nimmt. Wenn auch die bis jetzt erreichten Antworten manchen noch enttäuschen mögen, der sich mit großer Hoffnung an

sie heranmachte, wenn sie vielleicht gar in einer Richtung liegen, die der Einstellung des einen oder andern unter uns nicht so recht liegt, so wird man doch dem Verfasser aufrichtig dankbar sein, daß er durch die zusammenfassende Behandlung dieser Fragen in seiner Schrift reiche Anregung gibt. Damit ist nach seinen eigenen Worten der wesentliche Zweck seiner Darstellungen erreicht.

Vaihingen a. F.-Stuttgart. K. Fladt.

Persönliches.

Carl Runge †. Am 3. Januar 1927 starb, allen, die ihn persönlich kannten, gänzlich unerwartet, der Göttinger Mathematiker Carl Runge. Wenige Monate vorher, am 30. August 1926, konnte er seinen 70. Geburtstag begehen. Wer ihn in seinen letzten Jahren sah, wie er auf seinem Rade durch die Straßen fuhr, wer von seinen Leistungen als Turner, Ruderer, Schwimmer, Schneeschuhläufer hörte, der mochte nicht glauben, daß Runge schon ein alter Mann war, er, der es an Jugendfrische mit manchem Privatdozenten aufnahm. Und wie der Körper, so der Geist. Wenige verstanden es, so schnell wie er ein neues mathematisches oder physikalisches Ergebnis aufzufassen und dann mit wenigen Worten anderen klar zu machen. Das Wesentliche herauszugreifen, es anschaulich zu erfassen, es in seinem Werte für Theorie und Praxis schnell zu erkennen und es mit einem klaren Wort, einem treffenden Gleichnis, einer bezeichnenden Geste, einer frohen Anerkennung darzustellen — darin war er ein Meister.

Runge wurde am 30. August 1856 in Bremen geboren, verbrachte seine ersten Lebensjahre in Havanna, besuchte dann nach der Rückkehr seiner Familie nach Deutschland das Gymnasium in Bremen. Von 1875 bis 1880 studierte er, erst in München, dann in Berlin unter Weierstraß und Kronecker. Am 23. Juni 1880 promovierte er gleichzeitig mit F. Rudio. Die beiden Doktoranden hatten zwei diametral entgegengesetzte Thesen aufgestellt[1]):

Rudio: „Der Wert der mathematischen Disziplin kann nicht nach ihrer Anwendbarkeit auf empirische Wissenschaften bemessen werden."

Runge: „Der Wert einer mathematischen Disziplin ist nach ihrer Anwendbarkeit auf empirische Wissenschaften zu schätzen." .

1883 habilitierte sich Runge in Berlin, erhielt 1886 eine ordentliche Professur an der Technischen Hochschule in Hannover und siedelte 1904 an die Universität Göttingen über.

Was Runge als Mathematiker und als Physiker geleistet hat, darüber möge man in einem ihm als Festgabe zugedachten, aber erst nach seinem Tode erschienenen Runge-Heft der „Naturwissenschaften" (15. Jahrgang, 10. Heft vom 11. März 1927) die Ausführungen von R. Courant und F. Paschen nachlesen und dazu noch den schönen schlichten Nachruf, den Prandtl in der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften gehalten hat (vgl. Göttinger Nachrichten 1926/27, S. 58ff.).

Für den Schulmathematiker ist Runge *der* Anwalt der angewandten Mathematik an den Hochschulen gewesen. Was Klein organisatorisch eingeleitet, die

1) Vgl. W. Lietzmann, Methodik des math. Unterrichtes. I. Bd. 2. Aufl. Leipzig, Quelle & Meyer, 1926, S. 60ff.

Schaffung der angewandten Mathematik als Wissenschaft, das hat Runge zur Ausführung gebracht. Groß ist die Zahl seiner Schüler, noch größer die Zahl derjenigen, die aus seinen zahlreichen Lehrbüchern angewandte Mathematik gelernt haben, ich nenne nur die Praxis der Gleichungen (9. Aufl. Berlin, de Gruyter, 1921), Graphische Methoden (2. Aufl. Leipzig, Teubner, 1919), Analytische Geometrie der Ebene (Leipzig, Teubner, 1908), Vektoranalysis (1. Bd. Leipzig, Hirzel, 1919), die aus seinen Vorlesungen hervorgegangene Praktische Analysis von H. von Sanden (Leipzig, Teubner, 1914) und die von Runge gemeinsam mit H. König herausgegebenen Vorlesungen über numerisches Rechnen (Berlin, Springer, 1924).

Auf Anregung von F. Klein hat Runge auch den Unterrichtsfragen sein Interesse zugewandt. Er war lange Jahre Mitglied des Deutschen Ausschusses für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht und hat an dessen Sitzungen regelmäßig teilgenommen. Naturgemäß war es die angewandte Mathematik und ihre Rolle namentlich bei der Ausbildung und bei der wissenschaftlichen Prüfung der zukünftigen Lehrer an höheren Schulen, für die er sich einsetzte. Es ist eigentümlich, wie dieser Begriff der angewandten Mathematik immer wieder umstritten ist — gerade der Artikel über Runge als Mathematiker hat in diesen Tagen erneut eine Kontroverse in den „Naturwissenschaften" ausgelöst. Da darf wieder einmal an den Aufsatz erinnert werden, den Runge 1914 für diese Zeitschrift (45, S. 269) schrieb: Was ist „angewandte Mathematik"? — er geht auf eine sehr lebhafte Aussprache zurück, die unter zahlreicher Beteiligung von Mathematikern der verschiedenen Hochschulen in Göttingen stattgefunden hatte.

Geheimrat Prof. Dr. Carl Runge, der Mann, der so gar nichts vom Geheimrat an sich hatte, der Forscher und Lehrer, ist von uns geschieden. Möge die Schule die Art, wie er die Mathematik ansah, weiter pflegen; das wird der beste Dank für sein Wirken sein.

Göttingen. W. Lietzmann.

Bücherbesprechungen.

Die Preise der besprochenen Bücher sind nach den Mitteilungen der Verlagsanstalten im Erscheinungsmonat angegeben. Da die Buchhandlungen sich Änderungen vorbehalten, kann keine Sicherheit dafür geboten werden, daß die angegebenen Preise auch heute noch gelten.

Malsch, Maey und Schwerdt, Zahl und Raum, Lehr- und Übungsbuch der Mathematik. Leipzig 1926, Quelle & Meyer. 8 Hefte zu *RM* 2.20 bis *RM* 3.—.

Zum Bericht liegen vor 4 Hefte von Malsch und Maey. Ein neues Unterrichtswerk nach so vielen schon erschienenen muß sich allerhand Fragen gefallen lassen: Bestand dafür ein Bedürfnis im Leserkreis? Was für Fortschritte bringt es? Leistet es das, was es laut Vorwort will?

Nach den durchgesehenen Proben kann man leider diese Frage nicht durchweg zugunsten des Werkes beantworten. Die Differential- und Integralrechnung (von Maey, Bd. 8) liest sich leicht und ist in vielen Teilen sehr geeignet, zum einführenden Selbstunterricht zu dienen, wozu man sie Schülern wohl empfehlen könnte. Das kann man von sehr wenigen Schulbüchern sagen. Trotzdem bestehen ernste Bedenken gegen das Buch. Es will laut Einleitung des Gesamtwerks arbeiten lehren (Arbeitsschulprinzip) Es tut vorwiegend eher das Gegenteil. Von 145 Seiten Text sind rund 120 rein dogmatischer Vortrag, der dem Leser jede eigene (produktive oder auch nur nachschaffende) Arbeit abnimmt. Das geht so weit, daß der Ver-

fasser z. B., nachdem er die Ableitung der Funktion $\sin x$ ausführlich dargestellt, genau das gleiche für $\cos x$ wiederholt, sogar noch für $\operatorname{tg} x$ und $\operatorname{cotg} x$. Nicht einmal Tabellenherstellung wird dem Leser zugemutet. Die Aufgaben, die geboten werden, verlangen größtenteils nur das Einsetzen von Zahlen in fertige, im Buch abgeleitete Formeln (z. B. bei der Fehlerrechnung) oder die (ziemlich mechanische) Anwendung der hergeleiteten Regeln für Differentiation und Integration auf Übungsbeispiele. Der Wert der Schülerleistung dabei ist überaus bescheiden. Hier liegt eben ein Mangel der höheren Analysis überhaupt und eine der gefährlichsten Einwendungen gegen ihre Einführung in die Schule: sie ist ein Handwerkszeug für andere Gebiete (Technik, Naturwissenschaften, Funktionentheorie), das für die Einübung bis zu geläufiger Handhabung mehr Zeit braucht, als die wenigen vom Schüler selbständig zu bearbeitenden Anwendungen rechtfertigen. Die noch selteneren, nur mit Lehrerhilfe verständlichen wissenschaftlichen Anwendungen (Gravitation, barometrische Höhenmessung u. a.), die im Widerspruch zu dem Goethischen Leitmotiv der Arbeitspädagogen nur belehren, statt die Tätigkeit des Zöglings zu vermehren, sind nur didaktisch magerer Ersatz. Diesen Widerspruch zwischen den Meraner Wünschen und den Arbeitsschulgrundsätzen hat auch M. entweder nicht bemerkt oder doch nicht zu beseitigen vermocht. — Daneben stehen dann wieder Aufgaben wie die Minimalablenkung am Prisma oder die Descartessche Regenbogentheorie ganz oder fast ganz ohne Anleitung. Welcher Schüler leistet das? Auch für die eingekleideten Extremaufgaben ist nicht die leiseste Anleitung gegeben. Und gerade hier ist es möglich, ein allen gemeinsames, planmäßiges Lösungsverfahren erarbeiten zu lassen, also ein Arbeitsverfahren zu lehren.

Die laut Vorwort angestrebte Lebensnähe liegt nur bei wenigen Aufgaben vor. Meist ist es auch nur Wirklichkeitsnähe, nicht für das bürgerliche Leben Wichtiges, sondern für Technik oder Wissenschaft Interessantes. Dies zeigt, wie wenig durchführbar die Forderung der Lebensnähe für große Gebiete der Mathematik ist. Bedenklich steht es ferner mit der Strenge. Auch dies ist eine Lebensfrage für die höhere Analysis auf der Schule, obwohl die Lehrerschaft, zum Teil noch nicht im Geist Weierstraßscher Strenge erzogen, das meist bestreitet. Die Frage der Strenge ist (gerade für den Arbeitspädagogen) eine Frage der Ehrlichkeit, der Schülerselbstkritik und der Klarheit der Mathematik, also ein Hauptproblem. Lösen wir es nicht, so wird eine mathematisch gewissenhaftere Lehrergeneration der höheren Analysis auf der Schule eines Tages vielleicht den Garaus machen. Der Notbehelf, Sätze mit Wissen des Schülers unbewiesen zu lassen (wovon auch M. Gebrauch macht), lähmt das Interesse des Schülers, des tüchtigen besonders. Versteckte Unrichtigkeiten machen das klare Verständnis unmöglich. Denn Verstehen heißt die Richtigkeit einer richtigen Schlußkette einsehen. Unrichtiges kann dem Schüler also nicht als richtig klar werden. Täuscht man den Schüler bewußt, wie kann man dann von ihm Selbstkritik, Ehrlichkeit gegen sich selbst und Klarheit seiner Darlegungen fordern? Unbewußte Täuschungen sind noch bedenklicher. Was liest man nun bei M.? Wiederholt verzichtet er auf Beweise ausdrücklich (bei $\lim\limits_{\xi=0} \frac{a^\xi - 1}{\xi}$, bei der Differentiation einer Potenzreihe), an anderen Stellen läßt er stillschweigend Lücken (deren Vorhandensein das Gesamtvorwort aber ableugnet). Einige Beispiele: S. 13 wird die Monotonie von $f(n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $(n = 1, 2, \ldots)$, durch unvollständige Induktion erschlichen, S. 44, $D_x x^{\frac{m}{n}} = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n} - 1}$ durch Scheinbeweis auf den Fall irrationaler Exponenten übertragen, S. 63, die Konvergenz von $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ stillschweigend vorausgesetzt (ein allgemeiner Beweis folgt S. 65). Beim Krümmungskreis bleibt unbewiesen, weshalb er sich der Kurve besonders innig anschmiegt; bei den Reihen, wie aus der Wertübereinstimmung von $D_x^n \varphi(x)$ und $D_x^n \psi(x)$ in einem Punkt folgen soll, daß die Schmiegungsparabeln in der ganzen Nachbarschaft sich mit $\lim n = \infty$ immer inniger anschmiegen; ebenso warum die willkürlich angenommene Potenzreihe eine vorgeschriebene Funktion darstellt. Dabei ist zu bedenken, daß die nur dem Spezialisten interessante Reihenlehre samt Konvergenz-

kriterien entbehrlich wird, wenn man die Taylorsche Reihe mittels partieller Integration ableitet und das Restglied ohne Cauchy und Lagrange in der Integralform (geometrisch) abschätzt, wobei man viel kürzer und strenger verfahren kann. Die Schmiegungsparabeln bleiben trotz ihrer hohen Protektion ein Danaergeschenk, so lange sie solche logische Willkür veranlassen. Daneben stehen einzelne, wohl unbeabsichtigte Lücken. S. 94 z. B. ist die Voraussetzung der Monotonie schon früher nötig als der Text angibt, S. 61 der Konvergenzbeweis lückenhaft, weil u_n nicht von $|u_n|$ unterschieden ist, S. 52 die Zeichenfrage von $\sqrt{1+y^2}$ unerörtert, obwohl am Schluß eine Zeichenregel an das Ergebnis geknüpft wird, die dann wieder einen Grenzfall ($\varrho \parallel Y$-Achse) vergißt. Auch sonst bestehen Unklarheiten. S. 72 z. B. muß $e^{ix} = \sum \cdot \frac{(ix)^n}{n!}$ als Definition aufgefaßt werden, da es sonst sinnlos bleibt. S. 73 ist der Begriff Periode doppeldeutig und unklar. Es wird da ein Zusammenhang behauptet zwischen Periodizität der Funktionen $\sin x$, $\cos x$, e^x und den Formeln $D_x^{n+4} \sin x = D_x^n \sin x$, $i^{n+4} = i^n$, $D_x^{n+4} e^{ix} = D_x^n e^{ix}$, die angeblich auch eine Periodizität ausdrücken. Der Schüler wird fragen, weshalb bei $\operatorname{tg} x$ ein solcher Zusammenhang zwischen den beiden Begriffen „Periode" nicht besteht. Ferner wird behauptet, die Differentiationsperiodizität $D_x^{n+4} e^{ax} = D_x^n e^{ax}$ bestände nur bei imaginärem $\alpha \cdot D_x^{n+2} e^{-x} = D^n e^{-x}$ beweist das Gegenteil. S. 34 bleibt der Steigungsbegriff unklar, weshalb der Satz: „Bei steigendem $f(x)$ ist $f'(x) > 0$" unrichtig wird; $f'(x) = 0$ in einzelnen Punkten schließt Steigen von $f(x)$ im ganzen Intervall nicht aus. S. 100 bleibt dem Schüler unklar, wie für die beiden angeblich willkürlichen Integrationskonstanten c und c_1 in $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$ und $= -\arccos x + c_1$ die Einschränkung der völligen Willkürlichkeit $c_1 - c = \frac{\pi}{2}$ bestehen kann. In dieser Hinsicht ist das Buch also kein Fortschritt, im Gegenteil verbesserungsfähig, damit der Schüler Vertrauen zu seinem Lehrbuch haben kann.

Von dem Herausgeber Malsch lag es nahe, als Probe die Trigonometrie (4. Heft) genauer anzusehen, da er laut Vorwort als praktischer Topograph und Trigonometer Erfahrungen gesammelt hat, die er in wirklichkeitsnahen Aufgaben der Schule zugute kommen lassen will. Diese Absicht gelingt ihm in sehr erfreulicher Weise. Namentlich ist die Landesvermessung liebevoll behandelt. Die anderen herangezogenen Anwendungsgebiete könnten entsprechende Erläuterungen (z. B. von Fachausdrücken) dem Schüler vielleicht noch näher bringen. Didaktisch indes liegt nichts erheblich neues in diesem Teil vor, im Gegenteil lassen sich Bedenken nicht unterdrücken. S. 51 z. B. wird nach einer auf Messung beruhenden Wertetafel für $\operatorname{tg}(n \cdot 5^0)$, $(n = 1, 2, \ldots 9)$, eine Kurve punktweise gezeichnet, willkürlich zwischen den Punkten ergänzt, und dann wird aus der entstandenen Kurve geschlossen, daß $\operatorname{tg} x$ in jedem Teilintervall nahezu gleichmäßig steigt. Solche logische Selbsttäuschung ließe man nicht einmal einem Quartaner ohne Aufklärung durchgehen. Dabei kann man das gewünschte Ergebnis leicht am Dreieck mit konstanter Ankathete ablesen lassen. Soweit kann man nicht gegen den Geist der strengsten Wissenschaft verstoßen, ohne sie zur Armeleutsmathematik zu erniedrigen und den Erziehungs- und Bildungswert fast zu vernichten. Unzureichend, weil zu äußerlich, ist auch die Einarbeitung der Grundgedanken der Arbeitsschule, zu der sich das Gesamtvorwort bekennt. Ist deren Ziel, selbständig arbeiten zu lehren, so müssen dogmatische Darlegungen vermieden werden in Dingen, die der Schüler durch Nachprüfen selbst finden kann. Begriffe z. B. dürfen nicht vom Himmel fallen, sondern müssen als zweckmäßiges oder notwendiges Arbeitsmittel vom Schüler möglichst selbst gebildet werden. M. strebt das am Anfang an beim $\operatorname{tg} \alpha$, für den auf Vorrat eine Wertetabelle hergestellt wird zwecks schneller Behandlung einer Serie gleichartiger Aufgaben. Dann aber werden die anderen Winkelfunktionen samt ihren Beziehungen zueinander ohne inneren Anlaß hingesetzt. Man kann aber auch bei ihnen Aufgabenserien geben, die zunächst mit $\operatorname{tg} \alpha$ bearbeitet, immer wieder auf $\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$, $\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \alpha}}$, $\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \alpha}}$ führen und so Wertetafeln für diese neuen Funktionen als

Zeitersparnis erscheinen lassen, also die Begriffe cotg x usw. schaffen. Zugleich gewinnt man dabei die Verwandtschaftsbeziehungen der Funktionen, wobei die Frage angeregt wird nach der geringsten Anzahl der zweckmäßig dem Gedächtnis einzuprägenden Beziehungen. Ebenso verschmäht M. öfters, einen Anlaß zu bieten zu eigener Zielsetzung, z. B. bei der Fortsetzung der Funktionen in höhere Quadranten, obwohl das anfängliche Fehlen der Definitionen von sin 0^0 und sin 90^0 (das M. übersieht) oder die trigonometrischen Sätze bei stumpfwinkligen Dreiecken Anlaß dazu geben. Daß (S. 71) der Schüler den Nachteil der Bereichbeschränkung auf $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ohne das empfinden könne, ist schon logisch unrichtig, weil sein Sinusbegriff (als Seitenverhältnis) der Bereichausdehnung noch widerspricht. Auch das Auftreten der Vorzeichen der Funktionen bleibt ohne inneren Anlaß, den z. B. der Kosinussatz bieten könnte. Ebenso steht es bei weiterem Formelmaterial. Die eigene Zielsetzung durch Schüler strebt M. im Anschluß an Jungbluth fast ausschließlich an durch Weglassen der Frage bei Aufgaben. Von wenigen geeigneten Beispielen abgesehen (z. B. Nr. 28, S. 81) ist diese Art nicht glücklich. Als Beispiel diene S. 67: „ein Leuchtturm von 28 m Höhe wird unter 13′ Höhenwinkel erblickt". Zunächst: Glaubt man ernstlich, der Schüler müsse erst suchen, was er hier soll? Meist verraten ihm das die vorhergehenden Aufgaben oder andere Hinweise der Umstände. Ferner: Hat man noch nicht bedacht, wie verstimmend es wirkt, wenn man jemandes Meinung oder Wunsch erraten soll, der darüber absichtlich im Unklaren läßt? Das wird als unnütze Arbeitserschwerung empfunden. Wie steht es ferner mit der Psychologie? Wird das Interesse für den Abstand eines Turmes wirklich dadurch erzeugt, daß man jemand die Höhe und den Höhenwinkel mitteilt? In Wirklichkeit wird es durch irgendeine andere Ursache geweckt und veranlaßt seinerseits erst die Frage nach den Berechnungsmitteln und -daten. Der geistige Vorgang ist hier also geradezu auf den Kopf gestellt. Der gewünschte Zweck, den Forschungstrieb des Schülers anzuregen, läßt sich mit solchen Mittelchen schwerlich erreichen. Erreicht wird höchstens ein ziel- und planloses Tasten und Reden. Nach dieser Anschauung müßte ein Schüler ideal gezogen sein, wenn er sich beim Anhören eines Konzerts veranlaßt fühlte, die Summe der Schwingungszahlen aller darin gehörten Töne zu ermitteln. Als Übung der Erfindungskraft und Anregung des Forschungstriebs kann eine Aufgabe wie die obige wirken, wenn man dem Schüler den Auftrag gibt, irgendwie den Abstand eines gesehenen Turmes zu ermitteln. Er wird dann selbst überlegen, welche und wieviel Daten er durch Mitteilung oder Messung ermitteln muß und welche er errechnen kann oder muß Weniger einfache Beispiele fordern von ihm auch die Erfindung zweckmäßiger Zwischenziele — man sieht, daß die Mitteilung eines geeigneten Endziels durchaus nicht den Forschungstrieb hemmt, sondern im Gegenteil gerade entwickeln kann. Das schließt nicht aus, den Schüler in Verhältnisse zu bringen, die in ihm eine solche Endzielfrage aufsteigen lassen. Das Wie ist freilich noch ein ungelöstes, sogar kaum bemerktes Problem, dessen Lösung M. jedenfalls hier nicht nähergekommen ist. Geschickter ist M., wenn er S. 84 vom Schüler fordert, nach Muster Aufgaben selbst zu bilden. — Schließlich scheint M. auch die Leistungsfähigkeit des Schülers im Auffinden von Lösungsverfahren unnötig gering einzuschätzen. Den Sinus- oder Kosinussatz kann er nach zweckmäßiger Zielsetzung selbst ableiten, die Zweideutigkeit der Lösung bei der Dreiecksberechnung (a, b, α) mit $a < b$ an Hand einer Zeichnung. Als Lösung der (freilich noch kaum angeschnittenen) Frage, wie ein mathematisches Lehrbuch der Arbeitsschule aussehen muß, kann das vorliegende nicht gelten.

Die Geschichte (der Trigonometrie) ist am Schlusse zusammenhängend dargestellt und bildet ein hübsches kulturkundliches Kapitel, das auch den Durchschnittsschüler interessieren kann — ob freilich auch sein mathematisches Interesse anregen, muß erst ausprobiert werden. Denn das setzt andere Interessen und Fähigkeiten voraus. Bei der notwendigen Knappheit der Behandlung muß es freilich mehr oder weniger in historischen Notizen stecken bleiben und kann die Kulturbedeutung der Mathematik nur streifen. Hier soll wohl der Lehrer ergänzen.

Das Werk ist liebevoll ausgestattet. Es hat vor anderen gutes Papier, großen Druck und vor allem reichen Bilderschmuck voraus. Die Bilder der großen Mathematiker sind eine Freude zu sehen. Ob freilich der Bildungswert für den Schüler

die große Mühe der Herausgeber lohnen wird, muß man abwarten. Wäre z. B. die Wirkung auf den Schüler noch dieselbe, wenn man ihm Keplers Bild als das eines Ritters oder das Bernoullis als das eines Politikers damaliger Zeit vorstellte? Es geht eben doch von der Persönlichkeit (von der das Bild redet) nichts über in das fast ganz überpersönliche Werk des Mathematikers.

Kiel. TH. DILLENBURGER.

O. Perron, Algebra. (Göschens Lehrbücherei, 1. Gruppe: Reine Mathematik, Bd. 8 und 9.)

Das vorliegende neuerschienene, zweibändige Lehrbuch der Algebra von Perron stellt den Körperbegriff von vornherein in den Mittelpunkt der Betrachtungen. Der erste Band behandelt die Grundlagen: Einführung der Grundbegriffe, Polynomischer Satz, Determinanten und lineare Gleichungen, symmetrische Funktionen, Teilbarkeit von Polynomen, Wurzelexistenz. Der zweite Band ist der Theorie der algebraischen Gleichungen gewidmet. Er endet mit der Auflösung der Gleichungen 5. Grades durch elliptische Funktionen. Der Galoisschen Theorie der Gleichungen und der Theorie der Substitutionsgruppen ist je ein besonderes Kapitel gewidmet. Funktionentheoretische Überlegungen sind, soweit angängig, vermieden, und die Eigenart der rein algebraischen Betrachtungsweise ist möglichst hervorgehoben. Auf klare Herausarbeitung der Grundbegriffe und lückenlose Beweise wird besonderer Wert gelegt. Trotz aller Strenge ist das Buch gut lesbar und dürfte auch dem Lehrer, dem an einer Abrundung und systematischen Beleuchtung seiner algebraischen Kenntnisse durch den Körperbegriff gelegen ist, willkommen sein. An praktischer Brauchbarkeit gewinnt das Buch dadurch, daß ihm ein Kapitel über numerische Auflösung von algebraischen Gleichungen hinzugefügt ist.

Göttingen. W. ACKERMANN.

Beihefte der Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften. Berlin, Otto Salle.

Heft 2. Zur Frage der Ausbildung der Lehrer der Mathematik und Naturwissenschaften. Im Auftrage der Ortsgruppe Hannover zusammengestellt von Dr. Georg Wolff. 1925.

Heft 6. Die sokratische Methode und wir Mathematiker. Eine pädagogische Auseinandersetzung mit allen Lehrern, insbesondere den Mathematikern und Naturwissenschaftlern von Dr. Hermann Weinreich. 1926.

Heft 8. Hochschule und höhere Schule. Vier Vorträge, gehalten auf der 28. Hauptversammlung des deutschen Vereins zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts. Herausgegeben von Dr. Erich Günther. 1927.

Zwischen den Heften 2 und 8 besteht insofern ein innerer Zusammenhang, als beide sich mit der „doppelten Diskontinuität“ zwischen höherer Schule und Hochschule befassen, und zwar betrifft Heft 8 den ersten Teil des Problems, den Übergang des Abiturienten von der Schule zur Hochschule, Heft 2 den zweiten Teil, die Vermittlung zwischen dem Studium und der Berufstätigkeit im Lehramt. Den Fragen, die sich auf diesen zweiten Teil beziehen, war eine Sitzung auf der 27. Hauptversammlung des Deutschen Vereins zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts in Hannover 1925 gewidmet (vgl. S. 244 bis 246 im Jahrg. 1925 dieser Zeitschr.). Es ist außerordentlich zu begrüßen, daß die auf dieser Sitzung gehaltenen Vorträge sowie die anschließende Diskussion und die dabei gewonnene Entschließung im vorliegenden, mit 21 Textfiguren ausgestatteten Heft vereinigt und jedermann zugänglich gemacht sind; denn in der Tat sind jene Ausführungen voraussichtlich noch auf längerer Zeit von größter Wichtigkeit für die Fragen der Ausbildung der künftigen Lehrer der Mathematik und Naturwissenschaften,

und es wird nötig sein, bei der weiteren Behandlung dieser Fragen an das anzuknüpfen, was hier niedergelegt ist. Der Herausgeber, der jene Sitzung leitete, hat unter die Vorträge auch die am Eröffnungstag gehaltene Programmrede des Herrn Rothe eingereiht, die auch tatsächlich in diesem Rahmen nicht fehlen darf. Diese Rede sowie der Vortrag des Herrn Wolff bilden die allgemeine Einführung in die vorliegenden Probleme; über die Ausbildung in Norddeutschland und im Ausland berichten sodann die Herren Heise (Hannover), Salkowski, Toeplitz, Zühlke, Vetter (Prag) und Brommer (Wien), während die Ausbildung in Süddeutschland von den Herren Löffler und K. T. Fischer behandelt wird. Von sämtlichen hier gesammelten Vorträgen muß gesagt werden, daß sie auch über den Rahmen ihres Themas hinaus viele wertvolle Anregungen geben, so daß das Heft, dem ein ausführliches Namen- und Sachregister beigegeben ist, jedem Fachgenossen zur Beachtung dringend empfohlen werden muß.

Von gleicher Wichtigkeit ist der Inhalt des Heftes 8, in dem Herr Günther die vier auf der Hauptversammlung in Dresden 1926 gehaltenen Vorträge zu dem obengenannten Thema der Herren Hartnacke, Böttger, Trefftz und Kleber (Bautzen) nach einem einleitenden Vorwort zusammengestellt hat. Im Anhang zu dem Vortrag Böttger sind die Äußerungen einer großen Anzahl von Hochschullehrern zusammengestellt, die durch eine vielseitig angelegte Umfrage gewonnen worden sind: gerade dieser Anhang ist besonders reizvoll. Der reiche Inhalt auch dieses Heftes wird noch auf lange Zeit aktuell bleiben, handelt es sich doch gerade um diejenige Seite der erwähnten „doppelten Diskontinuität", die jeden Lehrer täglich von neuem angeht, indem sie unmittelbar bis in die Einzelheiten seiner Berufsarbeit eingreift. Gedanken sind hier niedergelegt, die bei aller weiteren Aus- oder Umgestaltung des Unterrichts beachtet werden müssen, so lange man nicht Gefahr laufen will, ins Blaue hinein zu bauen. Auch die Fragen der verschiedenen Schultypen und ihrer weiteren Entwicklung sind aufs engste mit dem Thema verwoben, wie jede Seite des vorliegenden Heftes klar erkennen läßt. Wie der Herausgeber betont, darf nicht erwartet werden, daß bereits eine völlige Klärung des gesamten Fragenkomplexes erreicht sei. Um so wertvoller ist es, daß das Erreichte durch dieses Heft allgemein zugänglich gemacht worden ist, und es ist zu wünschen, daß man sich seiner in Zukunft bedienen wird als einer Sammlung von Anknüpfungspunkten, von denen die weiteren Erörterungen auszugehen haben.

Heft 6 knüpft an einen Vortrag an, den Prof. Nelson 1922 in der Göttinger Pädagogischen Gesellschaft gehalten hat, und der in dem Appell an die Mathematiker gipfelt, der „sokratischen Methode" zum Sieg über den „Dogmatismus" zu verhelfen. Verfasser beleuchtet im ersten Teil der vorliegenden Schrift die Herrschaft des Dogmatismus und den Gegensatz zwischen diesem und der sokratischen Lehrweise; jeder Kompromiß zwischen beiden ist abzulehnen. Besonders hervorgehoben sei die Notwendigkeit, mit dem „Götzendienst abfragbaren Wissens" zu brechen sowie der Hinweis auf das ungeheure Überwiegen solcher Fächer auf der Schule, die ihrer Natur nach, wie z. B. die Fremdsprachen, auf die Mitteilung von Tatsachen angewiesen sind. Der zweite Teil berichtet ausführlich über die Grundgedanken des Nelsonschen Vortrages, die sich zunächst auf die Philosophie erstrecken. Es wird gezeigt, wie nur ein „Ausgehen von der handfesten Welt unserer fünf Sinne", von den „Erlebnissen der Straße" und von da aus ein Rückgehen (nicht Rückschließen) zu den Grundwahrheiten eine Aussicht auf Überwindung des „chaotischen Zustandes" der Philosophie bietet. Im besonderen werden schon hier die Schwierigkeiten bei der Durchführung des neuen, uralten Lehrverfahrens erörtert. Der dritte Teil beantwortet sodann die Frage, was wir Mathematiker und Naturwissenschaftler mit der sokratischen Methode zu schaffen haben. Ein ausführliches Literaturverzeichnis ist beigegeben. Den grundsätzlichen Erörterungen dieser gehaltvollen Schrift ließ der Verfasser inzwischen (Unterrichtsblätter 1927, Heft 3, 4, 6) konkrete Darstellungen aus dem mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht folgen.

Zwickau i. S. B. Kerst.

Franz Boll und **Carl Bezold, Sternglaube und Sterndeutung. Die Geschichte und das Wesen der Astrologie.** Dritte Auflage nach der Verfasser Tod herausgegeben von W. Gundel. Mit 48 Abb. im Text und auf 20 Tafeln sowie einer Sternkarte. XII u. 211 S. Leipzig 1926, B. G. Teubner. Steif brosch. *RM* 11.—.

Als Franz Boll, nachdem er in seiner „Sphära" die Geschichte der Astrologie neu durchleuchtet hatte, in flüssigerer Darstellung und für einen weiteren Leserkreis vor 10 Jahren sein Büchlein über Sternglauben und Sterndeutung schrieb, wird er kaum geahnt haben, daß sich eine neue Welle dieses Aberglaubens wie eine Krankheit über die entwurzelten Menschen unserer Zeit ergießen werde. Schon ein Jahr später, bei Herausgabe der 2. Auflage, mußte er sich gegen das Mißverständnis verwahren, als habe er die moderne Horoskopstellerei empfehlen wollen. Geholfen hat das auch nichts, denn der Unfug blüht heute mehr denn je in ungebildeten wie in „gebildeten" Kreisen. So weit sind wir heute wieder zurückgesunken, so wenig hat alle „Aufklärung" durch den Unterricht in den Naturwissenschaften gegen den Drang zum Mystisch-Geheimnisvollen vermocht, der nun einmal in den Herzen wohnt und die Geister beherrscht. Aberglaube auf der einen, völlige Veräußerlichung des Lebens auf der anderen Seite ist die Signatur unsrer Zeit. Ernstere Beschäftigung mit der Geschichte des geistigen Lebens allein kann uns frei machen von den Beschränktheiten der Gegenwart.

In diesem Sinne begrüße ich die von W. Gundel besorgte Neuauflage von Bolls feiner kulturgeschichtlicher Skizze. Pietätvoll ist der alte Text gewahrt: aber auf 120 Seiten „Nachträgen" hat der Herausgeber Erläuterungen und Ergänzungen hinzugefügt, die dem Leser, der tiefer in die Quellen eindringen und den augenblicklichen Stand der Forschung kennenlernen will, den Weg weisen. Daß auch die Ausstattung der 3. Auflage eine geradezu glänzende zu nennen ist und das Werk so dank der Initiative der „Bibliothek Warburg" aus der Sammlung, in der es früher erschienen war, herausgehoben wurde, wird man mit besonderer Befriedigung begrüßen. Für die 4. Auflage möge mir der verdienstvolle Herausgeber den Wunsch gestatten, daß die im Vorwort zur 3. Auflage erwähnten Todesdaten der beiden Verfasser richtig gestellt werden. C. Bezold ist nicht „im August" — ein solches Datum mag man bei vermißten Frontkämpfern passieren lassen —, sondern am 21. November 1923, und F. Boll ist nicht am 3., sondern am 10. Juli gestorben.

Berlin. J. Ruska.

K. Rühle, Physik für Mittelschulen und Anstalten mit verwandten Zielen. Ausgabe A für Knabenschulen. 2. Aufl. 264 S. 356 Fig. *RM* 4.40. Ausgabe B für Mädchenschulen und Knabenschulen mit verminderter Stundenzahl. 200 S. 275 Fig. *RM* 3.60. (Physikalisches Unterrichtswerk von K. Hahn.) Leipzig, B. G. Teubner.

Der Stoff ist nach Klassenstufen gegliedert und im Wesentlichen nach Darstellung und Form wie der von K. Hahn herausgegebene Grundriß der Physik, Unterstufe, gehalten. Es finden sich viele wertvolle Erweiterungen und Zusätze des Herausgebers, wie vor allem gute Denkaufgaben und Versuchsangaben, dazu ein ausführliches Kapitel über die Wetterkunde. Es sei noch erwähnt, daß unter den Beispielen für die Anwendungen der Physik das Fahrrad und die Nähmaschine ausführlich behandelt werden. — Das Buch wird wie das Hahnsche Unterrichtswerk desselben Verlages viele Freunde finden.

Hamburg. L. Müller.

Düsing-Wilde, Lehrbuch der Experimentalphysik für technische Lehranstalten und zum Selbstunterricht. 3. Aufl. 269 S. 385 Fig. Leipzig 1925, M. Jänecke. *RM* 4.65.

Obgleich das Buch schon in der dritten Auflage erschienen ist, dürfte es unbedingt notwendig sein, dasselbe bei einer Neuauflage einer gründlichen Durchsicht

und Verbesserung zu unterziehen. Eine sorgfältigere und moderne Darstellung der Physik läßt sich auch mit einfachen Mitteln durchführen; vor allem dürfen aber wichtige und schwierige Dinge wie Flettner-Rotor, elektrische Wellen, Glühkathodenröhren nicht nur kurz gestreift werden, sondern müssen dann schon der Auffassungsgabe des Schülers angepaßt ausführlicher dargestellt werden. Auch finden sich sachliche Irrtümer, die einer Berichtigung bedürfen.

Hamburg. L. Müller.

W. v. Ignatowsky, Die Vektoranalysis und ihre Anwendungen in der theoretischen Physik. Bd. 6 der Sammlung mathematisch-physikalischer Lehrbücher. Herausgegeben von F. Trefftz. Dritte Auflage. Teil I: Die Vektoranalysis. 110 S. Mit 27 Textfiguren. Teil II: Anwendungen der Vektoranalysis in der theoretischen Physik. 123 S. Mit 14 Textfiguren. Leipzig und Berlin 1926, B. G. Teubner. Kart. *RM* 5.60.

Die neue Auflage der bekannten Bändchen hat eine Reihe Änderungen erfahren, welche dem Fortschritt im Ausbau der Vektoranalysis Rechnung tragen. Im ganzen ist aber die Anlage und der Inhalt der gleiche geblieben. Zur Einführung in jenes wichtige Gebiet der theoretischen Physik sind sie zweifellos hervorragend geeignet.

Hamburg. W. Hillers.

Schäffer, Gothan, Frh. Stromer von Reichenbach, „Das Leben und seine Entwickelung.“ 563 S. mit 352 Abb. und 28 teils farbigen Tafeln. Berlin 1926, Walter de Gruyter. In Halbleder *RM* 36.—.

Dieser zweite Band des von Schmidt herausgegebenen Werkes „Natur und Mensch“ behandelt die Erscheinungen des Lebens auf der Erde. Die Dreiteilung des ersten Bandes ist auch hier beibehalten. Der erste Teil aus der Feder von Prof. Dr. C. Schäffer bringt eine allgemeine Biologie („Die Grundlagen des Lebens“), die bis zur Vererbungs- und Abstammungslehre durchgeführt ist. — In die „Entwicklung“ teilen sich zwei Verfasser: Prof. Dr. W. Gothan behandelt die Entwicklung der Pflanzenwelt durch alle Erdepochen hindurch, Prof. Dr. E. Frh. Stromer von Reichenbach die Entwicklung der Tierstämme. — Der letzte Teil, wieder von Schäffer, („Die heutigen Lebensformen“) bringt eine Biogeographie, in der also die Verteilung der Organismen über die Erde geschildert und auf ihre Ursache hin untersucht wird, und schildert die Beziehungen der verschiedenen Organismen zueinander.

Auch für diesen Band gilt, was für den ersten gesagt wurde: der inhaltlich gute und durchaus allgemeinverständliche Text ist von einem bewundernswert schönen und überreichen Bildmaterial begleitet, das sich im Unterricht aufs beste verwenden läßt.

Berlin-Steglitz. A. Ilgner.

M. Pasch, Mathematik am Ursprung. Gesammelte Abhandlungen über Grundfragen der Mathematik. 149 S. Leipzig 1927, Meiner. Geh. *RM* 8.—.

Das Buch vereinigt eine Reihe von Abhandlungen, die der Nestor der deutschen Grundlagenforscher in den letzten Jahren in philosophischen Zeitschriften veröffentlicht hat. Es sind das: 1. der starre Körper in der Geometrie, 2. die Begriffswelt des Mathematikers in der Vorhalle der Geometrie, 3. der Begriff des Differentials, 4. Begriffsbildung und Beweis in der Mathematik, 5. Dimension und Raum in der Mathematik, 6. die axiomatische Methode in der neueren Mathematik.

Es ist überaus reizvoll, den Darlegungen von Pasch zu folgen und zu sehen, wieweit der Empirismus die Grundlagenfrage lösen kann. Von unmittelbarer Bedeutung für den Unterricht ist der Aufsatz über das Differential, in dem sich der Verfasser mit Vaihinger auseinandersetzt.

Göttingen. W. Lietzmann.

A. Patzig, Politische Arithmetik. Leipzig und Berlin 1927, B. G. Teubner. Kart. *ℛℳ* 3.20.

Auf etwas über 100 Seiten wird eine zusammenhängende Darstellung des Gebietes der politischen Arithmetik, d. h. der Lehre von den Zinsen, Renten und Anleihen gegeben, wobei der börsenmäßige (nicht arithmetische) Teil unberücksichtigt bleibt. Die Einteilung des Stoffes ist durch die drei obigen Stichworte gegeben. Den breitesten Raum nimmt das Anleihewesen ein, und hier ist es besonders das Kapitel über Tilgung und Kursberechnung, das, mit einzelnen Abstrichen, neben den beiden ersten Abschnitten des Buches auch im Unterricht verwertet werden kann. Sehr zum Vorteil gereicht es dem Werkchen, daß Verf. nicht die landläufigen, stark ausgetretenen Wege geht.

Einige Schönheitsfehler dürften in der Neuauflage verschwinden, z. B. der Lapidarstil auf S. 1. Wenn dadurch auch wohl kaum Irrtümer erweckt werden können, da das Studium des Werkes immerhin gewisse mathematische Kenntnisse voraussetzt, so dürfte eine ausführlichere Wiedergabe der Regeln nicht von Schaden sein. Sie könnte auf Kosten der Weitschweifigkeit auf S. 7 ohne Vermehrung des Umfangs des Buches erfolgen.

Viersen. Brettar.

P. Luckey, Nomographie. (Mathemat.-Physikal. Bibliothek. Bd. 59/60.) Praktische Anleitung zum Entwerfen graphischer Rechentafeln mit durchgeführten Beispielen aus Wissenschaft und Technik. 57 Figuren im Text und 48 Aufgaben. 2. neubearbeitete und erweiterte Aufl. der „Einführung in die Nomographie" 2. Teil. Leipzig 1927, B. G. Teubner. Kart. *ℛℳ* 2.40.

„Die Zeichnung als Rechenmaschine", der zweite Teil der „Einf. in die Nomographie" desselben Verfassers ist mir unbekannt, so daß nicht festgestellt werden kann, welche Unterschiede zwischen der vorliegenden Nomographie und der ursprünglichen Arbeit bestehen. Wie persönliche Erfahrung mich lehrte, besitzen wir in den beiden Bändchen ein Werk, das mit Erfolg in den mathematischen Arbeitsgemeinschaften benutzt werden kann und deswegen in keiner Schulbibliothek fehlen sollte. Aber auch dem angehenden und sogar dem erfahrenen Techniker wird das Buch gute Dienste leisten. Wenn man, wie Unterzeichneter, während des Krieges sich die „Tafeln mit mehreren Eingängen" sozusagen aus dem Stegreif konstruieren mußte und nur in ganz günstigen Fällen auf die zwar grundlegenden aber auch umfangreichen Arbeiten von d'Ocagne und Mehmke zurückgreifen konnte, so muß man unumwunden zugeben, daß Verf. eine recht fühlbare Lücke auszufüllen verstand. Im übrigen sei auf die ausführliche Besprechung der 1. Aufl. in Bd. 55 dieser Zeitschr. S. 41/43 hingewiesen.

Viersen. Brettar.

G. Schewior, Gestirnkoordinaten und Beiwerte für das Jahr 1927. Mit einigen Hilfswerten für die geographische Ortsbestimmung. Stuttgart 1927, Konrad Wittwer, Kart. *ℛℳ* 3.—.

Es handelt sich um eine tabellarische Zusammenstellung, die alljährlich neu erscheinen soll und deren Verwendungsgebiet auf Grund der „Richtlinien" auch die Oberstufe der höheren Schulen streift. Auf den Inhalt im einzelnen einzugehen erübrigt sich; nur soviel sei erwähnt, daß man die zu geographischen Ortsbestimmungen notwendigen Hilfsgrößen in übersichtlicher Anordnung und gutem Druck vorfindet. Eingehende Stichproben und Vergleiche mit den mir zur Verfügung stehenden — vom Verf. nicht erwähnten — Tabellenwerken, wie z. B. des „Annuaire des longitudes", sprechen für fehlerfreien Satz.

Es wäre zu begrüßen, für Schulzwecke wenigstens, wenn Verf. für 1928 ein Verzeichnis der geographischen Koordinaten der deutschen Städte mit höheren Schulen, zumindest aber der deutschen Universitätsstädte anfügen würde.

Viersen. Brettar.

Zeitschriftenschau.

Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften. — Jahrg. 1927, Nr. 10. — H. Wieleitner, Mathematische Quellenstudien im Unterricht. — G. Wolff, Mathematik und Naturwissenschaften in den Bildungswegen Amerikas. (Fortsetzung.) — A. Haag, Die Anschaulichkeit der nichteuklidischen Geometrien.

Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. — 36. Bd., 9.–12. Heft. — H. Hasse, Bericht über neuere Untersuchungen und Probleme aus der Theorie der algebraischen Zahlkörper. (Teil Ia.) — A. Ostrowski, Über das Poissonsche Integral und fast stetige Funktionen. — A. Korn, Wellengleichung und Telegraphengleichung. — H. Wäsche, Bemerkung zu einem Satze von Hartogs. — E. Jacobsthal, Bemerkungen zum Vitalischen Satze. — F. Löbell, Eine Konstruktion des Punktepaares, das zu zwei gegebenen Punktepaaren der komplexen Zahlenebene harmonisch liegt.

L'enseignement mathématique. — 1927. — A. Buhl, Le cinquantenaire scientifique de P. Paul Appell. — P. Appell, Sur une propriété de la constante d'Euler. — G. Bouligang, Sur la comparaison de certains procédés de sommation des séries divergentes. — E. Laine, Sur l'integration des équations différentielles. — A. Bloch, Sur une nouvelle et importante généralisation de l'équation de Laplace. — R. C. Young, Les fonctions additives d'ensemble, les fonctions de point à variation bornée et la généralisation de la notion d'espace à n-dimensions. — A. Roussel, Sur les géodésiques de certains éléments linéaires. — V. Hlavaty, Sur les déplacements isohodoïques. — A. Streit, Sur le triangle des pieds des hauteurs.

Annalen der Physik. — IV. Folge, 83. Bd., 8. Heft. — E. Brüche, Wirkungsquerschnitt und Molekülbau. — C. Ramsauer, Über den Wirkungsquerschnitt der Kohlensäuremoleküle gegenüber langsamen Elektronen. — L. Sokolow, Eine Präzisionsmethode zur Messung der magnetischen Permeabilität bei sehr schnellen Schwingungen. — A. Schrammen, Die Hyperfeinstruktur der Terme des Cadmiumspektrums. — W. Kast, Eine Berichtigung „Über den Aufbau der nematischen Schmelzen". — A. Smekal, Über die Größenordnung der ideal gebauten Gitterbereiche in Realkristallen. — A. Bühl, Über wasserfallelektrische Wirkung an Lösungen ein-einwertiger Elektrolyte.

84. Bd., 1. Heft. — R. A. Sawyer und F. Paschen, Das erste Funkenspektrum des Aluminiums Al II. — E. Zachmann, Über die Diffusion langsamer Elektronen (2—30 Volt) in Wasserstoff und Argon. — R. Bechmann, Die Methode von A. A. Michelson zur Größenbestimmung von Fixsternen und ihre Übertragung auf Ultramikronen. — E. Rupp, Über die Polarisation des Kanalstrahllichtes II. — P. Selényi, Über die elektrolytische Zersetzung des Glases. — E. Haak, Über Glimmlichtintermittenzen. — E. Rupp, Zur Frage nach den Ladungszuständen der Atome vor der Lichtemission. — R. Tomaschek, Bemerkung zu meinen Versuchen zur Auffindung elektrodynamischer Wirkungen in großen Höhen. — M. Willstätter, Zur Berechnung des rotationssymmetrischen Strahlungsfeldes. — H. Klinkhardt, Messung von wahren spezifischen Wärmen bei hohen Temperaturen durch Heizung mit Glühelektronen.

Zeitschrift für Physik. — 44. Bd., 8. Heft. — W. Bothe, Bemerkung zur Zerstreuung magnetischer Elektronen. — H. Rausch v. Traubenberg und S. Levy, Über den Einfluß schwacher Magnetfelder auf den Polarisationszustand des von Wasserstoff-Kanalstrahlen ausgesandten Lichtes. — K. E. Dorsch und Hartmut Kallmann, Über die Ionisationsvorgänge im Wasserstoff, Stickstoff und Argon. — B. Trumpy, Übergangswahrscheinlichkeiten im Lithiumatom. — P. Dirac, Über die Quantenmechanik der Stoßvorgänge. — A. L. Patterson, Über das Gibbs-Ewaldsche reziproke Gitter und den dazugehörigen Raum. — E. N. Gapon, Über ultrarote Absorptionsspektra der Flüssigkeiten. — G. R. Levi, Hexagonale Kristallstruktur des Thalliums.

44. Bd., 9./10. Heft. — J. Franck und H. Kuhn, Über Absorption und Fluoreszenz von Silberbromid- und Silberchloriddampf. — E. Grüneisen und E. Goens, Untersuchungen an Metallkristallen. V. Elektrizitäts- und Wärmeleitung von ein- und

vielkristallinen Metallen des regulären Systems. — A. Carrelli und P. Pringsheim, Die Bildungswärme der K_2-Moleküle. — L. S. Ornstein, M. Coelingh und J. G. Eymers, Intensitätsverhältnis für Dubletts mit größeren Frequenzdifferenzen. — W. Kutzner, Über das Wahrscheinlichkeitsgesetz in der radioaktiven Strahlung. — W. Braunbek, Eine gittertheoretische Berechnung der elektrolytischen Leitfähigke des Steinsalzkristalls. — W. Friedrich und G. Goldhaber, Zur Frage der azimutalen Intensitätsverteilung der gestreuten Röntgenstrahlung. — V. Kondratjew und A. Leipunsky, Über die kritischen Spannungen des Jods. — A. Terenin, Optische Dissoziation der Salzmoleküle. — J. H. van der Tuuk, Höhere Multipletts im Röntgenspektrum. — A. Korn, Schrödingers Wellenmechanik und meine mechanischen Theorien. Berührungspunkte und Divergenzen. — W. Kolhörster, Notiz zum sogenannten Barometereffekt der Höhenstrahlung. — N. v. Kolossowsky, Berichtigung zu der Abhandlung „Die experimentelle Begründung des dritten Hauptsatzes der Thermodynamik uud seiner Verallgemeinerung".

44. Bd., 11/12. Heft. — H. Fränz, Ein Meßinstrument für starke α-Strahlenpräparate. — H. Rausch von Traubenberg und R. Gebauer, Über das Verhalten der Lichtemission von Wasserstoffkanalstrahlen bei ihrem Übergang aus einem elektrischen Felde in einen feldfreien Raum. — A. Landé, Zur Wellenmechanik der Kontinua und Elektrodynamik. — K. Lanczos, Zur Dynamik der allgemeinen Relativitätstheorie. — A. Unsöld, Über die Struktur der Fraunhoferschen Linien und die Dynamik der Sonnenchromosphäre. — S. Aoyama, K. Kimura und Y. Nishina, Die Abhängigkeit der Röntgenabsorptionsspektren von der chemischen Bindung. — T. Hori, Über die Analyse des Wasserstoffbandenspektrums im äußersten Ultraviolett. — Fr. Goos und P. P. Koch, Über eine Neukonstruktion des registrierenden Mikrophotometers. — R. Hilsch, Die Absorptionsspektra einiger Alkali-Halogenid-Phosphore mit Tl- und Pb-Zusatz. — E. A. Hylleraas, Gleichgewichtslage der Atome, Doppelbrechung und optisches Drehungsvermögen von β-Quarz. — W. Prokofiew und G. Gamow, Anomale Dispersion an den Linien der Hauptserie des Kaliums. — A. Isakson, Zum Aufbau der Schrödingerschen Gleichung.

45. Bd., 1./2. Heft. — A. Smakula, Einige Absorptionsspektra von Alkalihalogenidphosphoren mit Silber und Kupfer als wirksamen Metallen. — C. Runge † und R. Mannkopff, Über die Beseitigung des Astigmatismus beim Rowlandschen Konkavgitter. — W. Schütz, Über natürliche Breite und Verbreiterung der D-Linien des absorbierenden Natriumdampfes durch Dampfdichte und Druck fremder Gase. — V. Kondratjew, Über den Mechanismus einiger chemischer Leuchtreaktionen. — R. Fürth, Über Diffusion im Schwerefelde. — M. Herzberger, Die Gesetze erster Ordnung in optischen Systemen. — J. R. Katz, Einfluß von Form und Polarität der Moleküle auf das Röntgenspektrum von Flüssigkeiten. 1. Teil. Bei welchen Substanzen stimmt die Beziehung von Keesom? — N. Kapzov und S. Gwosdower, Über die verschiedenen Schwingungsarten, die von einer Elektronenröhre in der Schaltung von Barkhausen und Kurz erzeugt werden. — G. I. Pokrowski, Über die Ursachen der Depolarisation des Lichtes in dispersen Systemen. — G. I. Pokrowski, Zur Frage nach der Intensität von Spektrallinien. — W. Tollmien, Bemerkungen zu den Arbeiten von M. Broszko.

45. Bd., 3./4. Heft. — L. A. Sommer, Über den Zeemaneffekt und die Struktur des Bogenspektrums von Rhodium. — R. O. Herzog und W. Jancke, Vergleich von Röntgenogrammen organischer Stoffe im festen und flüssigen Zustand. — H. Widmann, Untersuchungen über die Rekristallisation bei Silber und Kupfer. — O. Klemperer, Über die Auflösung Wilsonscher Alphastrahlbahnen in Einzeltröpfchen. — E. Wertheimer, Über den Zusammenhang zwischen der Temperatur und der Energie eines Gases. II. Teil. — P. Hoefer, Galvanische Polarisation und Nervenreizung. — H. Mandel, Zur Herleitung der Feldgleichungen in der allgemeinen Relativitätstheorie.

45. Bd., 5./6. Heft. — H. Faxén und J. Holtsmark, Beitrag zur Theorie des Durchganges langsamer Elektronen durch Gase. — G. Kornfeld und W. Steiner, Die Lichtabsorption in trockenem Chlor. — E. Hulthén, Feinstruktur und Elektronenterme einiger Bandenspektren. — Z. Bay und W. Steiner, Das kontinuierliche Wasserstoffspektrum als Lichtquelle für Absorptionsversuche im Ultraviolett. — W. Kutzner, Über Szintillationsspektren. — A. L. Narayan und K. R. Rao, Serien im ersten Funkenspektrum des Zinns (Sn II). — E. F. M. van der Held und B. Baars,



Über den Parallelismus der Schwärzungskurven photographischer Platten bei Zeitvariation. — J. Beckenkamp, Elektrische und magnetische Erscheinungen in Kristallen und deren Bedeutung für die allgemeine Physik. — N. Seljakow und G. Kurdjumow (röntgenographischer Teil) und N. Goodtzow (metallographischer Teil), Eine röntgenographische Untersuchung der Struktur des Kohlenstoffstahls. I. Teil. — W. A. Sokolow, Die Gesetzmäßigkeiten des radioaktiven Zerfalls. — M. Weingeroff, Die Änderung der Zahl der Dispersionszentren des Natriumdampfes mit der Temperatur des gesättigten Dampfes. — L. Landau, Das Dämpfungsproblem in der Wellenmechanik. — Gr. Landsberg, Molekulare Lichtzerstreuung in festen Körpern. II. Abhängigkeit der Intensität des zerstreuten Lichtes von der Temperatur. — E. Friederich, Bemerkungen zu der Arbeit des Herrn A. Reis, Karlsruhe, „Über den Mechanismus der elektrolytischen Stromleitung in Kristallen". — K. Becker, Zur Kristallstruktur des Thalliums.

Physikalische Zeitschrift. — 28. Jahrg., 17. Heft. — R. Skancke und E. Schreiner, Über die Dielektrizitätskonstante verdünnter wäßriger Elektrolytlösungen. — R. Seeliger und H. Schmick, Studien über den Mechanismus des Lichtbogens. — S. C. Kar, Die Elektrodynamik im Gefüge der Einsteinschen Gravitationstheorie. — H. Lorenz, Wärmeübergang und Turbulenz.

28. Jahrg., 18. Heft. — A. Meißner, Untersuchungen am Quarz. — D. Nasledow und P. Scharawsky, Die Abhängigkeit der Gesamtintensität der Röntgenstrahlung von der Stromstärke in der Röntgenröhre. — A. Haas, Über die Ableitung der fundamentalen relativitäts-theoretischen Sätze aus der Broglieschen Hypothese der Phasenwellen. — E. Badareu, Über die Wirkung der Stöße langsamer Kationen auf Lithiumchlorid im Hochvakuum. — H. Mayer, Zur Ionenbeweglichkeit in Gasmischungen.

Die Naturwissenschaften. — 15. Jahrg., 35. Heft. — F. Massardi, Versuche und Forschungen Voltas über die gleichförmige Ausdehnung der Luft und des Wasserdampfes durch die Wärme und über die Dampfspannungen.

15. Jahrg., 37. Heft. — R. A. Sawyer, Das Bor-Bogenspektrum. — A. v. Grosse, Die Konzentrierung und Isolierung des Elementes 91. — M. Pirani und H. Schönborn, Einige Beobachtungen über Elektronenströme in gaserfüllten Räumen. — H. Fitting, Über die Löslichkeit nichtrostender Stahle in destilliertem Wasser.

15. Jahrg., 38. Heft. — R. Emden, The Internal Constitution of the Stars. Randbemerkungen. — E. H. Riesenfeld, Das Ozon, seine Bildung und Verwendung. — H. Bethe, Über die Streuung von Elektronen an Kristallen. — F. Weigert und F. Löhr, Der Gehalt photographischer Schichten an metallischem Silber. — K. E. Dorsch u. H. Kellmann, Spaltung von Wasserstoffmolekülen durch Elektronenstoß und Nachweis der entstehenden Wasserstoffatome auf chemischem Wege.

15. Jahrg., 39. Heft. — O. Hahn u. E. Walling, Eine Neubestimmung der Halbwertszeit des Protaktiniums und dessen Gehalt in Uranmineralien und Uranrückständen.

Zeitschrift für technische Physik. — 8. Jahrg., 9. Heft. — G. Grundmann, Die Geschichte der Glasmacherkunst im Hirschberger Tale. — J. Tausz u. G. Hornung, Über die Lichtbrechung in Gasen. — M. Bergsträßer, Bestimmung der beiden elastischen Konstanten von plattenförmigen Körpern. — C. Cranz u. K. Scheel, Ballistische Paradoxen. — G. Hauffe, Feldlinien und Linien konstanter Feldstärken. — A. Schulze, Über einige physikalische Eigenschaften des Kobalts. — K. Hinz, Spannbolzenschwingungen bei großen Asynchronmotoren. — M. Grübler, Die Begriffe Masse und Gewicht.

Aus verschiedenen Zeitschriften. — Sonderdrucke. — G. Hoffmann, Das Verhalten von Stoffen verschiedener Ordnungszahl gegenüber der Heßschen Ultra-γ-Strahlung und die Eigenaktivität der Elemente (Schriften der Königsberger gelehrten Gesellschaft 4. Jahr, Heft 1). — A. Brommer, Der Unterricht in der Himmelskunde an den österreichischen Mittelschulen (Die Himmelswelt **37** [1927] Heft 10/11). — H. Voigts, Zur Gestaltung des Unterrichts in der Astronomie und den verwandten Fächern an den höheren Schulen (Ebenda). — H. Sager, Die Alkoholfrage im Rechenunterricht (Alkohol und Erziehung Bd. I, Heft 3, 1927).

Eingegangene Lehrbücher und Kataloge.

B. G. Teubners Verlag auf dem Gebiete der Mathematik und ihre Anwendungen o. J. (1927).

Neuerscheinungen.[1])

Sammelwerke.

Sammlung Göschen. Berlin, de Gruyter. Geb. RM 1.50.
970. R. Baldus, Nichteuklidische Geometrie, hyperbolische Geometrie der Ebene. 152 S. 1927.

Mathematisch-Naturwissenschaftlich-Technische Bücherei. Berlin, Salle.
Bd. 10. R. Fetscher, Abriß der Erbbiologie und Eugenik. 155 S. 1927. Geb. RM 4.—.
Bd. 15. Gelfert, Der Kreisel und seine Anwendungen. 96 S. 1927. Geb. RM 2.80.
Bd. 14. H. Voigts, Luftelektrizität. 78 S. 1927. Geb. RM 2.40.

Mathematisch-Physikalische Bibliothek, herausgeg. von W. Lietzmann und A. Witting. Leipzig, B. G. Teubner. Kart. je RM 1.20, Doppelbändchen kart. je RM 2.40.
Bd. 73. E. Wicke, Konforme Abbildungen. 59 S. 1927.

Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften. Leipzig, Akademische Verlagsgesellschaft M. B. H.
Nr. 221. Johann Alfons Borelli, Die Bewegung der Tiere. Herausgeg. von M. Mengeringhausen. 69 S. 1927. RM 3.60.
Nr. 223. Robert Mayer, Beiträge zur Dynamik des Himmels und andere Aufsätze. Herausgeg. von B. Hell. 104 S. 1927. RM 4.80.
Nr. 222. G. Wiedemann u. R. Franz, Über die Wärmeleitungsfähigkeit der Metalle. Herausgeg. von A. Wehnelt. 39 S. 1927. RM 2.80.

Mathematische Wissenschaft.

G. C. Evans, The logarithmic potential, discontinuous Dirichlet and Neumann problems. 150 S. New York 1927, American Mathematical Society. 150 S. 1927. $ 2.—.

R. Fueter, Vorlesungen über die singulären Moduln und die komplexe Multiplikation der elliptischen Funktionen. 2. Teil. S. 143—359. Leipzig 1927, B. G. Teubner. Geh RM 10.—.

A. G. Webster, Partial differential equations of mathematical physics ed. by S. J. Plimpton. 440 S. New York, Stechert, und Leipzig 1927, B. G. Teubner. Geh. RM 25.—.

Mathematischer Unterricht.

Degenhart-Fick-Sellien, Mathematisches Unterrichtswerk für höhere Schulen. E. Sellien, Rechenbuch. Teil II. 162 S. München 1927, Oldenbourg. Geb. RM 2.30.

Močnik-Hočevar-Dintzl, Mathematisches Unterrichtswerk für Mittelschulen. Arithmetik für die IV. Klasse. 141 S. Wien 1927, Hölder-Pichler-Tempsky. Geb. RM 3.05.

Naturwissenschaften.

F. Albrecht, H. Voigts und A. Paech, Grundzüge der Meteorologie und ihre unterrichtliche Behandlung in Volks- und höheren Schulen. 170 S. u. 10 Tafeln. Berlin 1927, Salle. Geb. RM 10.—.

---

1) An dieser Stelle werden alle bei der Schriftleitung einlaufenden Bücher, soweit sie überhaupt den Stoffkreis der Zeitschrift berühren, angezeigt. Eine ausführliche Besprechung der unverlangt einlaufenden Bücher behält sich die Schriftleitung vor. Eine Rücksendung kann in keinem Falle erfolgen.

Die Schriftleitung.

H. J. Gramatzki, Leitfaden der astronomischen Beobachtung. 111 S. Berlin 1928, Kart. RM 3.50.
L. Hartmann, Aus Georg Simon Ohms handschriftlichen Nachlaß. 255 S. München 1927, Bayerland-Verlag.
R. G. Loyaste, Fisica general. Tomo I. 2. Ed. 388 S. La Plata 1927, Facultad de ciencias fisiso-matematicas. Geh. $ 8.—.
G. Weber, Das Wesen der Materie und der Aufbau der Atome. Ein einheitliches physikalisches Weltbild. 149 S. Leipzig 1927, Otto Hillmann. Geb. RM 10.—.

Lustige Ecke.

66. Aus der Bruchrechnung. Für die mannigfache Freude, die Sie mir mit Ihrer „Lustigen Ecke" gemacht haben, möchte ich mich etwas revanchieren, indem ich Ihnen ein kleines Vorkommnis mitteile, das mir heute (in meiner UI) passiert ist. Ich mußte mich nach den Befreiungen vom Turnen erkundigen; ein Schüler, namens Stamm, gab an, er könne eines Bruches wegen nicht mitturnen; da ich mich nicht erinnerte, daß er früher mit diesem Übel behaftet gewesen war, fragte ich ihn, ob dieser Bruch ein „echter" oder ein „unechter" sei. Da kam von einem hilfsbereiten Mitschüler die Antwort: „Natürlich ein echter, es ist doch ein Stammbruch".

Kassel. H.

67. Luftige Mathematik. Bei einem Lehramtsexamen Januar 1926 wurde eine, später in einer Zeitschrift veröffentlichte Aufgabe gestellt, die sich mit einem Kegel von 25 cm Grundkreisradius, 50 cm Höhe und 1 kg Gewicht befaßt. Aus welchem Stoff mag der Kegel wohl gewesen sein?

Kop. Wa.

Vermischtes. — Sprechsaal.

Als Gedächtnisstütze gibt E. Fischer für sin 0°, sin 30°, sin 45°, sin 60°, sin 90° die Reihe an:

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{0},\quad \tfrac{1}{2}\sqrt{1},\quad \tfrac{1}{2}\sqrt{2},\quad \tfrac{1}{2}\sqrt{3},\quad \tfrac{1}{2}\sqrt{4}.$$

Analog gilt für tg 0°, tg 30°, tg 45°, tg 60° und tg 90°:

$$\tfrac{1}{3}\sqrt{3^{-\infty}},\quad \tfrac{1}{3}\sqrt{3^1},\quad \tfrac{1}{3}\sqrt{3^2},\quad \tfrac{1}{3}\sqrt{3^3},\quad \tfrac{1}{3}\sqrt{3^{+\infty}}.$$

Oppeln. E. Freund.

Durch Zufall fand ich den Näherungswert $\pi \approx \frac{21 + 4\sqrt{2}}{6\sqrt{2}} \approx 3,1415.$

Kottbus J. Mahrenholz.


Digitized by Google

Für die Schriftleitung verantwortlich: W. Lietzmann in Göttingen.

Druck von B. G. Teubner in Leipzig. Ausgegeben am 30. Dezember 1927

Lehrbücher und Aufgabensammlungen für den mathematischen Unterricht an höheren Lehranstalten



Prüfungsexemplare stehen zur Verfügung

Leipzig · B. G. Teubner · Berlin

Math. III. 27. 90. Ausgegeben im März 1927

Inhaltsübersicht

Das in langjähriger Arbeit geschaffene, bereits seit fünfzehn Jahren im Unterricht erprobte

Lietzmannsche Unterrichtswerk

hat sich von Anfang an die gleichen Ziele gesteckt, die nachher in den revidierten Meraner Lehrplänen und in den preußischen Richtlinien ihren Ausdruck gefunden haben. In den in rascher Folge erschienenen Neuauflagen haben die Verfasser, ohne am Grundgedanken zu ändern, den mit dem Werke gemachten Erfahrungen und den Anforderungen der Lehrpläne Rechnung getragen und sich auch die drucktechnische Ausgestaltung angelegen sein lassen.

I. Gliederung:

1. Um die **geistige Selbsttätigkeit** des Schülers zu fördern, mußte die **Aufgabensammlung** in den Vordergrund gestellt werden und nicht nur der Anwendung, sondern auch der Erarbeitung des Lehrgutes dienen.
2. Die **Leitfäden** wollen Lehrer und Schüler lediglich die knappe Zusammenstellung des in Schule und Haus erarbeiteten Stoffes abnehmen.
3. Zweck der **Ergänzungshefte** ist, Sonderaufgaben herauszuheben und dem Unterricht in dieser Hinsicht Hilfen zu bieten.

II. Methode:

4. Aufgabe und Leitfaden zielen darauf hin, im Schüler das **Verlangen nach mathematischer Begründung** (schon vom Rechnen ab) und das **Gefühl für mathematische Strenge** allmählich zu wecken, dabei auch die der Schule gezogenen Grenzen deutlich erkennbar zu machen.
5. Geometrischer und arithmetischer Stoff dient der **Erziehung zu räumlicher Anschauung.** Gerade um dieses Zwanges zu eigener anschaulicher Erfassung willen ist oft scheinbar an Figuren gespart und auf Buntheit verzichtet.
6. Die **Erfassung des Größenbegriffes** und die Durchsetzung des ganzen Lehrstoffes mit den Begriffen der **Veränderlichkeit, Bewegung, gegenseitiger Abhängigkeit** (Funktion) war für Wahl, Gliederung und Gestaltung maßgebend.
7. Bei der Zusammenstellung der Aufgaben waren entscheidend: **Wirklichkeitsnähe der praktischen Anwendungen, Verbindungen mit den Nachbargebieten, Einblicke in die geschichtliche Entwicklung,** Weckung des **Interesses durch Scherz und Überraschung.**

III. Stoff:

8. Das Unterrichtswerk legt den preußischen Höchstlehrplan zugrunde, berücksichtigt also alle einschlägigen Einzelgebiete. Es hält sich aber bei ihrer Behandlung im Rahmen des in der Schule wirklich Erreichbaren.
9. Die Aufgabensammlungen bieten leichte und schwere Aufgaben zur Wahl, so daß es dem Leser frei steht, aus der Fülle des Gebotenen das der einzelnen Klasse Gemäße auszuführen.

Aus den Besprechungen und Urteilen über Lietzmann, Mathematisches Unterrichtswerk

„Ich schätze das Buch sehr. **Die methodische Anlage ist mustergültig.** Die Aufgaben selbst entsprechen den neuen Anforderungen und bieten auch reichen Stoff für die Übung des funktionalen Denkens . . .“
(Rektor **Sachs**, Gesecke, Westf. Höhere Stadtschule.)

„Ich habe das Buch einer Prüfung unterzogen. Es eignet sich **vorzüglich für den Arbeitsunterricht. Anordnung und Ausstattung** gefallen mir **ausgezeichnet.** Ich werde seine Einführung zu Ostern 1926 beantragen.“ (Studienassessor **F. Engelke**, Buxtehude. Realschule.)

„Mein Urteil will ich kurz dahin zusammenfassen, daß ich das Werk wohl **für das beste der augenblicklichen Unterrichtsliteratur** halte und es von jetzt ab stets verwenden werde.“
(Studienreferendar **Dr. E. Schneider**, Dortmund. Oberrealschule.)

„Im übrigen drängt es mich, dem Verlage mitzuteilen, daß ich **mit dem hier eingeführten ‚Lietzmann‘ sehr zufrieden bin. Das Werk erleichtert die restlose Durchführung des Arbeitsschulprinzips in der Mathematik außerordentlich.** Ich empfehle dasselbe, wo sich Gelegenheit bietet.“
(Studienrat **Dr. W. Burmeister**, Neukloster i. Meckl. Aufbauschule.)

„Das mir freundlichst zugesandte Unterrichtswerk von Lietzmann, Ausgabe B, hat meine **vollste Anerkennung** gefunden. Man darf es wohl als **eine geniale Schöpfung** bezeichnen, **neben die ein anderes Werk nicht mehr gestellt** werden kann. — Durch die zahlreichen **‚praktischen Übungen‘** und **‚Aufgaben aus der Geschichte der Mathematik‘** wird der **Selbständigkeit der Schüler** weiter Spielraum gelassen. Das Werk **erfüllt damit in glänzender Weise die Forderungen,** welche der **moderne Arbeitsunterricht** an Lehrer und Schüler stellt.“ (Studienassessor **A. Kakuschke**, Gottesberg. Höhere Schule.)

„. . . Das Unterrichtswerk von Lietzmann hat selbstverständlich **beste Aufnahme** gefunden. Man kann es wohl **als das Lehrbuch der Mathematik bezeichnen.**“
(Studienassessor **Dr. W. Dahmen**, Rheinbach. Gymnasium.)

„Die Herren Fachkollegen haben mit mir unter den mathematischen Unterrichtsbüchern keines gefunden, welches uns hätte besser zusagen können, und so war unser **Entschluß einstimmig, die Einführung** des ‚Lietzmann‘ beim Prov. Schulkollegium nachzusuchen.“ (Studienrat **E. M. Pleuß**, Düsseldorf. Luisenschule.)

„. . . Und schließlich sei noch erwähnt, daß von Anfang an die Fühlung mit der Wissenschaft gesucht ist. Der Feuerbachsche Kreis und ähnliche Dinge werden schon früh behandelt, und die Einführung des Winkels erfolgt beinahe unbewußt und ohne die bekannten Schwierigkeiten. So haben wir es mit einem **durchaus neuartigen Werk** zu tun, einem Werk, das uns einer neuen Schulgeometrie entgegenführt, einem Werk, **dessen Vorzug liegt in der deutschen Wissenschaftlichkeit, in der deutschen Eigenart und in der deutschen Gründlichkeit.**“ (Studiendirektor Dr. G. Wolff in der **„Monatsschrift f. höh. Schulen.“**)

„. . . Im übrigen habe ich mich überzeugt, daß das Lietzmannsche Werk **ausgezeichnet aufgebaut** ist und eine **Fülle von Anregungen** gibt, die es für den Unterricht zu einem **vorzüglichen Hilfsmittel** machen.“
(Studienassessor **Dr. E. Boerma**, Wunstorf. Aufbauschule.)

Rechenbuch:

„Ich bin zu dem Ergebnis gekommen, daß das Rechenbuch von Fischer in der Reihe der Rechenbücher für höhere Schulen **einen der ersten Plätze, wenn nicht überhaupt den ersten einnimmt.**“
(**Dr. G. Proebsting**, Weidenau/Sieg. Oberrealschule.)

„. . . Die geradezu **bewundernswerte Vielseitigkeit der Aufgaben** ist an verschiedenen Stellen noch erhöht worden. Um die Leistung des Verfassers recht zu würdigen, denke man nur einmal daran, welchen Charakter im allgemeinen noch vor kurzer Zeit, etwa 1910, die üblichen Rechenbücher hatten. Wie bei den übrigen Bänden dieses Unterrichtswerkes ist auch hier zwischen die eigentlichen Rechenaufgaben durch ungemein viele Fragen eine Art vollständig ausgearbeiteter Lehrgang eingeflochten. Deshalb wird auch der Lehrer bei seiner Vorbereitung mit größtem Gewinn die vorliegenden Bücher beachten; besonders für den Anfänger bedeutet dies eine große Erleichterung, aber auch der Erfahrene wird gern aus diesem ungeheuren Reichtum schöpfen. . .“
(Studienrat B. Kerst in der **„Zeitschr. f. d. mathem. u. naturw. Unterr.“**)

„. . . **daß die Auswahl der Aufgaben gut, d. h. lebensnah und knapp ist.** Die methodischen Hinweise sind so kurz wie möglich, was ich als einen großen Vorzug betrachte. Die Zusammenstellung der Rechenregeln: Rechenvorschriften in dem Leitfaden von Richter finde ich sehr zweckmäßig.“
(Studienrat **K. Rohde**, Neurode. Progymnasium.)

Aufgabensammlung für Arithmetik, Algebra und Analysis:

„Die arithmetische Aufgabensammlung ist schon seit 9 Jahren an unserer Anstalt in Gebrauch. **Auswahl und Anordnung sind unübertroffen.** Die Sammlung vereinigt in sich die altbewährten Eigenschaften des alten ‚Bardey‘ mit den **gediegenen, modernen und doch abgeklärten Anschauungen Lietzmanns.** Auch die geometrische Aufgabensammlung ist vorzüglich.“ (Studiendir. **Dr. W. Kreft**, Plettenberg. Realschule.)

„Die **Methodik des Buches**, die **Form der Aufgaben**, die beigefügten **Figuren**, **alles ist vollkommen neu und**, wie gleich hinzugesetzt werden mag, **vortrefflich.** Daß die Aufgabensammlung ein Produkt langer und gründlicher Arbeit ist, merkt man überall: an der Einteilung des Stoffes, den didaktisch sehr geschickten Übergängen **vom Leichten zum Schwereren**, der gut gelungenen **Verwebung der Infinitesimalrechnung** in das Aufgabenmaterial usw. Gelegentliche **historische Bemerkungen und Aufgaben** aus alter Zeit machen die Sammlung abwechslungsreich und interessant.“ (**Monatsschrift für höhere Schulen.**)

„Den Bardey-Lietzmann, Reformausgabe B, benutze ich im Unterricht seit 1914 und die ‚Geometrische Aufgabensammlung‘ von Lietzmann, Ausgabe B, seit 1916. Beide Bücher sind mir **liebe Freunde** geworden . . . Ich muß sagen, daß ich bis jetzt noch nie ein Lietzmannsches Buch aus der Hand gelegt habe, ohne mich in dieser oder jener Hinsicht bereichert zu fühlen. Der Fachmann muß immer wieder seine helle Freude haben über **die Menge von Erfahrung und pädagogischem Geschick**, die in diesem Buch enthalten ist, und besonders auch darüber, wie es Herrn Lietzmann gelingt, bei Lehrern und Schülern immer wieder den Eindruck zu machen, daß die Mathematik keine weltabgewandte, sondern **eine aus dem Leben hervorgegangene und für das Leben ungemein nötige Wissenschaft ist.**“ (Prof. **Dr. Stange**, Einbeck in Hannover. Realgymnasium.)



Aus den Besprechungen und Urteilen über Lietzmann, Mathematisches Unterrichtswerk

„... teile ich Ihnen mit, daß mir das Werk von Lietzmann-Zühlke **außerordentlich** gefallen hat. Es bringt trotz aller Knappheit bei der **sorgfältigen Auswahl** des Stoffes **das Wichtigste** und zeichnet sich vor anderen Lehrbüchern durch Fortlassung alles unnötigen Ballastes, durch die **Einfachheit der Beweise**, vor allem durch die **Betonung der Anwendungen** aus der Praxis aus. Das eigentliche Lehrbuch wird durch die Aufgabensammlung vorzüglich ergänzt, das Interesse der Jungen durch historisch interessante Aufgaben wachgehalten." (Studienrat **Dr. E. Lischner**, Frankfurt a/M. Klinger-Oberrealschule.)

Geometrische Aufgabensammlung:

„... Ich habe im Unterricht der Geometrie (Unterklassen) das Lietzmannsche Unterrichtswerk seither probeweise benutzt und bin sehr zufrieden, ja, ich kann noch weitergehen und sagen, **es hat mir am besten von allen mitführenden Lehrbüchern gefallen.** Die Frische und Lebendigkeit, die die Aufgabensammlung atmet, ist sehr wohltuend. Ein **moderner Geometrieunterricht** hat an Lietzmanns Werk **eine wertvolle Stütze.**"
(**Dr. Katz**, Friedberg Hessen. Augustinerschule.)

„Eine ausgezeichnete Sammlung, die eine Fülle Anregungen bietet. Da sind die Reformgedanken in die Tat umgesetzt, so daß eine solche Sammlung wohl **selbst den zurückhaltendsten Mathematiker begeistern wird.**"
(Oberstudiendirektor **W. Paetz**, Dortmund. Hindenburg-Realgymnasium.)

„... Die Lietzmannschen Bücher haben mir sehr gefallen, besonders die **kurze und präzise Fassung des Leitfadens** der Unterstufe, die gerade das enthält, was der Schüler braucht, **ohne den Ballast ausführlicher Erläuterungen**, die die Schule zu geben hat.
Die Behandlung der **darstellenden Geometrie** und die Nebeneinanderstellung **synthetischer und analytischer Methoden** habe ich noch in keinem Lehrbuch **in gleicher vorzüglicher Art** gefunden."
(Oberlehrer **Dr. E. Schrader**, Hamburg. Heinrich-Hertz-Realgymnasium.)

„... daß ich die **Geometrische Aufgabensammlung**, C Kurzausgabe, Unterstufe, einer gründlichen Durchsicht unterzogen habe. Das Buch gefällt mir sehr und hat sich auch **für den Gebrauch** im Unterricht als **äußerst praktisch** erwiesen. Der Aufbau ist **folgerichtig.** Die **Auswahl der Aufgaben** ist **reichhaltig**, aber dabei **doch nicht über das annehmbare Maß** hinausgehend. Besonders zu begrüßen ist die große Zahl der Aufgaben, die auf **das praktische Leben** Bezug nehmen."
(Studienrat **K. Brandt**, Oschatz. Realschule mit Deutscher Aufbauschule.)

„... Die Kurzausgabe C gefällt mir **im neuen Gewande ausgezeichnet.** Sie ist ganz so ausgefallen, wie ich es vor Monaten wünschte." (Studienassessor **P. Schneider**, Minden i. W. Bessel-Oberrealschule.)

„Auf Ihre Anfrage kann ich Ihnen nur erwidern, daß ich von der ‚Geometrischen Aufgabensammlung' **so begeistert bin**, daß ich sie von Stund an im Unterricht verwandt habe. Für einen modernen Unterricht ist dies Werk ein **ausgezeichnetes** und fast **unentbehrliches** Hilfsmittel."
(Studienassessor **A. Jigner**, Berlin. Kaiser-Friedrich-Realgymnasium.)

Leitfaden der Mathematik:

„Die **Vorzüge** des Leitfadens sind von den Fachgenossen **allgemein uneingeschränkt anerkannt**, bei notwendig werdender Neueinführung würde seine Empfehlung in erster Linie in Frage kommen."
(Prof. **A. Lüß**, Schwerin. Gymnasium.)

„Ich halte es für ein in seiner Art **vorzügliches Werk**, gedrängt, aber vollständig, **klar, übersichtlich** und dem **Verständnis der Schüler** in jeder Hinsicht angemessen."
(Prof. **K. Schmehl**, Stuttgart. Friedrich-Eugens-Realschule.)

„Der Leitfaden besitzt **viele Vorzüge**; ich muß z. B die **Vereinfachung des Lehrstoffes** sehr anerkennen."
(Oberstudiendirektor **W. Gutjahr**, Rathenow. Realgymnasium.)

Ziel und Inhalt der Ergänzungshefte zu Lietzmanns Mathematischem Unterrichtswerke

1. Ergänzungsheft: Überblick über die Geschichte der Elementarmathematik. Von W. Lietzmann. Mit 39 Abb. [VI u. 68 S.] 1926. *RM* 1.80

Die vorliegenden oder im Werden begriffenen Richtlinien der meisten **deutschen** Länder fordern eine weitergehende Berücksichtigung der Geschichte der Mathematik im Unterricht. Das Ergänzungsheft soll dem Schüler neben der Aufgabensammlung, die an die historischen Problemstellungen anknüpft, einen Gesamtüberblick geben. Es enthält eine knappe Darstellung der Entwicklung der Elementarmathematik im **Rahmen der Kulturgeschichte**, eine nach Sachgebieten geordnete Behandlung der **Einzelprobleme** und ein kleines **Mathematiker-Verzeichnis.**

2. Ergänzungsheft: Technische Aufgaben zur Mathematik. 89 Aufgab. m. 350 Unteraufgab. und Lösungen. Von M. Hauptmann. Mit 115 Abb. [V u. 111 S.] 1926. Kart. *RM* 3.—

Die aus den verschiedensten Gebieten der Technik und ihrer Geschichte entnommenen Aufgaben wollen den nicht immer leichten **Weg vom Wissen zum Können** bereiten, indem sie die mathematischen Begriffsbildungen und Sätze in ihren Anwendungen **anschaulich** und damit **tieferer Erfassung** zugänglich machen. Meist in bestimmten Zahlen und Abmessungen gegeben, werden die Aufgaben den **Sinn für Maß und Zahl fördern**, das **Gefühl der Verantwortlichkeit** für ein auch **numerisch richtiges Ergebnis** stärken und dazu beitragen, den Unterricht **lebensvoll** zu gestalten.

Die **Urteile** sprechen sich übereinstimmend dahin aus, daß die Sammlung sehr geeignet sei, die **neuzeitlichen Bestrebungen** im mathematischen Unterricht zu fördern.

2. **Knappe, doch nicht zu kurze Fassung des Lehrganges.** Das Buch hält die **Mitte zwischen einem ausführlichen methodischen Lehrbuch und einem kurzen systematischen Leitfaden.** Es gibt daher dem Lehrer mancherlei Anregung, ohne ihn in der Gestaltung des Unterrichts zu bevormunden; andererseits bietet es dem Schüler zur Selbsterarbeitung und zur Wiederholung eine knappe und doch verständliche Darstellung.
3. **Reichhaltiges Übungsmaterial zu allen Teilen des Lehrstoffes.** Insgesamt weit über 7000 **Aufgaben sind dem Lehrstoff organisch eingefügt.** Diese auch im Titel zum Ausdruck gebrachte Verbindung von Lehrbuch und Aufgabensammlung macht die **Anschaffung einer besonderen Aufgabensammlung überflüssig.**
4. **Neuzeitlichen Anforderungen entsprechende Stoffauswahl.** Die Abgrenzung des Lehrstoffes ist unter sorgfältiger Berücksichtigung der einschlägigen **neuen Lehrpläne und Richtlinien** erfolgt. Zahlreiche eingestreute **geschichtliche Bemerkungen** und in der Oberstufe größere **historische Rückblicke** kommen den Bestrebungen für eine kulturgeschichtliche Abrundung des mathematischen Unterrichts entgegen.
5. **Vielseitige Berücksichtigung der Anwendungen.** Der Belebung des mathematischen Unterrichts durch **Bezugnahme auf die Wirklichkeit** ist durch **zahlreiche Beispiele und Aufgaben** aus der Feldmessung, Nautik, Kartenkunde, Astronomie, Physik und Wirtschaft weitgehend Rechnung getragen, **ohne daß** durch eine zu große Fülle des Gebotenen dem Schüler **der klare Aufbau des mathematischen Lehrgebäudes verdeckt würde.**
6. **Eindringliche Behandlung der Grundbegriffe.** Unter Ausschaltung entbehrlichen Formelmaterials und Beschränkung auf einfache Problemstellungen ist Raum für eine **klare Herausarbeitung der wichtigen Grundbegriffe und ihrer Anwendungen** gewonnen worden.
7. **Starke Hervorkehrung der großen Zusammenhänge in der Mathematik.** So ist z. B. die Analogie zwischen ebener und sphärischer Trigonometrie betont und die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften soweit angedeutet worden, daß sich ein **Einblick in den einheitlichen Aufbau der Geometrie** ergibt. Die **Infinitesimalrechnung,** die sich häufig wie eine willkürliche Aneinanderreihung von Einzelproblemen ausnimmt, ist hier sachlich durch den Funktionsbegriff, methodisch durch den Grenzbegriff **vereinheitlicht** und **mit ihrem wirklichen Bildungswert dem Anfänger erschlossen.**
8. **Klare Gliederung des Stoffes und übersichtliche Anordnung des Satzes.** Auf die **äußere Gestaltung** wurde **besondere Sorgfalt** verwandt, die **Figuren** sind verbessert und vervollständigt worden, **Papier** und **Einband** sind gut und dauerhaft.

Aus den Urteilen:

„Bekanntlich war die **erste** Auflage dieses Buches der **erste** gedruckte **Versuch zu einer Reform** des mathematischen Schulunterrichts **im Sinne Felix Kleins.** In den seither verflossenen 18 Jahren haben sich die Grundideen Kleins als lebensfähig erwiesen, ja sie haben sich im wesentlichen allgemein durchgesetzt. Die neue Bearbeitung unterscheidet sich von den früheren Ausgaben durch die Beifügung **zahlreicher und gut gewählter Aufgaben** zu **allen** Teilen des Lehrstoffes. . . Im übrigen aber ist der **planimetrische Teil sehr gut;** ich hebe besonders hervor, daß die Dreiecksaufgaben auf ein verständiges Maß beschränkt bleiben. . . Der **algebraische** Teil geht bis zu den quadratischen Gleichungen mit einer Unbekannten; **numerische und graphische Auflösungen** sind in angenehmer Abwechslung herangezogen. . . **Ausgabe B** enthält noch einen kurzen Anhang über Zinseszins- und Rentenaufgaben, sowie einen Lehrgang der ebenen **Trigonometrie mit gut gewählten Aufgaben. Ausstattung, Druck und Figuren** sind **mustergültig.** Das Werk ist in seiner neuen Gestalt **durchaus zu empfehlen.**"
(Oberstudienrat Dr. **A. Witting,** Dresden, in „Die höhere Schule im Freistaat Sachsen"; Besprechung der Unterstufe.)

Behrendsen-Götting, Lehrbuch der Mathematik mit Aufgaben

Aus den Urteilen:

„Meinem Geschmack nach und auch meinem weniger subjektiv gefärbten Urteil nach ist Behrendsen-Götting, bes. die Oberstufe, **ein hervorragend geschicktes Buch.** War die alte Auflage schon gut, so ist die neue weiter beträchtlich im Wert gestiegen. Die Behandlung der Infinitesimalrechnung auf der Schule ist nicht ganz einfach. Aber dem Buch von Behrendsen-Götting kommt offenbar zu gute, daß seine Verfasser sich gerade um dies Gebiet schon seit Jahren bemüht haben, so daß ihnen neben ihrer Geschicklichkeit eine reiche Erfahrung zur Verfügung stand. Das ist von ganz besonderem Wert. **Das Buch könnte ich überall empfehlen, wo man noch in der glücklichen Lage ist, sich entscheiden zu können.**"
(Studienrat **E. Lotze,** Itzehoe. Kaiser-Karl-Schule.)

„**Das Wertvolle** des Unterrichtswerkes liegt in der Oberstufe, und zwar in der **Behandlung der Infinitesimalrechnung,** die mir ausnehmend gut gefällt, so daß ich glaube, **man kann mit dieser Methode ein wirkliches Verständnis** des Wesens dieser dem Schüler sonst so unbegreiflichen Rechnung **erreichen.**"
(Studienrat **A. Pflegel,** Frankfurt a. O. Frankf. Realgymnasium und Oberrealschule.)

„Das Buch hat mich nach innerer Gestaltung und äußerer Form **sehr befriedigt. Die konsequente Einordnung des Funktionsbegriffes ist vorzüglich gelungen** und auch sonst scheint mir der arithmetisch-algebraische Teil einwandfrei. Die Geometrie ist ebenfalls von **modernen Gedanken getragen.**"
(Studienrat **Dr. E. Günther,** Dresden. König-Georg-Gymnasium.)

„**Es verbindet sehr geschickt** die **Reformideen** Kleins mit dem alten, **exakten Euklidischen Beweisverfahren.** Sehr brauchbar ist die **sehr reichhaltige Aufgabensammlung,** die durchaus zur Belebung des spröden mathematischen Stoffes beiträgt und **das Interesse der Schüler weckt.**"
(Oberstudienrat **Dr. P. Meyer,** Altona. Oberrealschule.)

„... daß das Buch mir in dem Kapitel, indem ich es bei meinem Unterricht eingehend geprüft und benutzt habe, **außerordentlich gut gefallen** hat, besonders bezügl. der graphischen Darstellungen. Es handelt sich um das Kapitel quadratische Gleichungen. Auch die übrigen Teile gefallen mir sehr gut, obgleich ich sie im Unterricht noch nicht genügend durchgeprobt habe." (Studienrat **W. Mittmann,** Husum. Gymnasium.)

„Das Lehrbuch von B.-G. zeichnet sich besonders durch die langsame **organische Entwicklung und Veranschaulichung** der für den Schüler so schwierigen mathematischen Begriffe aus, ohne dabei unnötig in die Breite zu gehen. **Gute Aufgaben** sind **reichlich** vorhanden, ihre **Anordnung** entspricht dem **organischen Zusammenhang.** Das Buch ist fraglos in der Hand des Schülers für den **Arbeitsunterricht** sehr geeignet; denn dieser kann meiner Ansicht nach nur dann fruchtbringend gestaltet werden, wenn dem Schüler die Möglichkeit geboten wird, den durchgenommenen Stoff durch häusliche Arbeit zu vertiefen, und wenn er durch das Lehrbuch gleichzeitig zu neuen Problemen angeregt wird. In dieser Hinsicht wird B.-G. dem Schüler und damit auch dem Lehrer wertvolle Dienste leisten. Meine Fachkollegen haben sich über das Werk — soweit es bei der Kürze der Zeit möglich war, es ihnen zugänglich zu machen — **gleichfalls nur lobend ausgesprochen.**"
(Studienassessor **Th. Bothmann,** Itzehoe. Kaiser-Karl-Schule.)

„Auf die Definition der Grundbegriffe ist die größte Sorgfalt verwandt; namentlich die Einführung in die Differential- und Integralrechnung ist ausgezeichnet, wenn sie auch von dem üblichen Wege zum Teil nicht unerheblich abweicht. Die entwicklungsgeschichtlichen Zusammenhänge sind stärker betont als früher.
Ich muß gestehen, daß dies Buch mir auch in dieser neuen Ausgabe wieder **eines der liebsten von allen mir bekannten Mathematikbüchern ist.**" **(Die neue Erziehung.)**

Methodischer Leitfaden und Aufgabensammlung der Geometrie

nebst einer Vorschule der Trigonometrie für höhere Lehranstalten von

Dr. O. Lörcher und **Prof. Dr. E. Löffler**

Oberstudiendirektor des Realgymnasiums und der Oberrealschule in Kirchheim — Ministerialrat in Stuttgart

5. Aufl. [VIII u. 188 S.] Mit 177 in den Text gedruckten Figuren und 3 Zahlentafeln. gr. 8. 1925. Geb. RM 3.40

Ergebnisheft dazu in Vorbereitung 1927.

Ministeriell genehmigt für Preußen (U II 2960 v. 12. 5. 24.) und für andere Länder.

Der methodische Aufbau des Buches, das die Reformbestrebungen im mathematischen Unterricht verwirklichen will, sucht nach Maßgabe der fortschreitenden Denkfertigkeit des Schülers das kunstvolle System der Geometrie zusammenzuschließen. **Das anschauliche Moment** ist stark betont, auf die **Zusammenhänge zwischen Theorie und Praxis** wird überall hingewiesen. Eine **reichhaltige Aufgabensammlung** gibt Stoff zur Einübung der wichtigsten Sätze und Lösungsmethoden wie zu Wiederholungen.

„Der vorliegende Lehrgang gibt eine **methodisch überaus sorgfältige** Durchführung der Vorschläge für die **Neugestaltung des geometrischen Unterrichts,** die nunmehr allgemein anerkannt sind ... Für diesen Zweck ist das Buch auch durch sein reiches **Aufgabenmaterial** geeignet ... Die **schöne Ausstattung** des Lehrbuches ist besonders anzuerkennen." **(Monatshefte f. Math. u. Phys.)**

Heinrich Müllers
Mathematisches Unterrichtswerk
Neubearbeitete Einheitsausgabe für höhere Lehranstalten aller Art

Unter Mitwirkung von Prof. **Dr. W. Bahrdt**, Studienrat an der Oberrealschule in Berlin-Lichterfelde, Prof. **P. B. Fischer**, Studienrat am Gymnasium in Berlin-Steglitz, **Dr. C. Tietze** und **W. Zabel**, Studienräten am Realgymnasium in Berlin-Tempelhof

herausgegeben von **Dr. E. Kullrich**, Oberstudiendirektor am Realgymnasium in Berlin-Tempelhof

In allen Teilen ministeriell genehmigt für Preußen und für andere Länder

1. **Rechenbuch** Müller-Pietzker. **Einheitsausgabe, bearbeitet von E. Kullrich und W. Zabel.**
   Heft 1 für Kl. VI. 12. Aufl. Mit 27 teilw. farb. Fig. i. T. [V u. 83 S.] 1926. RM 1.60
   Heft 2 für Kl. V. 12. Aufl. Mit 12 teilw. farb. Fig. i. T. [V u. 95 S.] 1926. RM 1.80
   Heft 3 für Kl. IV. 11. Aufl. Mit 17 teilw. farb. Fig. i. T. [V u. 135 S.] 1926. RM 2.40
2. **Lehrbuch der Arithmetik, Algebra und Analysis:** Unterstufe. Bearbeitet von E. Kullrich u. C. Tietze. 12. Aufl. M. 31 teilw. farb. Fig. i. T. [VI u. 64 S.] 1926. RM 1.40
   Auch mit Aufgabensammlung (6) zusammengebunden. RM 5.40

3\. A. **Lehr- und Übungsbuch der Geometrie:** Unterstufe. Bearbeitet von E. Kullrich und C. Tietze. 13. Aufl. Mit 212 Fig. i. T. [VI u. 151 S.] 1927. RM 3.20
B. **Ausgabe** mit Trigonometrie. 13. Aufl. Mit 225 Fig. i. T. [VI u. 177 S.] 1927. RM 3.60

4\. A. **Lehrbuch der Arithmetik, Algebra und Analysis:** Oberstufe. Bearbeitet von E. Kullrich u. C. Tietze. 8. Aufl. Mit 66 teilw. farb. Fig. i. T. [VI u. 104 S.] 1926. RM 2.20
Auch mit Aufgabensammlung (8A) zusammengebunden. 1927. RM 4.20
B. **Ausgabe** mit Erweiterung der Reihenlehre. 8. Aufl. Mit 73 teilw. farb. Fig. i. T. [VI u. 122 S.] 1926. RM 2.60
Auch mit Aufgabensammlung (8B) zusammengebunden. 1927. RM 4.80

5\. A. **Lehr- und Übungsbuch der Geometrie:** Oberstufe. Bearbeitet von E. Kullrich und C. Tietze. 8. Aufl. Mit 228 teilw. farb. Fig. i. T. [VII u. 213 S.] 1927. RM 4.20
B. **Ausgabe** mit Erweiterung der Lehre von den Kegelschnitten. 8. Aufl. Mit 250 teilw. farb. Fig. i. T. [VII u. 234 S.] 1927. RM 4.60

6\. **Aufgabensammlung zur Arithmetik, Algebra und Analysis** Müller-Kutnewsky: Unterstufe. Bearbeitet von P. B. Fischer. 15. Aufl. Mit 25 Fig. i. T. [VIII u. 234 S.] 1927. RM 4.20

7\. A. **Aufgabensammlung zur Geometrie** Müller-Kutnewsky: Unterstufe. Bearbeitet von P. B. Fischer. 14. Aufl. Mit 196 Fig. i. T. [VII u. 178 S.] 1926. RM 3.60
B. **Ausgabe** mit Trigonometrie. 14. Aufl. M. 196 Fig. i. T. [VII u. 196 S.] 1926. RM 4.—

8\. A. **Aufgabensammlung zur Arithmetik, Algebra und Analysis** Müller-Kutnewsky: Oberstufe. Bearbeitet von W. Bahrdt. 8. Aufl. [VII u. 111 S.] 1927. RM 2.20
B. **Ausgabe** mit Erweiterung der Reihenlehre. 8. Aufl. [VII u. 126 S.] 1927. RM 2.40

9\. A. **Aufgabensammlung zur Geometrie** Müller-Kutnewsky: Oberstufe. Bearbeitet von P. B. Fischer. 8. Aufl. [VII u. 192 S.] 1927. RM 3.80
B. **Ausgabe** mit Erweiterung der Lehre von den Kegelschnitten und einem Anhang über höhere Kurven. 8. Aufl. [VII u. 206 S.] 1927. RM 4.—

Ergebnishefte erscheinen zu sämtlichen Teilen und Ausgaben im Laufe des Jahres 1927

Heinrich Müller, Mathematisches Unterrichtswerk

Kurze Kennzeichnung

1. **Die Teilung in handliche und wohlfeile Einzelbände** erleichtert wirtschaftlich die **Anschaffung** und führt zugleich leichter ein Vertrauensverhältnis zwischen Schüler und Schulbuch herbei.

2. **Der Unterrichtsstoff** ist sorgfältig gesichtet durch Ausscheidung alles dessen, was nicht für den Entwicklungsgang, für die Anschaulichkeit oder Anwendung wertvoll ist. Dadurch ist einem Zuviel an Stoff vorgebeugt; andererseits ist alles **in den Richtlinien Geforderte** geboten; auch **Kurzweiliges** wurde sowohl für das Rechnen als für die Mathematik hinzugefügt.

3. **Die Darstellungs- und Behandlungsweise** sucht leichte Verständlichkeit für den Schüler mit wissenschaftlicher Strenge zu vereinen. Sie stützt sich in breitem Ausmaß auf die **Anschauung**, betont die gedanklichen und geschichtlichen Zusammenhänge und regt, ohne die Bewegungsfreiheit des Lehrers zu behindern, den Schüler zu freudiger **Selbstarbeit** an. Daher bleibt es dem Schüler des öfteren überlassen, sich auf Grund gebotener Angaben die Aufgabe selbst zu bilden.

4. **In den einzelnen Teilen** ist besonders zu beachten:

   a) **Rechenhefte.** Durchdringung mit **mathematischen Gedanken**, so daß sich der Übergang vom Rechnen zur Mathematik für den Schüler ohne Unstetigkeit vollzieht. Zugleich liebevolle Pflege der **Rechenfertigkeit**, im besondern des Kopfrechnens. **Einheitliche Gesichtspunkte** für die Veranschaulichung und für die Ableitung der Regeln. Erziehung zur Gewissenhaftigkeit durch Betonung der **Überschlags- und Kontrollrechnungen, sowie der Proben.** Pflegliches Eingehen auf das **abgekürzte** Rechnen für genaue und ungenaue Zahlen.

   b) **Arithmetische Lehrbücher.** Enge Verknüpfung der Tabelle und des graphischen Bildes eines Funktionsverlaufes mit der Gleichungslehre. Vorbereitung der Infinitesimalrechnung durch Eingehen auf **Fehlerbetrachtungen**, um den Schüler auch auf diesem Wege an das neue Gebiet heranzuführen. Grundsätzlich ist für alle Pensenteile die Durchführung von Musterbeispielen geboten.

   c) **Arithmetische Aufgabensammlung.** Außerordentliche Reichhaltigkeit, die jedem Lehrer das bietet, was seiner Eigenart und der der Klasse angepaßt ist.
   Auswahl der **angewandten Aufgaben** so, daß sie **lebensnahe** sind und daß doch nicht die stoffliche Belehrung, sondern der mathematische Gehalt im Vordergrund steht. Aufnahme auch solcher Aufgaben, die nicht zum Einüben durchgenommenen Stoffes dienen, sondern zum **Selbsterarbeiten** von Neuem und zum tieferen Eindringen in schwierigere Begriffe wie etwa den des Logarithmus. Eingehen auf **Ungleichungen** zur Schärfung des Empfindens für funktionale Zusammenhänge.

   d) **Geometrische Lehrbücher.** Unmittelbare Verknüpfung des Lehrstoffes mit Aufgaben. Zusammenfassung planimetrischer und räumlicher Betrachtungen **in steter gegenseitiger Wechselbeziehung.** Erziehung des Schülers, stets grundsätzlich an räumliche Anschauungen oder Vorstellungen anzuknüpfen, Erkenntnisse für den Raum zu sammeln, in dem er lebt, und nicht für die Ebene. Durchführung dieses Grundsatzes von der Quarta bis zur Prima, so daß z. B. in der analytischen Geometrie der räumliche Anschauungsvorgang eines schattenwerfenden Ringes den Eingang zu den Kegelschnitten bietet. **Besondere Pflege der darstellenden Geometrie** und ihrer Verbindungen **mit den Nachbargebieten.**

   e) **Geometrische Aufgabensammlung.** Darbietung zahlreicher Aufgaben, die aus den Schülerkreisen stammen und die den Schülern in ganz besonderem Maße Anregungen zur Selbstbetätigung bieten. Ausscheidung gekünstelter Ausgaben. Verwertung des Symmetriebegriffes und der **Beweglichkeit von Figuren** zu Aufgaben zwecks Klärung der Anschauung und des mathematischen Denkens. Ausnutzung von Figuren als Unterlagen für Aufgaben. Eingehen auf Aufgaben über **historisch interessante Kurven** höheren als des zweiten Grades.

5. **Die Ausstattung** zeichnet sich dank der Verwendung verschiedener Buchstabentypen durch **Übersichtlichkeit** aus, durch **sehr gutes Papier**, auf dem das Druckbild der Figuren sauber und klar erscheint, endlich durch feste Einbände für alle Teile.

Heinrich Müller, Mathematisches Unterrichtswerk

Aus den Urteilen:

„Ich muß sagen, daß das Rechenbuch in seiner neuen Gestalt **außerordentlich gewonnen hat. Die Anregungen der Richtlinien haben befruchtend gewirkt,** ohne daß das **eigentliche Ziel des Rechenunterrichts** auf der Unterstufe damit aus dem Auge verloren wäre. Der praktische Mathematiker wird besonders die frühe Einführung der Überschlagsrechnung begrüßen. Aus den Scherzaufgaben sieht der Schalk. Der **Druck** ist jetzt **musterhaft.** Man kann Herausgeber und Verleger zu dieser Neuausgabe nur beglückwünschen."
(Studienrat **Dr. H. Kohlmann,** Vegesack. Real-Gymnasium.)

„. . . . Von allen mir bekannten Rechenbüchern für die unteren Klassen der höheren Lehranstalten **gefällt es mir am besten.** Ich schätze die ausgiebige Verwendung messender und zeichnender Darstellungen . . ."
(Gymnasiallehrer **D. Wiemann,** Kreuznach.)

„. . . . Ausschlaggebend für den Entschluß der Einführung war die Tatsache, daß das Buch **wie kein zweites** uns bekanntes mathematisch **vertieft ist.** Ein Rechenbuch einer höheren Lehranstalt soll eine Propädeutik des mathematischen Unterrichts sein. Und eine solche ist die Zabelsche Bearbeitung. Entsprechend dem natürlichen Bestreben, Begriffe und Methoden nach ihrer Ausreifung im Reiche der wissenschaftlichen Mathematik auch für die Schulmathematik nutzbar zu machen und ihre Einführung mit fortschreitender Entwicklung der Unterrichtsmethode immer zeitiger zu vollziehen, erscheinen graphische Veranschaulichungen auch auf der Unterstufe. Der **Erfolg wird die Richtigkeit dieses Gedankens beweisen.**"
(Studienrat **C. Widder,** Berlin-Wilmersdorf. Fichte-Gymnasium.)

„Die mir zugesandten Probeexemplare: Rechenbuch Müller-Pietzker, Arithmetik Kullrich-Tietze habe ich mit Interesse durchgesehen. Beide Lehrbücher **entsprechen vollkommen den neuen Richtlinien.** Die **Abbildungen,** namentlich graphische Darstellungen, sind **vorzüglich.** Der **Gesamteindruck,** der an und für sich schon **sehr gut** ist, wird noch gehoben durch eine **Reihe Vorzüge,** von denen ich einige hervorheben möchte. Im **Rechenbuch:** die ausdrückliche Bezeichnung auch der unausgerechneten Aufgabe als Summe, Differenz usw. Betonung des geraden und umgekehrten Verhältnisses. In der **Arithmetik:** die zahlreichen graphischen Darstellungen. In beiden die geschichtlichen Angaben."
(Studienassessor **G. Schumacher,** Dortmund. Staatl. Gymnasium.)

„. . . . Kurz gesagt, das Buch ist **eine Aufgabensammlung im Sinne der Richtlinien, reich an Aufgaben aus dem praktischen Leben** und ist in jeder Beziehung zur versuchsweisen Einführung zu empfehlen. Es kann als sicher gelten, daß es sich recht schnell viele Freunde erworben hat . . . Die Aufgabensammlung gefällt mir **wegen ihrer prachtvollen Anwendungen und der geschickten Durchführung der Eintafelprojektion außerordentlich gut.**" (Studienrat **L. Klöckner,** Dülmen. Städt. Gymnasium.)

„Bei der Durcharbeitung der den **Reformgedanken so schön in die Tat umsetzenden Teile der Unterstufe** hat mich nicht einen Augenblick gereut, daß ich mit Geduld die Neubearbeitung unseres **bewährten Schulbuches** abgewartet und die überschnell auf den Markt geworfenen Neuerscheinungen, denen man fast auf jeder Seite die Hast anmerkte, links liegen gelassen habe."
(Studienrat **Dr. P. Hermesdorf,** Euskirchen. Kaiserin-Auguste-Viktoria-Gymnasium.)

„Der arithmetische Teil 2 **übertraf an Aufbau und Systematik alle** zum Vergleich herangezogenen **Werke ähnlicher Art.**" (Studienassessor **H. Hoppe,** Bad Segeberg i. Holst. Aufbauschule.)

„Ich bin **ganz entzückt von diesem Werk** (Geometrie, Unterstufe) und werde bei der **demnächstigen Fachkonferenz** für die Einführung dieses Werkes stimmen."
(Studienrat **Dr. R. Welzien,** Berlin. Schinkel-Realschule.)

„Ich halte das Lehr- und Übungsbuch der Geometrie gegenüber den alten Auflagen für **wesentlich verbessert,** vor allem durch die von Anfang an durchgeführten **Betrachtungen der geometrischen Gebilde im** Raum und durch das Eingehen auf die **Beweglichkeit der Figuren** und die dabei auftretenden **funktionalen Abhängigkeiten.**" (Studienassessor **G. Blumenstein,** Dacha. Oberrealschule.)

„. . . . Ich habe Ostern das Geometriebuch von Kullrich-Tietze in Quarta versuchsweise zur Einführung gebracht und muß Ihnen gestehen, daß nicht nur ich, sondern auch meine Fachkollegen, die das Buch noch nicht benutzen, **außerordentliches Gefallen an der Darstellung des Lehrstoffes** gefunden haben. Ich denke, daß es allmählich allgemein an unserer Schule **eingeführt werden wird.**"
(Studienrat **Dr. O. Garben,** Hamburg. Realschule am Weidenstieg.)

„. . . . Das mir zugesandte **Lehr- und Übungsbuch der Geometrie,** Unterstufe von Kullrich-Tietze, hat mir **recht gut** gefallen. **Besonders wertvoll** finde ich das **Hineinflechten von Teilen der darstellenden Geometrie** in einer dem Verständnis der Unterstufe angepaßten Form. Auch die **Aufgabensammlung** zur **Geometrie** von Müller-Kutnewsky hat durch die Anpassung an die Richtlinien meinen **Beifall** gefunden."
(Studienrat **Fr. Torka,** Oberglogau. Aufbauschule.)

„. . . . Die neue Aufg.-Slg. der Geometrie ‚Unterstufe' haben wir mit sehr viel Interesse geprüft und finden sie durch ihre **Reichhaltigkeit** und durch die **Aufnahme und Durchdringung** des Stoffes der Unterstufe mit **Stereometrieaufgaben ganz ausgezeichnet** . . ."
(Studienrat **Dr. F. Carius,** Leipzig. König-Albert-Gymnasium.)

„Die mir s. Z. freundlichst zur Prüfung übersandten Werke: Müller-Kutnewsky, Aufgabensammlung zur Arithmetik, Algebra und Analysis, desgl. für Geometrie haben **meinen vollen Beifall gefunden.** Die **Vielseitigkeit der Aufgaben,** ihre übersichtliche Zusammenstellung bietet eine große Fülle von Anregungen. **Besonders hervorzuheben sind die guten und klaren Abbildungen,** die für das geometrische **Verständnis** der Schüler sehr vorteilhaft sind." (Studienrat **C. Gatzer,** Kronach. Realschule.)

4. **Von Euklid zum Erlanger Programm!** Die **Geometrie** stand bisher im Banne von Euklid und bewies alles durch Kongruenz von Dreiecken. **Hier** sind daneben auch die **Forschungen der letzten 100 Jahre**, in der Oberstufe namentlich die **Grund**gedanken des **Erlanger Programms** benutzt. Dadurch werden die **Beweise einfacher und überzeugender**, der Stoff wird **übersichtlicher** und **lebensvoller**, der **Arbeits**unterricht **fruchtbarer**.

5. **Ausscheidung alles überflüssigen Ballastes**, der die Beweiskraft und das Beweisbedürfnis des Anfängers überschreitet. Dafür zahlreiche Aufgaben und Übungen zur Stärkung mathematischer Begriffsbildung und Ausdrucksfähigkeit.

6. **Ausdehnung der Betrachtungen von der Ebene auf den Raum.** Diese **Verschmelzung** ebener und räumlicher Betrachtungen ist, wo irgend möglich, durchgeführt, um der „Raumblindheit" entgegenzuwirken. Die Zusammenhänge zwischen ebener und sphärischer Trigonometrie sind betont und besonders einfach dargestellt.

7. **Einheitlicher Gesichtspunkt in der Geometrie der Oberstufe.** Durch die **Transformationen** in der analytischen Geometrie ergibt sich für die Oberstufe die **Ordnung nach Kongruenz, Ähnlichkeit, Affinität, Perspektive und Transformationen höherer Ordnung.** Höchst elegant ist die Darstellung von Bewegungen und Abbildungen durch Rechnung; bei der **Ellipse** wird dadurch die Ableitung der **Gleichung**, der **Tangente**, der **zugeordneten Durchmesser verblüffend einfach.**

8. **Hervorhebung der logischen Entwicklung und scharfe Gliederung der Arithmetik.** Die Arithmetik ist als **Lehre von den Grundgesetzen des Rechnens** dargestellt. Deshalb ist die logische Entwicklung stark betont, die Anordnung schärfer gegliedert als gewöhnlich. Daß die **funktionalen Zusammenhänge** überall in den Vordergrund gerückt sind und von dem Hilfsmittel **geometrischer Veranschaulichung** reichlich Gebrauch gemacht wird, ist heute selbstverständlich.

9. **Von der Wichtigkeit der Gleichungslehre** und von der **Zweckmäßigkeit** dieses Verfahrens soll der Schüler überzeugt werden. Ausgehend von einfachen Textaufgaben folgt die formale Einübung: **zeichnerische und Funktionsbetrachtungen** laufen nebenher. Für die quadratische und die kubische Gleichung sind einfachste **Nomogramme** beigegeben, **Näherungslösungen** finden die gebührende Betonung.

10. **Zeitgemäße und strenge Darstellung der Infinitesimalrechnung.** Dabei ist auf Lücken, deren Ausfüllung der Hochschule verbleiben muß, offen hingewiesen. An zahlreichen **Aufgaben** wird das **Wesen infinitesimaler Betrachtungsweise** — wirksamer als durch theoretische Erörterungen — geklärt.

11. **Philosophische Vertiefung des Unterrichts.** Hierzu dienen Kapitel über **Grundlagen und Aufbau der Arithmetik und der Geometrie.** Die **geschichtlichen** Bemerkungen und Aufgaben bringen die **Entwicklung der einzelnen Probleme** deutlich zum Ausdruck.

12. **Wirklichkeitsaufgaben.** Die Aufgabensammlung hat seit 1902 dazu beigetragen, die alten formalen Übungen durch Wirklichkeitsaufgaben zu ersetzen, die **allen** der Schule zugänglichen **Gebieten** entnommen sind und den Kulturwert der Mathematik dartun.

Schülke-Dreetz, Aufgabensammlung / Leitfaden der Mathematik

Aus den Urteilen:

„Schülke-Dreetz ist ausgezeichnet in der knappen Darstellung. Er ist meisterhaft in der Hervorhebung und Betonung des mathematischen Systems und mathematischer Probleme."
(Direktor Dr. K. Hahn, Hamburg. Oberrealschule auf der Uhlenhorst.)

„Es ist eines der besten mathematischen Werke, die ich in letzter Zeit Gelegenheit hatte zu begutachten; nicht umsonst stammt es aus der Feder des bewährten Vorkämpfers für modernen mathematischen Unterricht..."
(Studienrat Dr. K. Bögel, Pforta, Krs. Naumburg. Landesschule.)

„... daß mir alle Fachkollegen unserer Anstalt stets ihre Zufriedenheit mit diesem Unterrichtswerk bestätigt haben. Die Vorzüge dieses Buches sind m. E. die folgenden: Es ist wissenschaftlich korrekt und einwandfrei; es läßt dem einzelnen Lehrer die nötige methodische Freiheit; es ist kurz, klar und knapp geschrieben und bietet dabei das für die Schüler Nötige; es ist nicht von übermäßigem Umfange wie die meisten neueren Bücher und daher auch nicht zu kostspielig. Schließlich bei gleichzeitiger Benutzung der Schülkeschen Logarithmentafel liegt dem gesamten mathematischen Unterricht ein einheitliches Lehrbuch zu Grunde. Ich persönlich halte das Buch für eins der besten, die wir z. Z. auf dem Gebiete des mathematischen Unterrichts besitzen..."
(Studienrat H. Weiß, Berlin-Friedenau. Friedenauer-Gymnasium.)

„Schon eine flüchtige Durchsicht des Buches hat mir viel Freude gemacht. Fand ich doch mancherlei, was ich im Unterricht behandelt, in den Lehrbüchern aber vermißt habe, und fand ich doch vielerlei neue Anregungen... Gern werde ich das Buch im Unterricht zur Hand nehmen und meine Fachkollegen dafür interessieren."
(Studienrat Dr. E. Günther, Dresden. König-Georg-Gymnasium.)

„Außer dem Buch von..... kenne ich kein Schulbuch von erfreulicherer Korrektheit auf gleich kleinem Raume. Das Schülkesche Buch ist aber das bei weitem wertvollere." (Prof. Dr. H. Beck, Bonn. Universität.)

„Die Durchsicht des mathematischen Unterrichtswerkes: Schülke-Dreetz hat mir recht viel Freude gemacht. Das Buch erfüllt durchaus die Anforderungen, die man an ein modernes Buch stellen kann. Vor allem gefällt mir die knappe, klare Darstellung, die sorgfältige Auswahl der Aufgaben... Der Kontakt mit der Wirklichkeit ist überall gewahrt."
(Studienrat O. Pilger, Neunkirchen, Saar. Realgymnasium.)

„Das Buch hat durch seine knappe und klare Darstellung bei aller Stoffülle und Auswahlmöglichkeit, seine straffe Gliederung, die Durchführung der Gedanken des Erlanger Programms im geometrischen Teil und viele Einzelvorzüge bei allen Fachkollegen den besten Eindruck gemacht. Daß es trotz der kurzen Darstellungsform eines Leitfadens reichen Stoff für Arbeitsgemeinschaften und größere selbständige Arbeiten der Schüler der Oberstufe enthält, muß besonders hervorgehoben werden."
(Studienrat E. Hennig, Stettin. Schiller-Realgymnasium.)

„... Das Buch hat sich überall schon äußerlich durch seinen geringen Umfang und, in Verbindung damit, durch seinen geringen Preis empfohlen. Man ist erstaunt, wie es dem Verfasser gelungen ist, auf einem so geringen Raum so viele Anregungen zu übermitteln und dabei noch eine äußerst lebendige Darstellung zu geben. Überall wird in dem Buche sogar noch auf die Praxis hingewiesen, und Beispiele werden gebracht, die Schüler und Lehrer fesseln."
(Studienreferendar F. Knauft, Berlin-Charlottenburg. Herder-Schule.)

„Durch die Aufgaben der verschiedensten Stoffgebiete zieht sich wie ein roter Faden der Begriff der Funktion bzw. des Differentialquotienten. Dadurch wird eine immanente Wiederholung gesichert und einer Zersplitterung vorgebeugt. Beim Inhalt der Aufgaben ist alles Gekünstelte und Entlegene vermieden, vielmehr der Nachdruck auf Übersichtlichkeit und Zusammenhang mit dem praktischen Leben gelegt worden. Die Auflösung der Aufgaben, auch der schwierigeren, erfordert weder Kunstgriffe noch ein Kompendium von Formeln, sondern es genügt hierzu ein einfacher Ansatz und ein Mindestmaß von Formeln."
(Studienrat O. Romeyke, Lyck. Gymnasium.)

„Bei der Durchsicht der Aufgaben fällt insbesondere die Vielseitigkeit auf, die Anlaß zu den mannigfachsten Anregungen bieten kann. Die Sammlung ist eine fast unerschöpfliche Quelle zur Ausgestaltung des Arbeitsschulgedankens."
(Studienrat A. Lewinnek, Berlin-Halensee. Kaiser-Friedrich-Realgymnasium.)

„Mir ist keine Aufgabensammlung bekannt, die auf so knappem Raume eine so große Mannigfaltigkeit enthält wie dieses Buch..."
(Studienrat E. Köster, Husum. Gymnasium.)

„Beide Aufgabensammlungen werden den neuen Lehrplänen gerecht. Die Auswahl der Anwendungen aus den verschiedensten Gebieten erscheint mir gut gelungen, und besonders angenehm berührte mich der klare, kurze Wortlaut der aus der Wirklichkeit entnommenen Beispiele."
(Studienrat Dr. Fr. Wöller, Berlin-Friedenau. Gymnasium und Realprogymnasium.)

„...Ich habe die Bände eingehend durchstudiert, nur ein hervorragender Mathematiker und Praktiker kann sich so kurz, klar und genau ausdrücken, wie es die Verfasser der Leitfäden tun. Über die Aufgabensammlung brauche ich wohl kein Wort zu verlieren, ich benutze eine ältere Auflage seit Jahren..."
(Studienrat Dr. E. Andriessen, Neuwied. Gymnasium.)

„Schülke-Dreetz (Aufgabensammlung I und Leitfaden I) sind nach meinem Urteil ganz hervorragend. Die Durchführung neuzeitlicher pädagogischer Bestrebungen (Arbeitsunterricht, Selbsttätigkeit des Schülers, Betonung der Anschauung) ist so anregend, daß man das Buch mit Dank gegen die Verfasser aus der Hand legt. Ich werde die Bücher empfehlen wo ich kann."
(Studienrat Burose, Ahlden/Aller. Höhere Privatschule.)

In äußerst dauerhaftem Ganzleinenband liegen vor:

Tafelwerke zum logarithmischen und numerischen Rechnen entsprechend den neuen Lehrplänen auch mit Anhang: Mathemat. Formeln versehen:

Schülke: Vierstellige Logarithmentafeln

nebst Hilfstafeln für das praktische Rechnen.

Ministeriell genehmigt für Preußen (U II 17020 v. 24. 6. 26) und für andere Länder.

15., verb. Aufl. 1926. (130.–149. Tausend.) Ausgabe A ohne Formelanhang. [24 S. mit Fig. u. 1 Taf.] In Leinen RM 1.80. **Ausgabe B mit Anhang: Mathem. Formeln.** [32 S. mit Fig. u. 1 Taf.] In Leinen RM 2.—

Die **zahlreichen Urteile** heben besonders hervor die **Vollständigkeit** der Tafeln und ihre **übersichtliche, drucktechnisch einwandfreie Anordnung und Durchgliederung,** die **gute Wahl** und **Reichhaltigkeit** der **Hilfstafeln** sowie der Angaben und Konstanten aus allen Anwendungsgebieten.

„. . . sie ist bei weitem die übersichtlichste und handlichste von allen mir bekannten Tafeln. Der Formelanhang der Ausgabe B und die Proportionaltafeln zum Ausklappen scheinen mir sehr begrüßenswerte Neuerungen . . " (Studienrat Dr. A. Disse, Bremen. Oberlyzeum Kippenberg.)

Lötzbeyer: Vierstellige Tafeln zum logarithmischen und natürlichen Rechnen. Graphische Rechentafeln.

Ministeriell genehmigt für Preußen (U II 16249 v. 10. 4. 26) und für andere Länder.

2., verb. Aufl. 1926. Ausg. A ohne Formelanhang. [32 S.] In Leinen RM 2.–. **Ausgabe B mit Anhang: Mathematische Formeln.** [40 S.] In Leinen RM 2.20.

Die logarithmischen Tafeln sind im Gegensatz zu den schon erschienenen reinen Spaltentafeln unter dem Gesichtspunkte der Übersichtlichkeit und Kürze als **Zeilentafeln** angelegt. Die **Zahlentafeln** sind stärker als sonst berücksichtigt, und zwar insbesondere solche, die **für das tägliche Leben und das praktische Rechnen** von Bedeutung sind. Ferner wird von den **Hilfsmitteln des graphischen Rechnens** durch Behandlung des Rechenschiebers und wichtiger Nomogramme weitgehend Gebrauch gemacht. Auch diese Tafel erscheint in einer Ausgabe A ohne und in einer **Ausgabe B mit Anhang: Mathematische Formeln.**

„Nach einer Durchsicht der Tafel möchte ich sagen, daß sie mir unter den neu erschienenen Tafeln eine der besten zu sein scheint." (Studienrat Dr. F. Malsch, Weidenau. Oberrealschule.)

Ferner ist erschienen:

in neuer Anordnung der Argumente und nach dem Spaltenprinzip:

Lötzbeyer: Vierstellige Tafeln zum logarithmischen und Zahlenrechnen für Schule und Leben.

Ministeriell genehmigt für Preußen (U II 2960 v. 12. 5. 24) und für andere Länder.

2. Aufl. 1926. Ausgabe A ohne Formelanhang. [34 S.] RM 1.40. **Ausgabe B mit Anhang: Mathematische Formeln.** [42 S.] RM 1.60

„Schon zu wiederholten Malen hatte ich in den letzten Jahren Gelegenheit, mich davon zu überzeugen, daß sich diese Tafel beim logarithmischen Rechnen gut bewährt. In kurzer Zeit haben die Schüler stets so sicher damit zu rechnen gelernt, daß selbst in den ersten Klassenarbeiten logarithm. Fehler sehr selten vorgekommen sind. Das Ersparen des Umblätterns und besonders die Anordnung nur in Spalten, in denen außerdem die größeren Logarithmen über den kleineren stehen, die Differenzen also viel anschaulicher hervortreten, sind eine wesentliche Erleichterung für den Anfänger." (Studienrat Dr. O. Feyer, Berlin-Neukölln. Walther-Rathenau-Schule)

„Die Tafel ist bereits bei uns in IIb eingeführt und bewährt sich glänzend."
(Studienrat Schork, Mainz. Oberrealschule.)

Kullrich: Mathematisch-physikal. Tafeln. 3. Aufl. [12 S.] Kart. RM —.60

Beim Gebrauch der Tafeln hat sich in erfreulicher Weise das gewählte Anordnungsprinzip nach „fallenden Zahlenwerten" und das Untereinandersetzen der aufeinanderfolgenden Mantissen bewährt.

Müller: Vierstellige Logarithmentafeln. Für die Hand der Schüler zusammengestellt. [7 S.] . . . . Kart. RM —.40

Hartenstein: Fünfstell. logarithm. u. trigonometr. Tafeln f. d. Schulgebr. hrsg. 2., verb. Aufl. [136 S.] Kart. RM 2.–

Hartenstein: Fünfstellige Briggische Logarithmen der Zahlen 1–10000 nebst d. sechsst. Logarithm. d. Zahlen 10000–10800 f. Realschul. u. verw. Anst. [33 S.] Kart. RM –.75

Einige Urteile über Bardey / Neue Einheitsausgabe

„Mit der in unserer Schule eingeführten Neuausgabe des ‚Bardey' für die Unterstufe sind wir in vollstem Maße zufrieden. Die wundervolle Anschaulichkeit in der Durchführung der theoretischen Betrachtungen zu den einzelnen Abschnitten machen die Durcharbeitung des Werkes zu einem Genuß und — wie ich jetzt schon aus persönlicher Erfahrung versichern kann — **zur Freude auch für die Schüler.** Es ist mir daher ein Bedürfnis, Ihrer hochgeschätzten Firma den Ausdruck größten Dankes für das bei Ihnen erschienene Mathematikwerk zu übermitteln, sowie die Versicherung, daß wir dasselbe empfehlen, wo wir können."

(Dr. E. Litzelmann, Breisach. Realschule.)

„... **Die Neubearbeitung entspricht durchaus den Anforderungen,** die der Schulgebrauch an ein solches Buch stellen muß. Die klare und anschauliche Einführung in die verschiedenen Stoffgebiete erhöht die Bedeutung des Buches für den Unterricht, da sie die zeitraubenden Diktate überflüssig macht. **Die Betonung des Funktionsbegriffes** und der **graphischen Darstellung** und die Erweiterung durch **die Kapitel über Differential- und Integralrechnung sind weitere Vorzüge des Buches ...**"

(Studienrat A. Brause, Schneeberg i. Erzgeb. Staatsrealgymnasium.)

„Das Buch bedeutet einen entschiedenen Fortschritt und findet den Beifall der Fachkollegen unserer Anstalt."

(Studienrat K. Meißner, Ballenstedt i. Harz. Wolterstorff-Gymnasium und Realschule.)

An Stelle von Bardeys „Aufgabensammlung" (ohne Lehrstoff) und ihrer ursprünglichen Bearbeitungen tritt ferner die im Rahmen des Lietzmannschen Unterrichtswerkes erschienene

Reformausgabe

bearbeitet von

Dr. W. Lietzmann und **Dr. P. Zühlke**

Oberstudiendirektor in Göttingen — Professor, Oberschulrat in Kassel

Ministeriell genehmigt für Preußen und für andere Länder

Ausgabe A
für Anstalten gymnasialer Richtung

Unterstufe: 6., durchgeś. Aufl. Mit 32 Fig. i. T. u. a. 2 Taf. [VIII u. 222 S.] 1926. RM 4.—[1]
Oberstufe: 4., durchges. Aufl. Mit 19 Fig. i. T. [VI u. 160 S.] 1926. . . RM 3.—[2]

Ausgabe B
für Anstalten realer Richtung

Unterstufe: 10., durchges. Aufl. Mit 32 Fig. i. T. u. a 2 Taf. [VIII u. 231 S.] 1926. RM 4.20[3]
Oberstufe: 6., durchges. u. verm. Aufl. Mit 23 Fig. i. T. [VI u. 242 S.] 1926. . RM 4.60[4]

Ergebnishefte für die Hand des Lehrers: [1]) 5. Aufl. RM 2.—. [2]) RM 2.—. [3]) 5. Aufl. RM 2.—. [4]) RM 2.60

vgl. die Urteile S. 3 u. 4

Zunächst für bayrische Anstalten:

Bardey-Lengauer, Aufgabensammlung für die höheren Lehranstalten Bayerns. 9., verb. Aufl., neubearb. von **Dr. H. Wieleitner,** Oberstudiendirektor am Neuen Realgymnasium in München. Mit 13 Fig. im Text. [IV u 195 S.] 1925 . . . . RM 3.40

Ergebnisse (nur für die Hand des Lehrers). RM 2.—

Als die sog. Kleinsche Reform sich durchsetzte, wurden deren leitende Gedanken auch in dieser Bardey-Ausgabe eingeführt, und es wurden die einleitenden Abschnitte der einzelnen Kapitel erweitert, so daß sie **eine Einführung in den algebraischen Lehrstoff** gaben. **Auch historische Notizen wurden beigegeben. Der neue Bearbeiter** hat von der 8. Aufl. (1921) an **diese Richtlinien weiter fortgeführt,** indem er den **einleitenden** Abschnitten noch strengeren Lehrbuchcharakter gab, die historischen Notizen auf den neuesten Stand der **Forschung** brachte und aus alten Büchern unmittelbar entnommene Aufgaben der Sammlung einverleibte.

Zunächst für sächsische Anstalten:

E. Bardeys Arithmetische Aufgaben nebst Lehrbuch der Arithmetik. Bearb. v. **Prof. Dr. H. Hartenstein,** vorm. Oberst.-R. a. d. Städt. Oberrealsch. Dresden-Johannstadt.

Für die Oberklassen sechsstufiger und die Mittelklassen neunstufiger Anstalten. Ausgabe A (mit Logarithmen). 14. Aufl. Mit 56 Fig. [V u. 301 S.] 1926. . . . . RM 4.80
Ausgabe B (ohne Logarithmen). 14. Aufl. Mit 56 Fig. [V u. 268 S.] 1926 . . . . RM 4.40

Ergebnisse (nur für die Hand des Lehrers). RM 1.80

Für die Oberklassen neunstufiger Anstalten ist die Oberstufe der neuen Einheitsausgabe (S.15) bestimmt.

Die wesentlichsten Gesichtspunkte, die für die von einer Versammlung sächsischer Realschullehrer auf **Grund** des „Bardey" veranlaßte Bearbeitung des I. Teiles maßgebend gewesen sind, sind folgende: **kurze und übersichtliche Darstellung** der in den einzelnen Kapiteln vorangestellten **Theorie, Beschränkung** des Dargebotenen **auf den vorgeschriebenen Lehrstoff;** Sichtung und **zeitgemäße Abänderung** bzw. **Ergänzung der Aufgaben** namentlich durch „angewandte", übersichtliche Zusammenstellung aller **Hauptsätze in einem Anhang;** Beifügung einer **5stelligen Logarithmentafel** zu einer (A-)Ausgabe. In den vierzehn Auflagen, die von der Bearbeitung bereits erschienen sind, ist sie **entsprechend den Fortschritten und Lehrordnungen weiter ausgestaltet** worden, so haben zahlreiche **Aufgaben geometrischen und physikalischen Inhaltes,** wie auch **graphische Darstellungen** und **Abbildungen** Aufnahme gefunden und die **geschichtlichen Hinweise** sind erweitert bzw. vermehrt worden. Auch die beigefügte Logarithmentafel ist durch **neue Tafeln** ergänzt worden.

Aus den Besprechungen und Urteilen über Lietzmann, Mathematisches Unterrichtswerk:

„Es muß voll anerkannt werden, daß das Werk im besten Sinne den Anforderungen gerecht wird, die die Richtlinien an ein Lehrbuch der Mathematik stellen.“ (Mädchenbildung auf christlicher Grundlage.)

„Mir scheint die Anregung zu geistiger Selbständigkeit, die durch die geschickte Auswahl interessanter Aufgaben ermöglicht wird, besonders wertvoll ...“ (Gertrud Rosendorn, Berlin. Sophienlyzeum.)

„... Ich habe in meinem Vortrag eingehend die allseitigen Vorzüge des Lietzmannschen Unterrichtswerkes betont und habe in der darauffolgenden Diskussion nur Zustimmung in bez. auf dieses Werk gefunden. Es waren die Rektoren fast sämtlicher württemb. höheren Mädchenschulen außer den Fachvertretern anwesend, und ich zweifle nicht, daß wie an unserer Anstalt, so auch an den übrigen das Lietzmannsche Unterrichtswerk eingeführt werden wird.“ (Studienrat K. Jung, Stuttgart. Königin-Katharina-Stift.)

„Das Werk hat mir außerordentlich gut gefallen. Besonders erfreut die glückliche Behandlung des Funktionsbegriffes und die Reichhaltigkeit der Aufgaben aus allen Gebieten, die in ihrer Eigenartigkeit in hohem Maße geeignet erscheinen, die Schülerinnen zu selbständiger mathematischer Arbeit zu erziehen. Auch die rege Beziehung zur Geschichte der Mathematik erscheint als Vorteil des Buches. Das Rechenbuch bereitet den mathematischen Unterricht sehr gut vor. Die Fülle der Denkaufgaben machen es besonders wertvoll.“ (Studienrätin K. Neumärker, Apolda. Lyzeum.)

„Wir haben probeweise in der neu eingerichteten O II Lietzmann eingeführt, ich glaube aber schon jetzt sagen zu können, daß von Ostern 1927 ab dieses ausgezeichnete Lehrbuch — die neue Druckordnung der 2. Auflage verdient besonderes Lob — aller Wahrscheinlichkeit nach für unsere ganze Schule eingeführt werden wird.“ (Studienrat Dr. J. Kartte, Berlin-Köpenick. Dorotheen-Lyzeum u. Dtsch. Oberschule i. E.)

„Das Lietzmannsche Unterrichtswerk stimmt in allen wesentlichen Teilen mit den Vorschriften der ‚Richtlinien von 1926‘ überein. Insbesondere bietet es reiche Anregungen für die Behandlung der Stoffe nach den Methoden des Arbeitsunterrichtes, da überall, auch in der Geometrie, die Aufgabe im Vordergrunde steht. Alle Seiten des mathematischen Unterrichtes werden bei der Auswahl berücksichtigt: Die geschichtliche und kulturgeschichtliche, die theoretische und praktische, die Problem-Mathematik und die philosophische Seite. Da auch alle denkbaren Gebiete der angewandten Mathematik gepflegt werden, ergeben sich vielfach zwanglos Verknüpfungen mit anderen Unterrichtsfächern, z. B. mit der Physik, der Astronomie, der Geographie.“ (Studiendirektor Dr. Otto Wendt, Eberswalde. Oberlyzeum.)

„... Wir benutzen die Lietzmannschen Bücher schon jetzt beim Unterricht und sind immer wieder erfreut über das logische Fortschreiten des Stoffes, über die Denkfragen und die anregenden Beispiele zu den Gesetzen, durch welche die lebendige Teilnahme und Lust der Schülerinnen gefördert wird.“ (Studienrätin H. Krefft, Forst. Städt. Lyzeum.)

Rechenbuch:

„Weitaus das beste Buch in der Mannigfaltigkeit der Anwendungen aus allen modernen Gebieten, insbesondere auch der Staatsbürgerkunde, ist Richter, Rechenbuch, das auch ein sehr zu begrüßendes Sachregister enthält. Hierdurch lassen sich Querverbindungen mit den übrigen Fächern leicht herstellen.“ (Deutsche Mädchenbildung.)

„... gefiel mir gut die weitgehende Zuhilfenahme der zeichnerischen Darstellung, die mannigfaltige Zusammenstellung der Aufgaben, besonders auch zu ganzen, zusammenhängenden Gruppen, ferner die zielbewußte Vorbereitung des algebraischen Unterrichts, für die ja im Rechnen Zeit und Gelegenheit genug da ist.“ (Studienrat H. Opladen, Benrath. Realgymnasium.)

„Richters Rechenbuch gefällt mir nach der mathematischen Anordnung und Art der Aufgaben außerordentlich gut. Es bereitet den mathematischen Unterricht ausgezeichnet vor. Der zugehörige Leitfaden ist sehr gut. Er bringt auch eine klare Behandlung des abgekürzten Rechnens, auf das durch die neuen Bestimmungen besonders hingewiesen ist.“ (Studienr. Dr. E. Grevsmühl, Lüneburg. Wilhelm-Raabe-Schule. [Staatl. Oberlyzeum.])

Aufgabensammlung und Leitfaden für Arithmetik, Algebra und Analysis:

„Im wesentlichen deckt sich das Urteil meiner Fachkollegen mit dem meinigen: Reiche Fülle von Problemen aus jedem Gebiet, Aufgaben dem Fassungsvermögen der gegenwärtigen Jugend angepaßt, sehr interessante Zusammenstellung klassischer Aufgaben, die ständig zur Geschichte der Mathematik führen.“ (Studienrat M. Vogel, Gelsenkirchen. Städtisches Oberlyzeum.)

„Besonders erfreulich ist, daß dem Funktionsbegriff von Anfang an die richtige Bedeutung beigelegt wird. Die Aufgabensammlung für dieses Kapitel und die Darstellungen sind so reichhaltig und mannigfaltig, daß jedem Geschmack Rechnung getragen ist. Als Vorzug finde ich noch, daß Arithmetik und Algebra nicht streng getrennt werden, sondern die Gleichungslehre sobald als möglich einsetzt. Des weiteren begrüße ich die Eingliederung der abgekürzten Multiplikation und Division, die Betrachtungen über unser Zahlensystem, die Gruppierung der Textgleichungen nach Fächern, die Beziehunaen zwischen den Operationen.“ (Studienrat Dr. D. Kretzschmar, Plauen. Höhere Mädchenschule.)

„Immer wieder bin ich erfreut über die Fülle der praktischen Aufgaben und über die vielen Denkfragen. Überhaupt ist die ganze Art der Aufgaben recht geeignet, das Interesse der Kinder wachzuhalten und zu wecken. In der Konferenz der Fachlehrer der beiden städtischen hiesigen Lyzeen war das Interesse für dieses Lehrbuch allgemein.“ (Studienassessor P. Kirchner, Berlin-Lichterfelde. Dürer-Lyzeum.)

Aufgabensammlung und Leitfaden für Geometrie:

„Das Werk bringt eine Fülle von Aufgaben und Abbildungen, die für die kindliche Hand, das ungeübte Auge und das erwachende geometrische Verständnis vortrefflich geeignet sind. Für die mittleren Klassen sind interessante Abbildungen und Aufgaben aus historischen Werken, und zwar aus Originalausgaben, eingeschaltet, z. B. für Trigonometrie und Körperlehre. Es wird eine Freude sein, die kleinen und großen Schüler und Schülerinnen danach arbeiten zu lassen.“ (Oberlehrerin Math. Wolf in der Lehrerin.)

„Endlich ein Buch, welches mit der Vorherrschaft des Euklidischen Verfahrens in der Unterstufe bricht. Ein Buch, das geeignet ist, Lust und Liebe an der lebensvollen und nicht bloß abstrakten Geometrie zu wecken; ein Buch, das für die Hand des Lehrers und Schülers gleich gut sich eignet. Jenem bringt es eine anschauliche Fülle von geometrischen Aufgaben, diesem zeigt es, wie natürlich der Weg zu der exakten Wissenschaft ist. Den Leitfaden wie den propädeutischen Kurs möchte ich in dem Buch nicht missen.“ (Studienrat Dr. D. Kretzschmar, Plauen. Höhere Mädchenschule.)

Crantz – Kundt – Heinemann

Mathematisches Unterrichtswerk für höhere Mädchenbildungsanstalten

In allen Teilen ministeriell genehmigt für Preußen (U II 15312 v. 25. 1. 26 / U II 17020 v. 24. 6. 26)

Von diesem Unterrichtswerk liegen vor:

Teil II: Leitfaden der Geometrie
für die Klassen IV bis U II bearbeitet von Oberstudienrätin **Dr. K. Heinemann**-Breslau
11., verb. Aufl. Mit 158 Figuren im Text. [VI u. 96 S.] 1926 . . . . RM 2.—

Teil III: Geometrische Aufgaben
10., wesentlich erweiterte Aufl. Mit 78 Fig. i. T. [VI, 132 S. u. 1 Tab.] 1926. RM 2.40

Teile II und III zusammengebunden RM 4.20

Lehrstoff und **Darstellung** dieser **völlig neuen** und **in vielen Teilen ergänzten Bearbeitung** des **geometrischen** Teiles des **Lehrbuches der Mathematik** und der **Aufgaben zur Planimetrie** für höhere Mädchenbildungsanstalten von **P. Crantz** entsprechen in jeder Hinsicht den Vorschriften der **Richtlinien** vom 6. 4. 1925. — Die starre, auf die euklidische Form abzielende Darstellung des alten Buches ist durch **zeitgemäße** und **psychologische** Durcharbeitung des Stoffes ersetzt; die für den Anfänger leicht faßlichen und beweiskräftigen **Prinzipien der Bewegung, Symmetriebetrachtungen** u. a. m. werden ausgiebig benutzt. **Straffe Gliederung** und die Verwendung verschiedener Schriftgrade erleichtern die Übersicht. Die **reichhaltige Aufgabensammlung** bringt wertvollen Übungsstoff aus allen Gebieten des Lebens, unter **besonderer Berücksichtigung** der **„weiblichen Interessen"**; sie trägt dem Gedanken des **Arbeitsunterrichtes** dadurch Rechnung, daß sie wichtige neue Erkenntnisse durch entsprechend gestellte Aufgaben zu vermitteln strebt; sie dient ebenso der Einführung in die **funktionalen Zusammenhänge**, indem sie frühzeitig Aufgaben über die Abhängigkeit der Teile einer Figur voneinander zur Bearbeitung stellt. Eine **Tafel** der natürlichen Zahlen, der Winkelfunktionen, der Quadrate und Quadratwurzeln der Zahlen von 1 bis 100 dient als Hilfsmittel bei der Durchführung von Zahlenrechnungen.

Teil IV: Leitfaden der Arithmetik
für die Klassen U III bis U II bearbeitet von Studiendirektorin **F. Kundt**-Schweidnitz
10. Aufl. Mit 27 teilw. farb. Fig. im Text. [VI u. 74 S.] 1925. . . . . . . RM 1.60

Teil V: Arithmetische Aufgaben
11. Aufl. Mit 8 teilw. farb. Fig. i. T. [VI u. 198 S.] 1926. . . . . RM 3.60

Teil IV und V zusammengebunden RM 5.—

Auch für die **Neubearbeitung** dieser Teile, die aus dem **arithmetischen** Teil des **Crantzschen Lehrbuches** und aus den **Kundtschen Arithmetischen Aufgaben** hervorgegangen sind, war das Bestreben maßgebend, die **Vorzüge** dieser, die ihnen so viele Freunde gewonnen haben, **zu übernehmen**, gleichzeitig aber die Forderungen der **Reformbewegung** bzw. der **Richtlinien zu berücksichtigen**. Dementsprechend ist den Abschnitten über graphische Darstellungen, Funktionen und graphische Lösung der Gleichungen ein breiter Raum gewährt worden. Um die **Zusammenhänge** innerhalb der Stoffgebiete klar hervortreten zu lassen, sind in der Aufgabensammlung die Abschnitte über **Funktionen** und **graphische Darstellungen** sowie die **Gleichungen** an eine spätere Stelle gerückt worden. Der **Funktionsbegriff durchdringt** aber seiner Bedeutung entsprechend die ganze Aufgabensammlung. Die **Textgleichungen** sind durchaus zeitgemäß ergänzt in dem Bestreben, den mathematischen Unterricht so lebensnah und bodenständig zu gestalten wie möglich. Der Stoff der Aufgaben ist meist dem **wirtschaftlichen Leben** entnommen, dem **Haushalte der Familie** und des **Staates**.

Teil VI: Leitfaden der Mathematik (Geometrie und Arithmetik) **Teil VII: Geometrische und arithmetische Aufgaben**

für die Klassen O II bis O I bearbeitet von Oberstudienrätin **Dr. K. Heinemann**-Breslau

Mit 85 Fig. [VII u. 147 S.] 1926. *RM* 3.— Mit 58 Fig. [VII u. 218 S.] 1926. *RM* 4.40

Die Oberstufe bietet für Geometrie, Algebra und Analysis gleichfalls **Leitfaden und Aufgaben** in selbständiger, streng **systematischer** Bearbeitung. Die in den **Richtlinien** niedergelegten Forderungen waren **für Stoffwahl und -behandlung maßgebend.** In den **Leitfadenteilen** ist besonderer Wert gelegt auf straffe **Gliederung, Kürze** und **Übersichtlichkeit** der Darstellung, Herausarbeitung der gedanklichen **Grundlagen** und stofflichen **Zusammenhänge** der Einzelgebiete. Zur Vermeidung jeder Überlastung ist der **Stoff** streng **gesichtet** und Entbehrliches außerdem gekennzeichnet. Die **Freizügigkeit des Unterrichts** wird gewährleistet durch Verzicht auf methodische Verknüpfung der Einzelgebiete. **Praxis** und **Technik** sind weitestgehend berücksichtigt; **historische** Hinweise beleben den Stoff. Die **Aufgaben** stellen den Gedanken der **Selbsttätigkeit** der Schülerin in den Vordergrund und bilden demgemäß eine unentbehrliche Ergänzung des Leitfadens. Für die Anwendungen liefern **volks-** und **weltwirtschaftliche** Zusammenhänge, **technische** Notwendigkeiten, Forderungen des **täglichen Lebens** den Stoff.

Ergänzungsheft 1: Abgekürztes Rechnen. Leitfaden und Aufgabensammlung. Von Studienassessorin Dr. **Ch. Hurwitz**-Berlin. Mit 7 Fig. im Text [IV u. 37 S.] 1926 *RM* 1.—

In Vorbereitung befinden sich:

Teil I: Rechenbuch von Oberstudienrätin **Dr. K. Heinemann**-Breslau u. Studienassessorin **Dr. Ch. Hurwitz**-Berlin berücksichtigt in seinem Aufgabenstoff besonders Eigenart und Interessenkreis der Mädchen. — **Ergänzungsheft 2: Wirtschaftliches Rechnen. Ergebnishefte** für die **Teile III, V und VII.**

Müller-Mahlert: Mathematisches Lehr- u. Übungsbuch

für höhere Mädchenbildungsanstalten, neubearb. v. **Dr. H. Made,** Dir. des Lyzeums Weft, Elberfeld

Ministeriell genehmigt für Preußen (U II 15312 v. 25. 1. 26) und für andere Länder

I. Teil: **Arithmetik und Algebra.** Für die Unter- u. Mittelstufe. 9. Aufl. Mit 35 teilw. farb. Fig. i. T. [IV u. 181 S.] 1926. Kart. *RM* 3.60. — II. Teil: **Planimetrie u. Körperberechnungen.** 8., verb. Aufl. Mit 179 teilw. farb. Fig. i. T. [V u. 181 S.] 1925. Geb. *RM* 3.40.

Als Oberstufe sind die entsprechenden Teile von Crantz-Kundt-Heinemann zu benutzen.

Gleichfalls in Neubearbeitung liegt vor das dazugehörige:

Müller-Schmidt: Rechenbuch für höh. Mädchenbildungsanstalten

Ministeriell genehmigt für Preußen (U II 17641 v. 10. 9. 26) und für andere Länder

4. Heft. Für die Kl. VI. 12. Aufl. Mit 2 Fig. [IV u. 70 S.] 1926. *RM* 1.20. **5. Heft.** Für die Kl. V. 12., verb. Aufl. [IV. u. 72 S.] 1926. *RM* 1.20. **6. Heft.** Für die Kl. IV. 11., verb. Aufl. Mit 14 Fig. i. T. [IV u. 109 S.] 1925. *RM* 2.—.

Die Hefte 1—3, die den Stoff der Grundschule enthalten, sind auch weiterhin noch lieferbar, und zwar zum Preise von: Heft 1 *RM* 1.—; Heft 2 *RM* 1.20; Heft 3 *RM* 1.20

Das **Lehr- und Übungsbuch** ist in seinen **beiden Teilen vollständig umgearbeitet** worden. Die **Grundsätze der mathematischen Reformbewegung:** Pflege des funktionalen Denkens, graphische Darstellung zur Veranschaulichung solcher Beziehungen, Bewegungsprinzip in der Geometrie, Beziehungen zwischen arithmetischen Sätzen und Ziffernrechnen usf. sind **mit dem Ziele berücksichtigt** worden, die Schülerinnen auch im mathematischen Unterricht **zu geistiger Selbständigkeit** zu erziehen. Dabei ist der **Lehrstoff,** der, wie bisher, dem Übungsstoff vorausgeht, den besonderen Verhältnissen an Mädchenschulen entsprechend ausführlich und einfach dargestellt worden, die methodische Durcharbeitung ist aber dem Unterricht überlassen. Die **Aufgaben** sind vom Leichten zum Schwereren fortschreitend angeordnet, den verschiedensten Anwendungsgebieten entnommen und so geeignet, den Schülerinnen die **Tatsachen des privaten und öffentlichen Lebens** durch die rechnerische Behandlung verständlich werden zu lassen. Zahlreiche **meist zweifarbige Figuren** erhöhen die Anschaulichkeit. — Auch das **Rechenbuch,** auf dem sich das vorher genannte Lehrbuch der Mathematik aufbaut, **ist nach den gleichen Grundsätzen neubearbeitet worden.**

Zur Ergänzung der Lehrerbücherei

Betrachtungen über mathematische Erziehung v. Kindergarten b. z. Universität. Von Divisionsinsp. am Londoner County Council B. Branford. Deutsche Bearb. v. Dr. R. Schimmack u. Studienr. Dr. H. Weinreich. Mit 114 Fig. i. T., 1 Titelfig. u. 1 Taf. Geh. RM 11.—, geb. RM 13.—

Über angewandte Mathematik und Physik in ihrer Bedeutung für den Unterricht an höh. Schulen. Nebst Erläuter. d. bezügl. Göttinger Universitätseinrichtungen. Vorträge, gehalten i. Göttingen Ostern 1900. Ges. v. Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. F. Klein u. Geheimrat Prof. Dr. E. Riecke. Mit 1 Wiederabdr. verschied. einschläg. Aufsätze. Mit 84 Fig. Geb. RM 10.—

Vorträge über den mathematischen Unterricht an den höheren Schulen. Von Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. F. Klein. Bearb. von Dr. R. Schimmack. A. u. d. T.: Mathematische Vorlesungen an der Universität Göttingen I. Teil I: Von der Organisation des mathematischen Unterrichts. Mit 8 zum Teil farbigen Textfiguren. Geb. RM 9.—

Die Tätigkeit des Deutschen Unterausschusses der Internationalen Mathematischen Unterrichtskommission 1908—1916. Hrsg. von Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. A. Gutzmer. (IMUK B. Heft 12.) Geh. RM —.75

Die Tätigkeit des Deutschen Ausschusses für den math. u. naturw. Unterricht in den Jahren 1908—1913. Hrsg. von Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. A. Gutzmer. Geh. RM 14.—

Neue Lehrpläne f. d. mathem. und naturwiss. Unterricht an d. höh. Lehranstalten. [Meraner Vorschläge.] (Schr. d. Dtsch. Aussch. f. d. math. und naturw. Unterr. II. Heft 8.) RM 1.—

Der mathematische Unterricht an den höheren Knabenschulen nach dem Kriege. Von Prof. Dr. H. E. Timerding. (DAMNU II, 4.) Geh. RM —.40

Der neue Kurs im preußischen höheren Schulwesen. Hrsg. von Geh. Studienrat Prof. Dr. F. Poske. (Schriften d. Deutsch. Aussch. f. d. math. u. naturw. Unterr. II. Folge. Heft 9.) Geh. RM —.80

Stoff und Methode im mathematischen Unterricht der norddeutschen höheren Schulen. Von Oberstudiendir. Dr. W. Lietzmann. (IMUK A. I. Bd. Heft 1.) Steif geh. RM 3.—

Stoff und Methode des Rechenunterrichtes in Deutschland. Ein Literaturbericht. Von Oberstud.-Dir. Dr. W. Lietzmann. Mit 20 Fig. (IMUK A. V. Bd. Heft 1.) Steif geh. RM 3.60

Stoff und Methode des Raumlehrunterrichtes in Deutschland. Ein Literaturbericht. Von Oberstud.-Dir. Dr. W. Lietzmann. Mit 38 Fig. (IMUK A. V. Bd. Heft 2.) Steif geh. RM 2.80

Handbuch des mathematischen Unterrichts. Von Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. W. Killing u. Prof. Dr. H. Hovestadt. I. Bd. Mit 32 Fig. II. Bd. Mit 9 Fig. Geh. je RM 15.—, geb. je RM 17.—

Handbuch der Elementarmathematik. Von Geheimrat Prof. Dr. K. Schwering. Mit 193 Figuren. Geb. RM 13.—

Enzyklopädie der Elementarmathematik. Von Weber-Wellstein. I. Bd.: Arithmetik, Algebra und Analysis. 4. Aufl., neubearb. von Prof. Dr. P. Epstein. Mit 26 Fig. Geb. RM 18.—. II. Bd.: Elemente der Geometrie. Bearb. von Prof. Dr. H. Weber, Prof. Dr. J. Wellstein und Studiendirektor Prof. Dr. W. Jacobsthal. 3. Aufl. Mit 237 Fig. Geb. RM 19.—. Bd. III.: Angewandte Elementar-Mathematik. Teil I: Mathematische Physik. 3. Aufl., bearb. von Prof. Dr. H. Weber. Mit 254 Fig. im Text. Geb. RM 17.—. Teil II: Darstellende Geometrie, Graphische Statik, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Politische Arithmetik und Astronomie. 3., verb. Aufl., bearb. von Prof. Dr. J. Wellstein, Prof. Dr. H. Weber, Dir. Prof. Dr. H. Bleicher, Prof. Dr. J. Bauschinger und Prof. Dr. E. Salkowski. Mit 271 Fig. im Text. Geb. RM 22.—

Elemente der Mathematik. Von Prof. J. Tannery. Mit einem geschichtlichen Anhang von P. Tannery. Autorisierte deutsche Ausgabe von Prof. Dr. P. Klaeß. Mit einem Einführungswort von Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. F. Klein. 2. Aufl. Mit 184 Fig. Geb. RM 13.—

Elemente der Mathematik. Von Prof. Dr. E. Borel. Deutsch von Prof. Dr. P. Stäckel. In 2 Bd. I. Band: Arithmetik und Algebra. Nebst den Elementen der Differentialrechnung. 2. Aufl. Mit 56 Fig. und 3 Tafeln. Geh. RM 12.—, geb. RM 14.—. II. Band: Geometrie. Mit einer Einführung in d. ebene Trigonometrie. 2. Aufl. Mit 442 Fig. u. 2 Taf. Geh. RM 11.—, geb. RM 13.—

Grundlehren der Mathematik. Für Studierende u. Lehrer. In 2 Teilen. I. Teil: Die Grundlehren d. Arithmetik u. Algebra. Bearb. v. Geh. Hofrat Prof. Dr. E. Netto u. Oberrealschulprof. Dr. C. Färber. I. Band: Arithmetik. Von C. Färber. Mit 9 Fig. Geb. RM 14.— II. Band: Algebra. Von E. Netto. Geb. RM 7.80. II. Teil: Die Grundlehren der Geometrie. Bearb. von Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. W. Frz. Meyer u. Realgymnasialdir. Prof. Dr. H. Thieme. I. Band: Die Elemente der Geometrie. Bearb. von H. Thieme. Mit 323 Fig. Geb. RM 14.—

Pascals Repertorium der höheren Mathematik. 2., völlig umgearb. Aufl. d. dtschn. Ausg. unter Mitwirkung zahlr. Mathematiker hrsg. von Prof. Dr. H. E. Timerding u. Prof. Dr. E. Salkowski. I. Band: Analysis. I. Hälfte: Algebra, Differential- und Integralrechnung. Geb. RM 18.— II. Hälfte: Differentialgleichungen, Funktionentheorie, Zahlentheorie. [U. d. Pr. 1927.] II. Band: Geometrie. I. Hälfte: Grundlagen und ebene Geometrie. Mit 54 Fig. Geb. RM 18.—. II. Hälfte: Raumgeometrie. Mit 12 Fig. Geh. RM 17.—, geb. RM 20.—

Zahlenrechnen. Von Prof. Dr. L. Schrutka. (Math.-phys. Lehrb. Bd. 20.) Kart. RM 4.40

Die Determinanten. Von Geh. Hofr. Prof. Dr. E. Netto. 2., verb. Aufl. von Prof. Dr. L. Bieberbach. (Math.-phys. Lehrb. Bd. 9.) Kart. RM 4.40

Höhere Mathematik für Mathematiker, Physiker und Ingenieure. 3 Bde. Von Prof. Dr. R. Rothe. (Teubn. techn. Leitf. Bd. 21/23.) Bd. I. Differentialrechnung und Grundformeln der Integralrechnung nebst Anwendungen. 2. Aufl. Mit 155 Fig. Kart. RM 5.—

Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht aller Schulgattungen

Begr. 1869 von J. C. V. Hoffmann. Hrsg. von H. Schotten in Halle a. S. und W. Lietzmann in Göttingen, unter Mitarbeit von W. Hillers in Hamburg. 58. Jahrgang. 1927. Halbjährlich RM 10.—

Die Zeitschrift hat seit ihrem Bestehen auf dem Gebiete des höheren Schulwesens erfolgreich gewirkt. Sie hat trotz mancher nach ihrem Muster neugegründeter ähnlicher Organe ihre Bedeutung fortdauernd sich erhalten. Der Inhalt gliedert sich in folgende Abteilungen: I. Abhandlungen. Kleine Mitteilungen. Aufgabenrepertorium. II. Berichte aus der Forschung, über Organisation des Unterrichts, Methodik, Lehrmittelwesen, Versammlungen und Verhandlungen über Unterrichtsfragen. III. Literarische Berichte: Besprechungen, Programm-, Zeitschriften- und Bücherschau.

[Beihefte:

1. Das Relativitätsprinzip. Von H. A. Lorentz. Bearb. von W. H. Keesom. Geh. RM 1.40. — 2. Der math. Unterricht in Dänemark. Von A. Rohrberg. Geh. RM 2.40. — 3. Der math. Unterricht der höh. Knabenschulen Englands. Von G. Wolff. Mit 60 Abb. i. T. Geh. RM 5.—. — 4. Die Fortschritte der math. Unterrichtsreform seit 1910. Von H. Weinreich, sowie: Der Pariser Kongreß der Intern. Math. Unterrichtskommission. Von W. Lietzmann. Geh. RM 2.20. — 5. Geometrische Experimente. Von J. Hjelmslev. Aus dem Dänischen von A. Rohrberg. Mit 56 Fig. im Text. Geh. RM 1.80. — 7. Der Gruppenbegriff als Ordnungsprinzip des geometrischen Unterrichts. Von E. Salkowski. Mit 74 Fig. Geh. RM 2.80. — 8. Ausführl. Stoffauswahl für die Lehrpläne im wissenschaftl. Zeichnen an den höh. Lehranstalten. Mit Literaturangaben. Von M. Ebner. Geh. RM 1.20. —. 10. Nichteuklidische Geometrie in elementarer Behandlung. Von M. Simon, hrsg. von K. Fladt. Mit 125 Fig. i. T. u. 1 Titelbild. Geh. RM 8.—. — 11. u. 12. Die Mathematik in den Lehrplänen der deutschen höheren Schulen. Von F. W. Grundel. [In Vorb. 1927.]

Naturwissenschaftliche Monatshefte

für den biologischen, chemischen, geographischen und geologischen Unterricht. Unter Mitwirkung der staatl. Hauptstelle für den naturwissenschaftl. Unterr., Berlin, hrsg. von Oberstudienr. Dr. R. Rein. VII. Bd., der ganz. Folge XXIV. Bd. 1926/27. Halbjährl. RM 7.50

Aus Natur und Geisteswelt

Sammlung wissenschaftlich-gemeinverständlicher Darstellungen. Jeder Band geb. RM 2.—

Zur Mathematik ist bisher erschienen:

Naturwissenschaften, Mathematik und Medizin im klassischen Altertum. Von Prof. Dr. J. L. Heiberg. 2. Aufl. Mit 2 Figuren. (Bd. 370.)

Einführung in die Mathematik. Von Studienrat W. Mendelsohn. Mit 42 Fig. i. Text. (Bd. 503.)

Arithmetik und Algebra zum Selbstunterricht. Von Geh. Studienrat Prof. P. Crantz. I. Teil: Die Rechnungsarten. Gleichungen ersten Grades mit einer und mehreren Unbekannten. Gleichungen zweiten Grades. 8. Aufl. Mit 9 Fig. im Text. (Bd. 120.) II. Teil: Gleichungen. Arithmetische und geometrische Reihen. Zinseszins- und Rentenrechnung. Komplexe Zahlen. Binomischer Lehrsatz. 6. Aufl. Mit 21 Textfig. (Bd. 205.)

Lehrbuch der Rechenvorteile. Schnellrechnen und Rechenkunst. Von Ing. Dr. J. Bojko. 2. Aufl. Mit zahlreichen Übungsbeispielen. (Bd. 739.)

Kaufmännisches Rechnen zum Selbstunterricht. Von Studienrat K. Dröll. (Bd. 724.)

Graphisches Rechnen. Von Prof. O. Prölß. Mit 164 Fig. i. Text. (Bd. 708.)

Praktische Mathematik. Von Prof. Dr. R. Neuendorff. I. Teil: Graph. Darstellungen. Verkürzt. Rechn. Das Rechn. m. Tabellen. Mech. Rechenhilfsmittel. Kaufmännisches Rechnen im täglichen Leben. Wahrscheinlichkeitsrechnung. 3. Aufl. Mit 29 Fig. im Text und 1 Tafel. (Bd. 341). II. Teil: Geom. Zeichn., Projektionslehre, Flächenmess., Körpermess. Mit 133 Fig. (Bd. 526).

Maße und Messen. Von Dr. W. Block. Mit 34 Abbildungen (Bd. 385.)

Vektoranalysis. Von Privatdozent Dr. M. Krafft. [In Vorb. 1927.] (Bd. 677).

Einführung in die Infinitesimalrechnung mit einer histor. Übersicht. Von Prof. Dr. G. Kowalewski. 3., verb. Aufl. Mit 18 Fig. (Bd. 197.)

Differentialrechnung — Integralrechnung. Unter Berücksichtigung der prakt. Anwendung in der Technik, mit zahlreich. Beisp. u. Aufg. versehen. Von Studienrat Privatdozent Dr. M. Lindow. 4. bzw. 3. Aufl. Mit zusammen 93 Fig. im Text und 361 Aufg. (Bd. 387 u. 673.)

Differentialgleichungen unter Berücksichtigung der prakt. Anwendung in der Techn. mit zahlr. Beispielen und Aufg. versehen. Von Studienrat Privatdoz. Dr. M. Lindow. Mit 38 Fig. i. Text und 160 Aufg. (Bd. 589.)

Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. Von Geh. Reg.-Rat Prof. E. Hegemann. Mit 11 Fig. im Text (Bd. 609.)

Planimetrie zum Selbstunterricht. Von Geh. Studienrat Prof. P. Crantz. 3. Aufl. Mit 94 Fig. (Bd. 340.)

Ebene Trigonometrie zum Selbstunterricht. Von Geh. Studienr. Prof. P. Crantz. 4. Aufl. Mit 50 Fig. im Text. (Bd. 431.)

Sphärische Trigonometrie z. Selbstunterricht. Von Geh. Studienrat Prof. P. Crantz. Mit 27 Fig. (Bd. 605.)

Analytische Geometrie der Ebene zum Selbstunterricht. Von Geh. Studienrat Prof. P. Crantz. 4. Aufl. Durchges. von Studienrat Dr. M. Hauptmann. Mit 55 Fig. i. T. (Bd. 504.)

Einführung in die darstellende Geometrie. Von Prof. P. B. Fischer. Mit 59 Fig. (Bd. 541.)

Geometrisches Zeichnen. Von Zeichenlehrer A. Schudeisky. Mit 172 Abb. i. Text u. auf 12 Taf. (Bd. 568.)

Projektionslehre. Die rechtwinkelige Parallelprojektion und ihre Anwendung auf die Darstellung technischer Gebilde nebst Anh. über die schiefwinkelige Parallelprojektion, in kurzer, leichtfaßl. Darst. f. Selbstunterricht und Schulgebrauch. Von Zeichenl. A. Schudeisky. 2. Aufl. Mit 165 Fig. i. Text. (Bd. 564.)

Grundzüge der Perspektive nebst Anwendungen. Von Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. K. Doehlemann. 2., verb. Aufl. Mit 91 Fig. und 11 Abb. (Bd. 510.)

Photogrammetrie. Von Dr.-Ing. H. Lüscher. Mit 78 Fig. i. T. u. a. 2 Tafeln. (Bd. 612.)

Mathematische Spiele. Von Dr. W. Ahrens. 4., verb. Aufl. Mit 1 Titelbild und 78 Fig. (Bd. 170.)

Das Schachspiel und seine strategischen Prinzipien. Von Dr. M. Lange. 4. Aufl. Mit 1 Schachbrettafel u. 43 Diagrammen. (Bd. 281.)

Druck von B. G. Teubner in Leipzig.

Leben und Schönheit der Antike erschließen:



Berlin, Antikensammlungen. Aufnahme der Museumsverwaltung.

Tanzschule. Von rotfiguriger kampanischer Vase. 5. bis 4. Jahrh. v. Chr.
Verkleinerte Wiedergabe aus: Back, Körper und Rhythmus.

Körper und Rhythmus. Griechische Bildwerke. 52 ganzseitige Abbildungen mit einer Einführung. Von Geh. Hofrat Dr. Fr. Back. Kart. *RM* 4.–, geb. *RM* 6.–

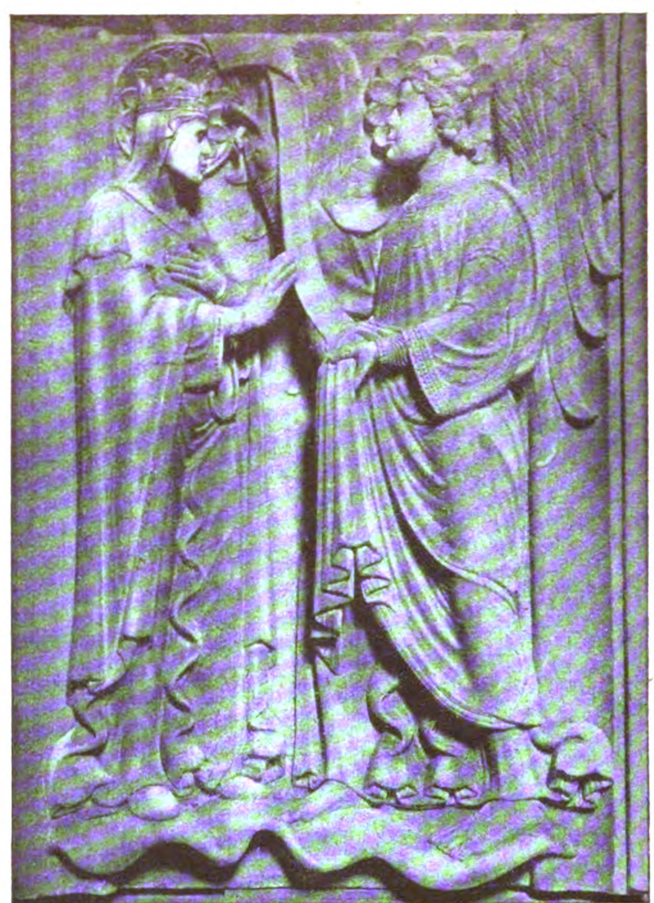
Ein neues Gefühl für Körperlichkeit erfüllt unsere Zeit. In Sport und Mode findet es seinen Ausdruck, aber vielfach nicht als Natur, sondern als Raffinement der Überkultur. Da zeigt dieses Heft, was Bildung des Körpers einem Volke war, dem sie als sittliche Pflicht galt, bei dem sie religiöse Weihe hatte, wo Einfühlung in das Wesen des Körpers die Meister, die selbst in gymnastischer Übung aufgewachsen waren, zur Darstellung lebendiger Schönheit und der von innerem Gesetz bestimmten Bewegung, des Rhythmus, führte.

Die antike Kultur in ihren Hauptzügen dargestellt von Oberstudiendirektor Prof. Dr. F. Poland, Direktor Dr. E. Reisinger und Oberstudiendirektor Prof. Dr. R. Wagner. 2. Aufl. Mit 130 Abbildungen im Text, 6 ein- und mehrfarbigen Tafeln und 2 Plänen. In Leinen geb. *RM* 12.–

„Das Ganze ist ein ausgezeichneter Wegweiser in die antike Kulturwelt; die vorurteilslose Betrachtung, die wissenschaftliche Höhe, die treffsichere Hervorhebung des Wesentlichen, die präzise, schöne Darstellung sind sämtlichen Verfassern eigen. Die reiche Ausstattung des Buches mit Abbildungen, die meisterhaft in der Auswahl und in der Ausführung sind, bilden einen besonderen Ruhmestitel für das gesamte Werk."
(München-Augsburger Abendzeitung.)

Staat und Gesellschaft der Griechen und Römer bis zum Ende des Mittelalters. Von Wirkl. Geh. Rat Prof. Dr. U. v. Wilamowitz-Moellendorff, Geh. Hofrat Prof. Dr. J. Kromayer und Prof. Dr. A. Heisenberg. (Die Kultur der Gegenwart, herausgegeben von Prof. Dr. P. Hinneberg. Teil II, Abt. 4, I.) 2. Aufl. Geb. *RM* 18.–, in Halbleder *RM* 22.–

Antike Technik. Sieben Vorträge. Von Geh. Oberregierungsrat Prof. D. Dr. H. Diels. 3. Aufl. Mit 78 Abbildungen, 18 Tafeln und 1 Titelbild. Geb. *RM* 10.–



Verkündigung in Bamberg, Dom. Chorschranken des Ostchors. 1220/30. Stein.
Aus: Schoenberger, Bilder zur Kunst- und Kulturgeschichte

Bilder zur Kunst- und Kulturgeschichte

Herausgegeben von
Privatdozent
Dr. G. Schoenberger

Zunächst erscheint:
Heft 2: Kunst und Kultur des Mittelalters bis zur Reformation.

In Vorbereitung:
Heft 1: Antike Kunst u. Kultur. Heft 3: Die neuere Zeit von der Reformation bis zum 19. Jahrhundert. Heft 4: Moderne Kunst und Kultur.

Jed. Heft ca. RM 2.50

Wir wollen heute statt Reflexion unmittelbares Erleben. Es bietet sich dort, wo Leben in anschaulichen Formen in Erscheinung tritt, in der Kunst. Das Schoenbergersche Werk gibt in Bildern künstlerische Darstellungen der verschiedenen Zeitperioden und so anschauliche Kunde ihrer Kultur nach den verschiedensten Seiten geistiger und praktischer Äußerung. Ein begleitender Text in knappster Form leitet dazu an, zu sehen, zu würdigen und zu erleben und reiht das Einzelne in den Zusammenhang der stilistischen Entwicklung und des geschichtlichen Verlaufs.

Kunstgeschichtliches Wörterbuch

Von Dr. H. Vollmer

(Teubners kleine Fachwörterbücher Bd. 13). In Ganzleinen geb. ca. RM 7.50

In lexikalischer Form findet man hier Erklärung der verschiedenen Fachausdrücke auf dem Gebiete der Kunst und knappe Auskunft über die wichtigsten historischen und systematischen Fragen der Kunstwissenschaft. Besonders wertvoll sind die zu kurzen Abrissen über die Entwicklung einzelner Kunstgebiete ausgestalteten Artikel und die Lebens- und Schaffensübersichten führender Künstler.



DIE RENAISSANCE IN FLORENZ UND ROM

Acht Vorträge von Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. K. Brandi

7. Aufl. In Ganzleinen mit Goldaufdruck und Goldoberschnitt RM 7.—

„Brandi hat seine Aufgabe in glänzendster Weise gelöst. Ein volles, ungemein anschauliches Bild der großen Zeit strahlt uns aus seiner Schrift entgegen. Brandi erfühlt feingeistig die große, neue Lebensform, aus der die Bewegung hervorging; seine treffsichere Einfühlungsfähigkeit macht es ihm möglich, die großen Gestalten der Renaissancezeit, Staatsmänner und Künstler, intuitiv zu erschauen und sie in einer wahrhaft klassischen Sprache zu schildern, jeder Satz ist gefeilt und künstlerisch gerundet."
(Deutsches Philologenblatt.)



München, Staatsgalerie. Mit Genehmigung der Verlagsbuchhandlung E. A. Seemann, Leipzig.

Hans von Marées: Werbung.

Aus Hamann: Die deutsche Malerei vom Rokoko bis zum Expressionismus.

Die deutsche Malerei
vom Rokoko bis zum Expressionismus
Von Prof. Dr. R. Hamann

Mit 362 Abb. i. T. und 10 mehrfarb. Tafeln. Schrift und Einband von Prof. Dr. W. Tiemann. Geh. RM 28.—, im Buckramleinen mit Goldaufdruck RM 36.—, in Halbleder RM 45.—

„Das Buch ist glänzend geschrieben, gliedert den ungeheuren und mannigfaltigen Stoff in übersichtlicher Art und legt Nachdruck auf manche bisher vernachlässigte Epochen, wie zum Beispiel die deutsche Malerei der Zopfzeit. Hamann beherrscht das Wort in außerordentlicher Weise; er versteht es, wie nicht viele, eine Epoche oder einen Künstler zu charakterisieren und plastisch hinzustellen. Geistreiche und treffende Vergleiche aus anderen Gebieten, Literatur, Musik, stehen ihm immer zu Gebot. Besonders zu loben ist die schöne Ausstattung. Die Bildbeilagen sind durchweg ganz vorzüglich ausgeführt." (Neue Freie Presse.)

*

Elementargesetze der bildenden Kunst. Grundlagen einer praktischen Ästhetik. Von Prof. Dr. H. Cornelius. 3., vermehrte Auflage. Mit 245 Abbildungen im Text und 13 Tafeln. Geh. RM 10.—, geb. RM 12.—

Mathematik und Malerei. Von Studiendirektor Dr. G. Wolff. 2., verbesserte Auflage. Mit 18 Figuren und 35 Abbildungen im Text und auf 4 Tafeln. (Mathematisch-Physikalische Bibliothek Bd. 20/21.) Kart. RM 2.40

Die Entwicklungsgeschichte der Stile in der bildenden Kunst. Von Dr. E. Cohn-Wiener. Bd. I: Vom Altertum bis zur Gotik. 3. Aufl. Mit 69 Abbildungen. Bd. II: Von der Renaissance bis zur Gegenwart. 3. Aufl. Mit 42 Abbildungen. (Aus Natur und Geisteswelt Bd. 317/18.) Geb. je RM 2.—

Ludwig Richter und Goethe. Von Oberstudiendirektor Dr. F. Breucker. Mit 53 Abbildungen. Künstlerisch ausgestattet. Kart. RM 3.—

Die Sprache einer Nation angreifen, heißt ihr Herz angreifen. Laube

Die Schönheit unserer Muttersprache

Von Dr. E. Kieseritzky

Geh. *RM* 8.—, in Leinwand geb. *RM* 10.—

Dieses Werk ist:

Ein Buch des Kampfes
gegen die Böswilligen, die unser Deutsch beschmutzen,
gegen die Oberflächlichen, die deutsche Schönheit nicht kennen wollen,
gegen die Ahnungslosen, die ihr kostbarstes Gut verkommen lassen.

Ein Buch der Stärkung
für die Ringenden, die ihre Sprache meistern wollen,
für die Freunde, die wohl von Schönheit schwärmen u. doch aus Unkenntnis sie nicht benennen können.

Ein Buch der Erfüllung
Den Fremden eine Lockung — uns Deutschen ein Trost: „Wie schön aber der deutsche Satz in Spannung und Entspannung und melodiestarker Betonung ist, wolle man an Kieseritzkys Sprache selbst ersehen!" (Zentralblatt für die gesamte Unterrichtsverwaltung in Preußen.)

Von deutscher Art und Kunst. Eine Deutschkunde. Hrsg. von Studienrat Dr. W. Hofstaetter. 4. Aufl. Mit 42 Taf. u. 2 Kart. Geb. *RM* 7.—, in Halbleder *RM* 10.—

Grundzüge der Deutschkunde. Erster Band. Herausg. von Studienrat Dr. W. Hofstaetter u. Geh. Reg.-Rat Dr. F. Panzer. Geh. *RM* 8.—, in Leinwand geb. *RM* 10.—
Inhalt: Sprache, Schrift, Prosastil, Verskunst, Musik und Bildende Kunst.

Zweiter Band. Herausgegeben von Studienrat Dr. W. Hofstaetter und Prof. Dr. Fr. Schnabel. [U. d. Pr. 1927.]
Inhalt: Evangelische Religion, Katholische Religion, Mythologie, Volkskunde, Landeskunde, Staat und Recht, Politische Entwicklung (Entstehung und Ausbreitung der Nation), Krieg, Wirtschaft.

Deutsche Feste und Volksbräuche. Von Prof. Dr. E. Fehrle. 3., durchgesehene und ergänzte Aufl. Mit 29 Abb. (Aus Natur und Geisteswelt Bd. 518.) Geb. *RM* 2.—

Nordlandhelden. Ein Sagenbuch. Von H. Eicke. Mit 10 Originalholzschnitten von H. Zethmeyer. In Ganzleinen geb. *RM* 6.—
„Eicke zählt zu den Meistern unter den zeitgenössischen Sagenerzählern. Er ist berufener Heber dieser altgermanischen Schätze, der mächtigsten und gewaltigsten aller Epik. Das Buch ist hervorragend gut ausgestattet und von Hanns Zethmeyer mit zehn meisterlichen Originalholzschnitten versehen worden, in die die Gewalt der Sage wunderbar gebannt ist." (Münchner Neueste Nachrichten.)

*

Freiheit, Weitergehn ist in der Kunstwelt, wie in der ganzen großen Schöpfung Zweck. Beethoven

Die Grundlagen der Musik. Von Dr. J. Peters. Mit 32 Fig. Geb. *RM* 7.60
Das Buch gibt eine zusammenfassende Behandlung der wichtigsten Tatsachen und Theorien, die der Musikübung zugrunde liegen. Es bringt in seinem 1. Teil die Grundlegung des modernen Tonsystems und seine Erweiterungen, in den folgenden Teilen die Grundlagen der Tonerzeugung, der Fortpflanzung und der Aufnahme und Würdigung zur Darstellung. Das Werk wendet sich an die weiteren Kreise der Musiktreibenden und für Musik Interessierten, denen es einen orientierenden Überblick sowohl nach der musikalischen wie nach der historischen Seite bietet.

Geschichte der Musik. Von Dr. A. Einstein. 3. Aufl. (Aus Natur und Geisteswelt Bd. 438.) Geb. *RM* 2.—

Musik der Gegenwart. Von K. Westphal. (Aus Natur und Geisteswelt Bd. 681.) Geb. *RM* 2.—. [Erscheint Weihnachten 1927.)
Zum ersten Male in einer Sammlung, die für weitere Kreise bestimmt ist, werden rückblickend die Probleme der so überaus bewegten Entwicklung des Musikschaffens der Gegenwart dargestellt und — auch an Hand von Notenanalysen — die großen, uns zeitverbundenen Neuerer wie Debussy, Schönberg, Strawinsky u. a. nach Wollen und Können charakterisiert. Das Bändchen reiht sich abschließend an Einsteins bekannte kleine Musikgeschichte an.

Beispielsammlung zur älteren Musikgeschichte. Von Dr. A. Einstein. 3. Aufl. (Aus Natur und Geisteswelt Bd. 439.) Geb. *RM* 2.—

Musikalisches Wörterbuch. Von Prof. Dr. H. J. Moser. (Teubners kleine Fachwörterbücher. Bd. 12.) Geb. *RM* 3.20

Geschichte der französischen Literatur

Von Prof. Dr. V. Klemperer

Bereits erschienen ist:

Band V:

Die französische Literatur von Napoleon bis zur Gegenwart

I. Teil: Die Romantik. Mit zwei Bildnissen in Kupfertiefdruck. Geh. RM 10.—, in Ganzleinen geb. RM 12.—

II. Teil: Positivismus. Mit zwei Bildnissen in Kupfertiefdruck. Geh. RM 10.—, in Ganzleinen geb. RM 12.—

III. Teil: Vom Positivismus bis zur Gegenwart. [Erscheint Frühjahr 1928.]

„Klemperer besitzt scharfen, durchdringenden Verstand, die Fähigkeit, sich in die verschiedensten Dichter und Denker aller Zeiten der romanischen Völker einzufühlen, Probleme zu wittern, eine ausreichende Kenntnis der Kulturgeschichte Frankreichs, eine bewundernswerte Belesenheit, einen gewandten, ja glänzenden Stil und dabei doch eine leicht faßliche Darstellungsweise. Dazu kommt, daß Klemperer nicht etwa eine geschickte Kompilation all dessen, was die französische Literaturwissenschaft bis jetzt in Deutschland und Frankreich geleistet hat, geben will, sondern daß sein Werk das eines selbständigen, eigenartigen und hochbedeutenden Gelehrten mit stark künstlerischem Einschlag ist, der seine eigenen Wege geht. ...: Ob Klemperer über Vigny oder Musset, über Balzac oder Mérimée, über Flaubert oder Zola, über Leconte de Lisle oder Sully Prudhomme handelt, immer entzückt er uns in seiner trefflichen Darstellung durch das Herausarbeiten der charakteristischen Einzelzüge der Meister." (Tägliche Rundschau.)

Weiter werden folgen:

Band I: Das Mittelalter. Band II: Die Renaissance.

Band III: Die klassische Höhe (17. Jahrhundert).

Band IV: Rokoko, Aufklärung und Revolution (18. Jahrhundert).

Zu Literatur und Kultur fremder Völker führen ferner:

Die romanischen Literaturen und Sprachen. 2. Abdruck. (Die Kultur der Gegenwart. Herausgeg. von Prof. Dr. P. Hinneberg. Teil I, Abt. IX, I.) In Halbleinen geb. RM 14.—

Dantes göttliche Komödie. In deutschen Stanzen von Prof. Dr. P. Pochhammer. 5. Aufl. Mit einem Dante-Bild nach Giotto von E. Burnand, Buchschmuck von H. Vogeler-Worpswede und 10 Skizzen. In Halbleinen RM 12.—, in Halbpergament RM 16.—. Kleine (Taschen)-Ausgabe. 5. Aufl. Geb. RM 5.20, in Halbpergament und in Halbleder je RM 8.—

Charles Dickens. Von Professor Dr. W. Dibelius. 2. Aufl. Mit 1 Titelbild. Geh. RM 14.—, in Ganzleinen geb. RM 16.—

Kultur und Sprache im neuen England. Von Prof. Dr. H. Spies. 2., ergänzte Aufl. Geh. RM 6.—, in Ganzleinen geb. RM 8.—

Die amerikanische Sprache. (Das Englisch der Vereinigten Staaten.) Von H. L. Mencken. Deutsche Bearbeitung von Prof. Dr. H. Spies. Geh. RM 5.60, geb. RM 7.—

Die Vereinigten Staaten von Amerika als Wirtschaftsmacht. Von Prof. Dr. H. Levy. Kart. RM 4.—

Handbuch der englisch-amerikanischen Kultur

Herausgegeben von Prof. Dr. W. Dibelius

Religiöses und kirchliches Leben in England. Von Geh. Konsistorialrat Prof. D. O. Baumgarten. Geh. RM 3.—, in Ganzleinen geb. RM 4.—

Englische Philosophie. Ihr Wesen und ihre Entwicklung. Von Dr. h. c. E. Wentscher. Geh. RM 3.60, in Ganzleinen geb. RM 4.80

Die englische Wirtschaft. Von Prof. Dr. H. Levy. Geh. RM 3.60, geb. RM 4.80

Geschichte der Vereinigten Staaten von Amerika. Von Prof. Dr. C. Brinkmann. Geh. RM 2.80, in Ganzleinen geb. RM 3.60

In Vorbereitung befindet sich 1927:

Indien unter englischer Herrschaft. Von Prof. Dr. J. Horovitz.

Wilhelm Diltheys Gesammelte Schriften

Einleitung in die Geisteswissenschaften. Versuch einer Grundlegung für das Studium der Gesellschaft und der Geschichte. 2. Aufl. Band I. Geh. RM 12.—, in Leinwand RM 15.—, in Halbleder RM 22.—

Weltanschauung und Analyse des Menschen seit Renaissance und Reformation. Abhandlungen zur Geschichte der Philosophie und Religion. 3. Aufl. Band II. Geh. RM 13.—, in Leinwand RM 16.—, in Halbleder RM 23.—

Studien zur Geschichte des deutschen Geistes. Band III. Geh. RM 7.50, in Leinwand RM 10.—, in Halbleder RM 16.— (Dieser Band ist auch als Sonderausgabe in Leinwand geb. zum gleichen Preise erhältlich.)

Die Jugendgeschichte Hegels und andere Abhandlungen zur Geschichte des deutschen Idealismus. 2. Aufl. Band IV. Geh. RM 14.—, in Leinwand RM 17.—, in Halbleder RM 25.—

Die geistige Welt. Einleitung in die Philosophie des Lebens. 1. Hälfte: Abhandlungen zur Grundlegung der Geisteswissenschaften. Band V. Geh. RM 12.—, in Leinwand RM 15.—, in Halbleder RM 22.—. 2. Hälfte: Abhandlungen zur Poetik, Ethik, Pädagogik. Band VI. Geh. RM 8.—, in Leinwand RM 11.—, in Halbleder RM 17.—

Der Aufbau der geschichtlichen Welt in den Geisteswissenschaften. Band VII. Geh. RM 10.—, in Leinwand RM 13.—, in Halbleder RM 20.—

In Vorbereitung: Band VIII. Philosophie der Philosophie. Abhandlungen zur Weltanschauungslehre.

„Von Diltheys Werk strahlt nicht nur der nie versiegende Reiz einer großen Persönlichkeit aus. Es bringt die Mannigfaltigkeit der Funktionsformen zu lebendigem Bewußtsein, in denen sich Geschichte, Kunst und Glaube als Träger schlechthin individueller Gestaltungen der wissenschaftlichen Analyse erschließen. An und von Dilthey muß es diese lernen, sich das Einzigartige ohne Schmälerung ihres Wesens zu unterwerfen." (Prof. Dr. R. Hönigswald in der „Deutschen Literaturzeitung".)

*

Der Weg in die Philosophie. Eine philosophische Fibel. Von Prof. Dr. G. Misch. Geh. RM 14.—, in Ganzleinen RM 16.—

„Um es vorweg zu nehmen: Eins der besten Bücher, das ich kenne. Keine Anthologie, kein philosophisches Lesebuch, keine Quellensammlung, und doch „alles" unter einer, von ausgezeichneter Belesenheit und Kenntnis getragenen Schau des inneren Zusammenhangs aller Philosophie überhaupt. Bedeutungsvoll sind „die gewählten Texte", bedeutungsvoller aber noch die Überleitungen und Überschriften des Verfassers, die wahre Musterstücke inhaltsvoller Zusammenfassungen darstellen und einen einzigartigen geistigen Rahmen um das Gebiet des philosophischen Denkens legen. — Jeder Gebildete wird das Werk mit reichem Gewinn studieren." (Lehrproben und Lehrgänge.)

Weltanschauung. Ein Führer für Suchende. Von Ministerialrat H. Richert. Geh. RM 3.20, geb. RM 4.80

Einführung in das philosophische Denken. Für Anfänger und Alleinlernende. Von Prof. D. W. Bruhn. Geb. RM 4.—

Zur Einführung in die Philosophie der Gegenwart. Von Geh. Rat Prof. Dr. A. Riehl. 6. Aufl. Geh. RM 5.—, geb. RM 6.—

*

Frömmigkeit der Mystik und des Glaubens. Von Hofrat Prof. D. Dr. K. Beth. Geh. RM 4.—, geb. RM 5.60

Das Buch will dazu beitragen, daß Kirche und Theologie die Frage der Mystik, die zum großen Teil auch die Frage der Sekte ist, gründlich erwägen. Es verlangt die grundsätzliche Unterscheidung von Spezialmystik und Glaubensmystik, beleuchtet die erstere an der mittelalterlichen deutschen Mystik, die zweite an dem Verhältnis von Glaube und Erlebnis und kommt zu dem Ergebnis, daß die Spezialmystik als Durchbruch eines eingeengten oder sich eingeengt wähnenden Individualismus zu verstehen ist. Sie hat in einem gesunden Glaubensleben ebensowenig ihren Platz wie andererseits das religiöse Erlebnis des Gläubigen in echter christlicher Mystik wurzelt.

Religion und Kirche — und Jesus. Was ist es um sie und was können sie uns heute sein? Kart. RM 3.50, in Leinwand geb. RM 5.—

„Das Buch ist von einem sachkundigen, den Stoff beherrschenden Manne verfaßt. Flüssig geschrieben, anschauliche Darstellung, die wissenschaftlichen Probleme jedem verständlich machend. Daher recht geeignet, den vielen Fragenden und Zweifelnden unserer Tage den Weg zum wirklichen Jesus, zu lebendiger Religion und zur wahren Volkskirche zu zeigen." (Jenaische Zeitung.)

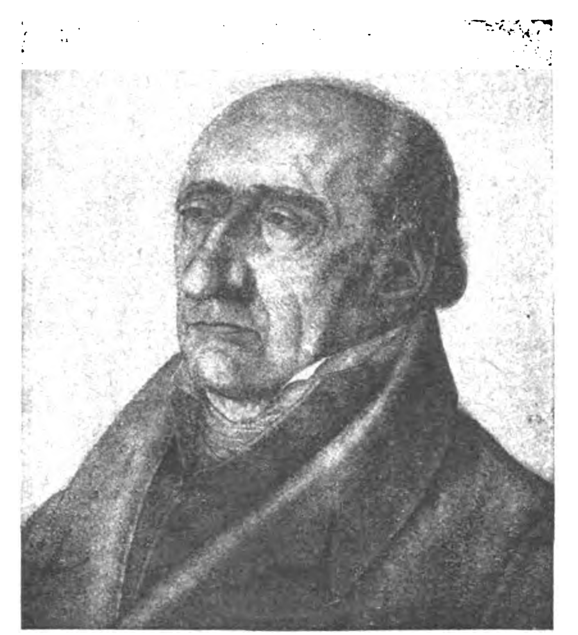
Geschichte – Wirtschaftsleben – Länderkunde
in fesselnden Darstellungen

Deutschland in den weltgeschichtlichen Wandlungen des letzten Jahrhunderts. Von Prof. Dr. F. Schnabel. Mit 16 Abb. in Kupfertiefdruck. Geb. RM 9.—

„Das ist das Buch, nach dem der Gebildete verlangt! Strengste Objektivität bei warmer Liebe für das Vaterland ist bei dem Verfasser selbstverständlich. Die Probleme sind prägnant und in sich geschlossen erfaßt, die großen Linien der geschichtlichen Entwicklung sind bis zur Gegenwart geführt...." (Der Tag.)

1789—1919. Eine Einführung in die Geschichte der neuesten Zeit. Von Prof. Dr. F. Schnabel. 5. Aufl. Mit Karten und Diagrammen. Geb. RM 5.—

„Der Verfasser verbindet auf das glücklichste mit einer weitblickenden weltpolitischen Auffassung ein tiefdringendes Verständnis für die wirtschaftlichen, sozialen und geistigen Grundlagen und Bedingungen der Entwicklung." (Breslauer Zeitung.)



Aus dem Corpus Imaginum d. Photogr. Gesellschaft, Berlin Olivier.

Freiherr vom Stein.
Verkleinerte Wiedergabe aus: Schnabel, Deutschland.

Bismarcks Nationalgefühl. Von Dr. G. Franz. Kart. RM 5.40

Auf Grund eingehenden Studiums der gesamten Bismarck-Literatur weist der Verfasser nach, daß die landläufige Ansicht von der Wandlung Bismarcks vom Parteimann zum preußischen Staatsmann, vom Preußen zum Deutschen irrig ist, daß vielmehr das nationalpolitische Denken und Fühlen des Junkers wie des Kanzlers das gleiche war.

Teubners Handbuch der Staats- und Wirtschaftskunde. I. Abt.: Staatskunde (3 Bände) Band I kpltt. geb. RM 18.—, Band II/III zus. geb. RM 16.—. II. Abt.: Wirtschaftskunde. (2 Bände.) Band I kpltt. geb. RM 16.—, Band II noch nicht abgeschlossen.
Jed. Band ist auch in einzelnen Heften lieferb., ausführl. Verzeichn. m. Inhaltsangaben kostenl. erhältl. v. Verlag.

Volkscharakter und Wirtschaft. Ein wirtschaftsphilosophisches Essay. Von Prof. Dr. H. Levy. (Gewalten und Gestalten Band 3.) Geh. RM 4.20, geb. RM 5.60

Die Grundlagen der Weltwirtschaft. Eine Einführung in das internationale Wirtschaftsleben. Von Prof. Dr. H. Levy. Geh. RM 5.—, geb. RM 7.—

Grundzüge der Länderkunde. Von Prof. Dr. A. Hettner. Mit 4 farb. Tafeln, 466 Kärtchen und Diagrammen i. T. Band I: Europa. 4., verb. Aufl. Geb. RM 14.—. Band II: Die außereuropäischen Erdteile. 3., verb. Aufl. Geh. RM 14.—, geb. RM 16.—

„Hettners Länderkunde von Europa wüßte ich überhaupt kaum etwas Gleichartiges zur Seite zu stellen. In kristallener Klarheit fließt eine Quelle, in welcher die Quintessenz der Länderkunde von Europa enthalten zu sein scheint, nicht mit rauschend geschwätziger Fülle, sondern in stillem, vornehm ruhigem Lauf." (Geografiska Annaler über Band I.)

Allgemeine Wirtschafts- und Verkehrsgeographie. Von Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. K. Sapper. Mit 70 kartogr. u. stat.-graph. Darstellungen. Geb. RM 12.—

„Kein Berufenerer als Sapper hätte dies Buch schreiben können, der selbst sowohl als Geograph, wie auch praktisch als Pflanzer und Kaufmann in Übersee tätig war und so das Wirtschaftsleben der Welt wie kaum ein anderer Fachgenosse kennt. Man ist von Anfang bis zu Ende gefesselt." (Mitteil. d. Geogr. Gesellsch. München.)

Japan und die Japaner. Eine Landeskunde. Von Prof. Dr. K. Haushofer. Kart. RM 5.—, geb. RM 6.—

Neuere Werke aus dem Gebiete der Naturwissenschaften

Astronomie. Unter Mitarbeit hervorragender Fachgelehrter herausgegeben von Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. J. Hartmann. Mit 44 Abb. im Text und 8 Tafeln. (Die Kultur der Gegenwart. Herausgegeben von Prof. Dr. P. Hinneberg. Teil III, Abt. III, Band 3.) Geh. RM 25.—, geb. RM 28.—, in Halbleder RM 33.—

„Alles in allem ein Buch, das als eine ideale Zusammenfassung des weiten Gebietes der Astronomie in ihrer geschichtlichen Entwicklung wie nach ihrem heutigen Stand angesehen werden kann." (Monatshefte für Mathematik und Physik)

Physik. Unter Mitarbeit hervorragender Fachgelehrter herausgegeben von Hofrat Prof. Dr. E. Lecher. 2. Aufl. Mit 116 Abb. im Text. (Die Kultur der Gegenwart. Herausgegeben von Prof. Dr. P. Hinneberg. Teil III, Abt. III, Band 1.) Geh. RM 34.—, geb. RM 36.—, in Halbleder geb. RM 40.—

„... dieses Werk gibt nicht nur die abstrakten, geistigen Formen, in ihm sprechen zu uns die Führer und Meister der modernen Physik, ein jeder auf dem Gebiete, dem seine besondere Arbeit gilt. So ist der letzte Sinn dieses Buches schöpferische Tat, getragen von der Kraft schöpferischer Persönlichkeit." (Unterrichtsblätter für Math. u. Naturwissensch.)

Physik und Kulturentwicklung durch technische und wissenschaftliche Erweiterung der menschlichen Naturanlagen. Von Geh. Hofrat Prof. Dr. O. Wiener. 2. Aufl. Mit 72 Abb. im Text. Geh. RM 2.80, geb. RM 4.—

Technisch-physikalische Rundblicke. Ausgewählte Beispiele aus der Praxis der technischen Physik. Herausgegeben von Oberstudiendirektor Prof. Dr. J. Gelfert. Mit 196 Abb. im Text. Geb. RM 4.80

Wetterfunk. Bildfunk. Television. (Drahtloses Fernsehen.) Von Dr. G. Eichhorn. Mit 36 Abb. Kart. RM 3.20

Anthropologie. Unter Mitarbeit hervorragender Fachgelehrter herausgegeben von Geh. Med.-Rat Prof. Dr. G. Schwalbe und Prof. Dr. E. Fischer. Mit 29 Abbildungstafeln und 98 Abb. im Text. (Die Kultur der Gegenwart. Herausgegeben von Prof. Dr. P. Hinneberg. Teil III, Abt. V.) Geh. RM 26.—, geb. RM 29.—, in Halbleder RM 34.—. Eine Gesamtdarstellung der Urgeschichte, Menschen- und Völkerkunde.

„... Wenn das ernsthafteste Studium des Menschen stets der Mensch sein muß, so verdient die Schwalbe-Fischersche Anthropologie in die Hände aller Ernsthaften zu gelangen." (Deutsche Tageszeitung.)

Einführung in die Biologie. Von Prof. Dr. K. Kraepelin. Große Ausgabe. 6., verb. Aufl. von Prof. Dr. C. Schäffer. Mit 465 Textbildern, 4 schwarzen Tafeln, 4 Tafeln in Buntdruck und 2 Karten. Geb. RM 8.—

„Dieses Buch ist geradezu ein Kompendium der allgemeinen Biologie. Es füllt tatsächlich eine Lücke aus und sollte in der Bibliothek niemandes fehlen, der in der Naturwissenschaft die Grundlage unserer heutigen Bildung sieht." (Die Umschau)

*

Der Gegenstand der Mathematik im Lichte ihrer Entwicklung. Von Oberstudiendirektor Dr. H. Wieleitner. Mit 20 Fig. im Text. (Math.-Phys.-Bibl. Bd. 50.) Kart. RM 1.20

„Das Bändchen stellt gewissermaßen ein Jubiläumsbändchen dar, zu dessen Erscheinen man den Verlag ebenso beglückwünschen kann wie zu der Entwicklung der Sammlung überhaupt." (Deutsch. Philologenbl.)

Vollständiges Verzeichnis der Sammlung vom Verlag, Leipzig, Poststraße 3, erhältlich.

Das Schachspiel und seine historische Entwicklung. Dargestellt an der Spielführung der hervorragendsten Schachmeister, insbesondere der Weltschachmeister. Mit 81 ausgewählten Schachpartien, 20 Aufgaben und den Bildnissen von 8 Weltschachmeistern. Von Regierungsdirektor L. Bachmann. Geh. RM 5.60, geb. RM 7.—

„Die historische Schilderung steht auf der Höhe der heutigen Forschung. Sorgfältig ausgewählte Partien kennzeichnen die Spielweise der führenden Meister. Ich finde das Werk gut und sehr empfehlenswert. Das Buch darf in keiner Schachbibliothek fehlen." (Kagans neueste Schachnachrichten)

In der Sammlung

„Aus Natur und Geisteswelt"

erschienen in neuen stark erweiterten Auflagen:

Germanische Kultur in der Urzeit. Von Bibliotheksdirektor Prof. Dr. G. Steinhausen. 4. Aufl. Mit 14 Abb. im Text. (Bd. 1005.) Geb. RM 3.—

Das Buch gibt eine umfassende, gemeinverständliche Darstellung des germanischen Kulturlebens bis zum Beginn der Völkerwanderung.

„Das geistvolle Werkchen entrollt dem Leser in anregender, charakteristischer Weise ein Stück germanischen Lebens in der Urzeit, gestützt auf die Ergebnisse historischer Forschungen, die es uns ermöglichen, die Entwicklung der Kultur unserer Vorfahren in religiöser, geistiger und sozialer Hinsicht bis weit zurück zu verfolgen." (Nassovia.)

Die Reichsverfassung vom 11. August 1919. Mit Einleitung, Erläuterungen, Gesamtbeurteilung und einem Anhang, enthaltend den Wortlaut der Geschäftsordnungen für den Reichstag und für die Reichsregierung. Von Prof. Dr. O. Bühler. 2. Aufl. (Bd. 1004.) Geb. RM 3.—

Die Darstellung hat die Form eines gemeinverständlichen Kommentars. Ein geschichtlicher Überblick, Erläuterung und Würdigung der im Wortlaut wiedergegebenen Artikel sowie eine zusammenfassende sachliche Kritik, die politisch nicht Stellung nimmt, machen das Werk geeignet zur Einführung in das deutsche politische Leben überhaupt.

Geschichte des Welthandels. Von Oberstudiendirektor Prof. Dr. M. G. Schmidt. 5. Aufl. (Bd. 1006.) Geb. RM 3.—.

Die Darstellung geht vom Handel der Alten aus, dessen wirklicher Umfang nach Gebietsausdehnung und Warenmenge unter Heranziehung der Quellen aufgezeigt wird; die Ursachen von Blüte und Verfall des mittelalterlichen Handels und seiner Träger — vor allem Islam, oberitalienische Städte, Hansa — wird geschildert. Wie dann die Verschiebung des Welthandels nach anderen Meeren und Ländern im Zeitalter der Entdeckungen neue Handelsplätze entstehen läßt und wie schließlich in der Ära der Dampfmaschine der Kampf zwischen den Handelsgroßmächten aufkommt, der im Weltkriege eine vorläufige Entscheidung findet, das wird in einer Weise entwickelt, die Zusammenhang und natürliche Bedingtheiten des geschichtlichen Ablaufs erkennen läßt. Das letzte Kapitel befaßt sich eingehend mit dem Bild des Welthandels nach dem Kriege und zeigt die Wege des Wiederaufbaues.

Wie ein Buch entsteht. Von Regierungsrat Prof. A. W. Unger. 6. Aufl. Mit 10 Tafeln und 26 Abb. im Text. (Bd. 1002.) Geb. RM 3.—

„Ein hervorragend interessantes Schriftchen! In sehr anschaulicher Darstellung bringt es nach einem Abriß der Geschichte des Buches ein Bild all der zahlreichen Etappen, die ein modernes Buch auf seinem Werdegang durchläuft. Die einzelnen Bogen der Schrift sind jeweils auf verschiedenem Papier, einzelne Seiten in verschiedenen Schriftarten gedruckt, zahlreiche Illustrationsproben verschiedener Technik sind beigefügt, wodurch die Anschauung und das Verständnis außerordentlich gefördert werden." (Akademische Blätter.)

Vollständiges Verzeichnis der Sammlung „Aus Natur und Geisteswelt" (Bände 1–1000 geb. je RM 2.–, Band 1001 und folgende in erweitertem Umfang je RM 3.–) vom Verlag erhältlich

---

Teubners kleine Fachwörterbücher

Philosophisches Wörterbuch von Studienrat Dr. P. Thormeyer. 3. Aufl. (Bd. 4.) Geb. RM 4.—

Psychologisches Wörterbuch von Privatdozent Dr. F. Giese. 2. Aufl. Mit zahlreichen Fig. (Bd. 7.) [In Vorb. 1927.]

Wörterbuch zur deutschen Literatur von Oberstudienrat Dr. H. Röhl. (Bd. 14.) Geb. RM 3.60

Volkskundliches Wörterbuch v. Prof. Dr. E. Fehrle. [In Vorb. 1927.]

Musikalisches Wörterbuch von Prof. Dr. H. J. Moser. (Bd. 12.) Geb. RM 3.20

Kunstgeschichtliches Wörterbuch v. Dr. H. Vollmer. (Bd. 13.) In Ganzleinen ca. RM 7.50

Chemisches Wörterbuch von Prof. Dr. H. Remy. Mit 15 Abbildungen und 5 Tabellen. (Bd. 10/11.) Geb. RM 8.60, in Halbleinen RM 10.60

Physikalisches Wörterbuch von Prof. Dr. G. Berndt. Mit 81 Fig. (Bd. 5.) Geb. RM 3.60

Astronomisches Wörterbuch von Dr. J. Weber. [In Vorb. 1927.]

Geographisches Wörterbuch von Prof. Dr. O. Kende. Allgemeine Erdkunde. 2. Aufl. Mit zahlr. Abb. (Bd. 8.) [In Vorb. 1927.]

Zoologisches Wörterbuch von Dr. Th. Knottnerus-Meyer. (Bd. 2.) Geb. RM 4.—

Botanisches Wörterbuch von Prof. Dr. O. Gerke. Mit 103 Abb. (Bd. 1.) Geb. RM 4.—

Wörterbuch der Warenkunde von Prof. Dr. M. Pietsch. (Bd. 3.) Geb. RM 4.60

Handelswörterbuch von Handelsschuldirektor Dr. V. Sittel u. Justizrat Dr. M. Strauß. Zugleich fünfsprachiges Wörterbuch, zusammengest. von V. Armhaus, verpfl. Dolmetscher. (Bd. 9.) Geb. RM 4.60

Weitere Bände in Vorbereitung

Handfertigkeits- und Beschäftigungsbücher

Handarbeit für Knaben und Mädchen

Jedes Heft mit farbigen und schwarzen Tafeln

Neue Bände

Weihnachtsarbeiten. Von E. Nicklaß. Mit 46 Abb. und 1 Titelbild. Kart. *RM* 2.60

Modellieren. Von E. Nicklaß. Mit 18 Tafeln. Kart. *RM* 2.50

Flechtarbeiten. Von H. Pralle. 3. Aufl. Mit 102 Textabb. und 16 Taf. Kart. *RM* 2.60

Blecharbeiten. Von H. Pralle. Mit 21 Vorlagetafeln, Kart. *RM* 2.20

Ferner liegen vor:

Puppenschneiderei und Nadelarbeit in der Schule. Von E. Rosenmund und A. Pallat-Hartleben.
Holzarbeit. Von J. L. M. Lauweriks.
Modellschiffbau. Von K. Storch.
Handnäharbeit. Von M. Stacke u. F. Küntzel.
Metallarbeit. Von F. Zwollo u. W. Rüsing.

Jedes Heft kart. *RM* 2.—

In neuer Bearbeitung sollen erscheinen:

Papparbeit. Von Chr. F. Morawe. 2. Aufl.
Spielzeug aus eigener Hand. Von A. Jolles. 2. Aufl.
Zeichnen für Nadelarbeit. Von V. M. Grupe. 2. Aufl.
Aus einer Schülerwerkstatt. Von F. P. Hildebrandt. 2. Aufl.



Knieender Clown. Von einer Dreizehnjährigen. Aus: Nicklaß, Modellieren.

*

Der deutschen Jugend Handwerksbuch. Herausgegeben von Ministerialrat Geh. Oberregierungsrat Prof. Dr. L. Pallat. I. Teil. 4. Aufl. Mit 117 Abb. im Text und auf 1 farb. Tafel. Geb. *RM* 5.—. II. Teil. 3. Aufl. Mit 136 Abb. im Text und 3 farbigen Tafeln. Kart. *RM* 6.—, geb. *RM* 7.—

Lebendiges Papier. Erfindungen und Entdeckungen eines Knaben. Von Oberstudiendirektor Dr. E. Weber. 3. Aufl. Mit 24 Tafeln. Kart. *RM* 3.—

Spiel und Spaß und noch etwas. Ein Unterhaltungs- und Beschäftigungsbuch für kleinere und größere Kinder. Von Realgymnasiallehrer K. Dorenwell. 5. u. 6. Aufl.
Heft I: Für die ganz Kleinen. Heft II: Für die Kleinen zwischen 5 und 9 Jahren. Mit 69 Figuren im Text. Heft III: Für die Größeren. Mit 53 Fig. im Text. Heft I und II kart. je *RM* 1.40. Heft III kart. *RM* 1.60

*

Kleine Beschäftigungsbücher

für Kinderstube und Kindergarten. Herausgegeben von L. Droescher

Bd. I. **Das Kind im Hause.** Von L. Droescher. 4. Aufl. Mit 13 Abb. im Text. Kart. *RM* 1.60

Bd. II. **Was schenkt die Natur dem Kinde?** Anleitung zur Naturbeobachtung und Beschäftigung. Von M. Blanckertz. 4. Aufl. Mit 39 Abb. u. 1 farb. Tafel. Kart. *RM* 2.—

Bd. III. **Kinderspiel und Spielzeug.** Von C. Zinn. 5. Aufl. Mit 57 Abb. Kart. *RM* 2.—

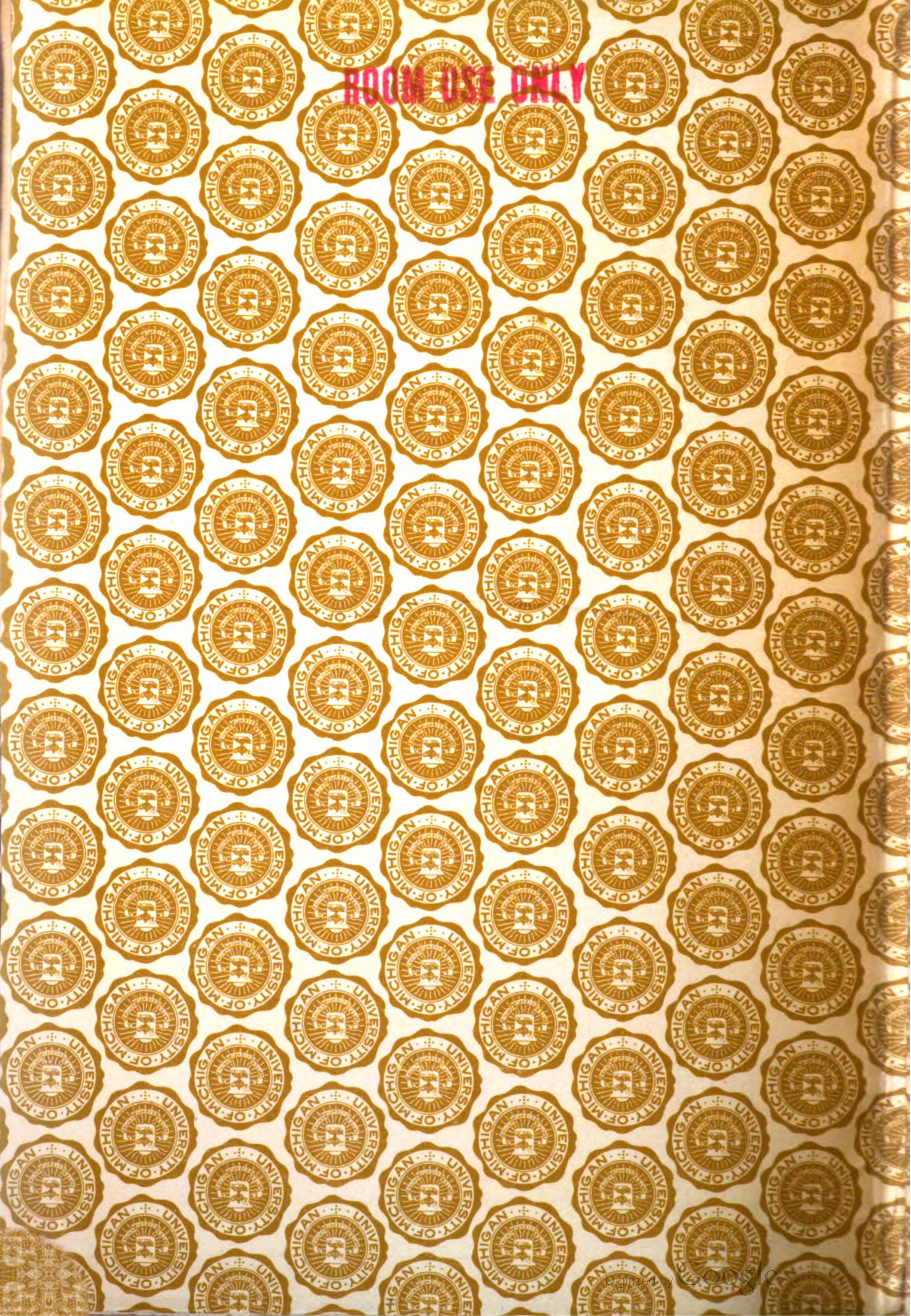
Bd. IV. **Geschenke von Kinderhand.** Von E. Humser. 4. Aufl. Mit 59 Abb. im Text. Kart. *RM* 1.60

Bd. V. **Allerlei Papierarbeiten.** Von H. v. Gierke und A. Dorpalen-Kuczynski. 6. Aufl. Mit 1 farb. Taf. u. 127 Abb. *RM* 2.—

Bd. VI. **Gesellschaftsspiele.** Von H. Hecker. Mit 40 Bildern und 8 Skizzen im Text und 1 farb. Tafel. Kart. *RM* 2.40

Prospekt »Im Jugendland« vom Verlag in Leipzig, Poststraße 3, erhältlich.

Druck von B. G. Teubner in Leipzig.


ROOM USE ONLY

